ELEMENTI

DI

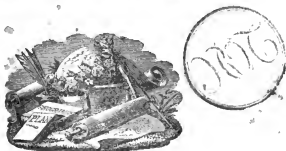
GEODESIA

DI

F. AMANTE

Professore di Geodesia nel Reale Officio Topografico e nel Real Collegio militare, Socio residente dell' Accademia Pontaniana, e Socio corrispondente della Reale Accademia delle scienze di Napoli, dell' Accademia di scienze e belle lettere di Palermo, dell' Accademia Gioenia di Catania, dell' Accademia della Civetta di Trapani, dell' Accademia degli zelanti di Aci-Reale, e della Reale Accademia di Lucca.

PRIMA PARTE.

TRIGONOMETRIA SFERICA E GEOGRAFIA MATEMATICA.

NAPOLI,

DALLA REALE TIPOGRAFIA MILITARE

1847.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NELLA PRIMA PARTE.

LIBRO I — TRIGONOMETRIA.

Libro I

GEOGRAFIA MATEMATICA.

LIBRO II — PRINCIPII DI ASTRONOMIA

LIBRO II.

LIBRO III. PROBLEMI DI GEOGRAFIA MATEMATICA.

Libro III.

LIBRO IV. PROJEZIONI DELLE CARTE GEOGRAFICHE.

N. B. Gli articoli segnati con * possono tralasciarsi in una prima lettura.

Le citazioni nel corso dell' opera contengono l' indicazione del LIBRO e del paragrafo; il primo è espresso con un numero romano, e il secondo con un numero arabo.

Errori essenziali da correggersi	*Correzioni*
Libro, *pag*, *rigo*	
II , 36 , 9 ...=129°.38′.50″,9	l=129.°30′.50″,9
II , 42 , 7 ...prolungamento $A'm$	prolungamento $A''m$
II , 80 , 22...corda ed alla sua	corda o alla sua
II , 95 , *ult*...alla distanza media	medio
II , 117 , 10...luni-solare o generale	lunisolare o la generale
II , 154 , 4 ...e però	e quindi
III , 8 , 23...solido $CLAQ$	solido $CSAQ$
IV , 8 , 30...seconda proprietà	terza proprietà
IV , 20 , 8 *risal*...al raggio	al diametro

ELEMENTI DI GEODESIA.

Introduzione.

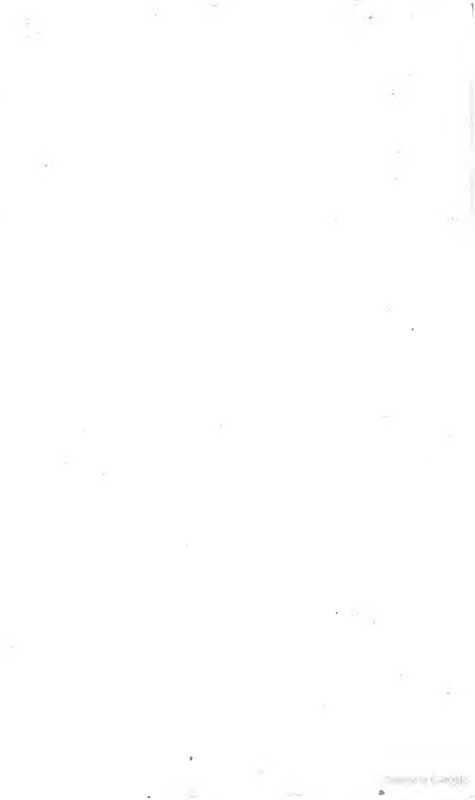
La *Geodesia*, stando al significato del vocabolo, (da γῆ, *terra* e δαίω, *io divido*) sarebbe quella parte della *geometria pratica* che insegna a *dividere* i terreni; ma i greci comprendevano sotto il nome di *Geodesia* tutta intera la geometria pratica, e quindi la *misura* non meno che la divisione de' terreni. I moderni hanno ritenuto questo antico significato della parola *Geodesia*; se non che, col progresso della scienza, le operazioni geodetiche essendosi elevate, dalla misura e divisione de' campi a quella delle provincie e de' regni, dovettero distinguersi in due ordini, cioè in operazioni *primarie* ed operazioni *secondarie*, ed attualmente s' intende per *Geodesia* la scienza, che tratta delle operazioni *primarie* occorrenti nella costruzione della *carta topografica* di uno stato o di una provincia, ed estende i suoi metodi trigonometrici ed astronomici anche alla determinazione della forma e grandezza della Terra. Esponiamo brevemente il progresso delle operazioni da eseguirsi per costruire una carta topografica, perchè chiaro apparisca fra quali termini si estende la scienza geodetica, e di quali teoriche abbisogna per compiere lo scopo che si propone.

Una carta topografica è la rappresentazione in piccolo sopra un piano di una parte della superficie terrestre con tutti i suoi particolari di città, strade, fiumi, monti etc. Per conservare le proporzioni del vero nelle varie parti del disegno, tutto deve esser misurato con gran cura sul terreno; ma perchè queste *misure* sono altrettante esperienze fisiche soggette ad errori, vuolsi usare molto

artifizio affinchè, moltiplicandole quanto è d'uopo per ottenere la compiuta descrizione della superficie da rappresentarsi, non si moltiplichino indefinitamente gli errori. Laonde è necessario assegnare prima con grande esattezza le posizioni di pochi punti scelti su tutta la superficie del paese, e riempire poi gli spazi intermedi con nuove operazioni, eseguite con metodi meno esatti, per risparmio di tempo; gli errori delle quali rimangono da quelle principali posizioni attenuati e distribuiti nella estensione di ciascuno degli spazi da esse limitati, senza potersi comunicare agli spazi adiacenti. La Geodesia adopera nelle operazioni *primarie* i metodi trigonometrici ed il calcolo numerico, e raccoglie i *dati* necessarii mediante osservazioni e misure eseguite con istrumenti di gran perfezione. Le operazioni *secondarie*, per riempire gli spazi compresi fra i punti *geodetici*, sono *grafiche*, o sia di disegno geometrico, e si eseguono con istrumenti meno perfetti. Queste operazioni formano lo scopo della *Topografia*, la quale si distingue perciò dalla Geodesia non tanto per la breve estensione di terreno che imprende a descrivere, quanto per i mezzi che adopera. È vero che nella formazione della carta topografica gli ultimi risultamenti della Geodesia debbono essere anche grafici, ma le costruzioni si riducono a determinare le posizioni de' punti principali con due coordinate rettilinee rettangolari. Queste linee si ottengono traducendo in misure i numeri che le rappresentano, i quali risultano da una lunga serie di operazioni di calcolo, che qui ci siamo proposti di accennare.

Dopo avere scelti i punti geodetici sul terreno si ordinano in triangoli legati fra loro, e costituenti un'ampia rete ad anelli triangolari che copre tutta la superficie del paese. Di questa rete si misurano con grande precisione tutti gli angoli ed un solo lato, e col calcolo trigonometrico se ne deducono le lunghezze di tutti gli altri lati. Si ottiene così la posizione relativa de' punti geodetici situati sulla superficie sferica della terra, ma per averne la posizione assoluta, è chiaro che bisogna riferirli a due assi rettangolari posti sulla stessa superficie. Ora, affinchè al semplice aspetto della carta topografica apparisca il luogo che la regione da essa rappresentata occupa sulla superficie terrestre, gli assi delle coordinate non possono essere arbitrarii, ma debbono essere l'*equatore* ed il *meridiano* terrestre. Le coordinate sferiche riferite a questi assi sono la *latitudine* e la *longitudine* geografica, ad ottenere le quali per ogni vertice di triangolo sono necessarii due dati astronomici cioè, 1.° la latitudine e la longitudine astronomica di un punto della rete geodetica, le quali danno la posizione assoluta di quel punto, e determinano perciò il luogo che deve prendere la *triangolazione* relativamente all'equatore ed al meridiano terrestre; 2.° l'angolo che un lato di triangolo fa col meridiano, ossia l'*azimut* del lato stesso, il quale ferma la

posizione della rete rispetto a quell' asse, impedendole di girare intorno al punto di cui si è ottenuta la posizione assoluta con le osservazioni astronomiche. Da questi due indispensabili elementi si desumono, col calcolo di opportune formole, le coordinate sferiche di tutti i vertici della triangolazione, o siano le loro latitudini e longitudini geografiche, non omettendosi in questo procedimento di tener conto dello *schiacciamento* terrestre, cioè della differenza tra il raggio dell'equatore ed il semi-asse polare. Ma dopo tutto ciò i punti geodetici esistono ancora sulla superficie sferoidica della Terra, e per ottenerli sulla carta topografica deve risolversi il problema di rappresentare o sviluppare nel miglior modo possibile, sopra un piano una parte di quella superficie; il quale problema è un' applicazione della teorica generale delle projezioni al caso della carta topografica. Finalmente la posizione che i punti geodetici occupano sulla superficie terrestre, sarà interamente determinata quando si misureranno con la livellazione geodetica le loro altezze sul livello del mare, cioè le loro coordinate verticali, le quali non potendo esprimersi graficamente sul disegno, saranno espresse in numeri.

Da questa breve esposizione chiaramente appare quali debbano essere gli argomenti da trattarsi nella *Geodesia*, e di quali teoriche sussidiarie essa abbisogna. Prescindendo dalle conoscenze generali di matematica e di fisica, gli *Elementi di Geodesia* debbono essere preceduti da uno studio speciale della *Trigonometria* e de' *principii di Astronomia*. A queste cognizioni preliminari, ordinate nel modo più opportuno per le applicazioni, fanno seguito i diversi trattati che formano il soggetto della Geodesia cioè; *determinazione delle latitudini, longitudini ed azimuti; projezioni geografiche; triangolazione; determinazione della forma e grandezza della terra,* la quale teoria comprende anche il calcolo delle posizioni geografiche de' vertici de' triangoli, in cui non si può prescindere dallo schiacciamento terrestre; *livellazione geodetica; ed applicazione della teorica delle projezioni alle carte costrutte a grande scala.* Noi abbiamo distribuito il tutto in otto libri, raccogliendo sotto il nome di *Geografia matematica* i principii di Astronomia, i problemi astronomici concernenti la Geografia, e le projezioni geografiche; e sotto l'indicazione di *Operazioni geodetiche*, la triangolazione, lo studio della forma e grandezza della terra e la livellazione.

LIBRO PRIMO

TRIGONOMETRIA.

CAPO PRIMO.

Formole generali.

§. 1. Fra i principii generali di Trigonometria, che supponiamo conosciuti, si trovano dimostrate le principali formole del seguente quadro, dalle quali facilmente si cavano le altre: in tutte si è considerato eguale all' unità il raggio del cerchio sulla cui circonferenza si valutano gli archi.

$$\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1,\ \operatorname{sen} a=\sqrt{1-\cos^2 a},\ \cos a=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a};$$

$$\begin{aligned}1-\cos^2 a-\cos^2 b&=-(1-\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b)=\operatorname{sen}^2 a-\cos^2 b\\&=\operatorname{sen}^2 b-\cos^2 a=\operatorname{sen}^2 b(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a)\\&\quad-\cos^2 a(\operatorname{sen}^2 b+\cos^2 b)\\&=\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b-\cos^2 a\cos^2 b:\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a=\operatorname{sen}^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cos^2 a.$$

§. 2. $\operatorname{Tan} a=\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a},\ \cot a=\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a},\ \cot a=\dfrac{1}{\tan a},\ \tan a=\dfrac{1}{\cot a},$

$$\operatorname{seg} a=\frac{1}{\cos a}=\sqrt{1+\tan^2 a},\ \operatorname{coseg} a=\frac{1}{\operatorname{sen} a}=\sqrt{1+\cot^2 a},$$

$$\cos a=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}}=\frac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}},$$

$$\operatorname{sen} a=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}=\frac{\tan a}{\sqrt{1+\tan^2 a}};$$

$\operatorname{sen} -a = -\operatorname{sen} a$, $\cos -a = \cos a$, $\tan -a = -\tan a$,
$\cot -a = -\cot a$.

§. 3. $\operatorname{Sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$,
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$,

$$\tan a \cos b \pm \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a},\ \cos b \pm \operatorname{sen} b \cot a = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\operatorname{sen} a},$$

$$\cos b \mp \tan a \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a \pm b)}{\cos a},\ \cot a \cos b \mp \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a \pm b)}{\operatorname{sen} a},\ \text{etc.}$$

$$\tan a \pm \tan b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b},\ \cot a \pm \cot b = \frac{\operatorname{sen}(b \pm a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a},$$

$$\cot a \pm \tan b = \frac{\cos(a \mp b)}{\operatorname{sen} a \cos b},\ \text{etc.}$$

$1 - \cos^2 a - \cos^2 b = -(1 - \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b) = -\cos(a+b)\cos(a-b)$,
$\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a = \operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)$,
$\operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} b \cos b = \operatorname{sen}(a+b)\cos(a-b)$,
$\operatorname{sen} a \cos a - \operatorname{sen} b \cos b = \operatorname{sen}(a-b)\cos(a+b)$,
$\operatorname{sen}^2 a \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b \cos^2 b = \operatorname{sen}(a+b)\cos(a+b)\operatorname{sen}(a-b)\cos(a-b)$.

§. 4. $\operatorname{Sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$, $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$,
$\operatorname{sen}(45^\circ \pm a) = \cos(45^\circ \mp a)$,
$\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a$,
$\cos a = \cos^2 \tfrac{1}{2} a - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a$,

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} a} - \sqrt{1-\operatorname{sen} a}}{2},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} a} + \sqrt{1-\operatorname{sen} a}}{2},$$

$\cos \tfrac{1}{2} a \pm \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{1 \pm \operatorname{sen} a}$,

$$\tan \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a},$$

$$= \frac{\operatorname{seg} a - 1}{\tan a} = \frac{\sqrt{1+\tan^2 a} - 1}{\tan a}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}} = \frac{1+\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} a}{1-\cos a},$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a - \tan\tfrac{1}{2}a = 2\cot a, \quad \cot\tfrac{1}{2}a + \tan\tfrac{1}{2}a = 2\operatorname{cosec} a,$$

$$\frac{\cot\tfrac{1}{2}a - \tan\tfrac{1}{2}a}{\cot\tfrac{1}{2}a + \tan\tfrac{1}{2}a} = \cos a.$$

§. 5. $\operatorname{Tan}(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}, \quad \cot(a \pm b) = \dfrac{1 \mp \tan a \tan b}{\tan a \pm \tan b}$

$$\tan(45^\circ \pm \tfrac{1}{2}a) = \cot(45^\circ \mp \tfrac{1}{2}a) = \frac{1 \pm \tan\tfrac{1}{2}a}{1 \mp \tan\tfrac{1}{2}a} = \frac{\cot\tfrac{1}{2}a \pm 1}{\cot\tfrac{1}{2}a \mp 1}$$

$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}a \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}a \mp \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a} = \frac{1 \pm \operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1 \mp \operatorname{sen} a}$$

$$= \sqrt{\frac{1 \pm \operatorname{sen} a}{1 \mp \operatorname{sen} a}}.$$

$$\tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}a) + \tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = 2\sec a.$$

§. 6. $2\operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$

$$2\operatorname{sen} b \cos a = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)$$

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

$$-2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos(a+b) - \cos(a-b)$$

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

$$= -\cos(a+b)\cos(a-b) - \cos c\,\{\cos c - \cos(a+b) - \cos(a-b)\}$$

$$= \{\cos(a-b) - \cos c\}\{\cos c - \cos(a+b)\}$$

$$= \{\cos(a-c) - \cos b\}\{\cos b - \cos(a+c)\}$$

$$= \{\cos(b-c) - \cos a\}\{\cos a - \cos(b+c)\} \text{ etc.}$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 c + 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$$

$$= \{\cos(a+b) + \operatorname{sen} c\}\{\cos(a-b) - \operatorname{sen} c\} \text{ etc.}$$

§. 7. $\operatorname{Sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos q - \cos p = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q) + \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)$$

$$\cos q = \cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q) + \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos q \pm \operatorname{sen} p = \{\cos\tfrac{1}{2}(p+q) \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\} \times \{\cos\tfrac{1}{2}(p-q) \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)\}$$

$$1+\operatorname{sen}p=2\operatorname{sen}^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}p)$$

$$1-\operatorname{sen}p=2\operatorname{sen}^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}p),\quad \frac{1\pm\operatorname{sen}p}{1\mp\operatorname{sen}p}=\tan^2(45\pm\tfrac{1}{2}p)$$

$$1+\cos p=2\cos^2\tfrac{1}{2}p$$

$$1-\cos p=2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}p,\quad \frac{1+\cos p}{1-\cos p}=\cot^2\tfrac{1}{2}p$$

$$\frac{\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q}{\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q}=\frac{\tan\frac{1}{2}(p+q)}{\tan\frac{1}{2}(p-q)},$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos p-\cos q}=-\cot\tfrac{1}{2}(p+q)\cot\tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\frac{\operatorname{sen}p\pm\operatorname{sen}q}{\cos p+\cos q}=\tan\tfrac{1}{2}(p\pm q),\quad \frac{\operatorname{sen}p\pm\operatorname{sen}q}{\cos p-\cos q}=-\cot\tfrac{1}{2}(p\mp q).$$

§. 8. Alle precedenti formole finite aggiungeremo le serie qui appresso notate, che sono di un uso comunissimo nell'analisi, e si trovano dimostrate nell'introduzione al calcolo differenziale.

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{1.3}+\frac{2x^5}{1.3.5}+\frac{17x^7}{1.3.5.7.3}\text{ etc.}$$

$$x=\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\operatorname{sen}^5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\operatorname{sen}^7x}{7}\text{ etc.}$$

$$x=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3x+\frac{1}{5}\tan^5x-\frac{1}{7}\tan^7x+\text{etc.}$$

$$\log(1\pm x)=M\left(\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\text{etc.}\right);$$

dove $M=0{,}4342944819$ rappresenta il modulo, che serve a convertire i logaritmi neperiani in logaritmi briggiani.

CAPO II.

Risoluzione analitica de' triangoli rettilinei.

§. 9. Risolvere i triangoli rettilinei, o sferici, significa risolvere il problema generale; *dati tre de' sei elementi che si considerano in un triangolo, cioè i tre lati ed i tre angoli, determinare gli altri tre*. La soluzione di questo problema è sempre possibile pe' triangoli sferici, ma per i triangoli rettilinei deve eccettuarsi il caso in cui sono dati i tre angoli, poichè è noto che allora la lunghezza assoluta de' lati rimane indeterminata, ed i loro rapporti soltanto risultano cogniti.

Le nozioni elementari di Geometria basterebbero per poter costruire il triangolo rettilineo, o sferico, di cui fossero dati tre elementi in qualunque modo presi; ma questi metodi *grafici* quantunque esatti in teoria, darebbero in pratica un'approssimazione grossolana, dipendente dalla imperfezione degl' istrumenti che in essi si adoperano. Per la qual cosa la Trigonometria, seguendo un'altra strada, si propone o di assegnare l' espressione letterale di ciascun elemento incognito in funzione de' dati, o di determinarne in numeri il valore, mediante il calcolo logaritmico. La risoluzione de' triangoli, secondo che mira all' uno o all' altro di questi due oggetti, può dirsi *algebrica*, o *numerica*.

Il metodo analitico immaginato la prima volta dal sommo *Eulero*, per risolvere i triangoli sferici, consiste nello stabilire tre equazioni fra i sei elementi del triangolo, e considerando conosciute tre di quelle sei quantità ed incognite le altre tre, determinarne i valori per mezzo della eliminazione (*). In tal modo si ottengono immediatamente le soluzioni algebriche de' triangoli, ma le espressioni degli elementi incogniti cui si perviene, essendo quasi tutte

(*) L'equazioni che *Eulero* adoperò, (veggasi la sua Memoria negli atti di Pietroburgo anno 1779 1.ª parte) desumendole da un'apposita costruzione geometrica, esprimevano tre diverse proprietà del triangolo sferico, per cui il Signor *de Gua* pensò di derivare più analiticamente tutte le formole trigonometriche da una sola equazione fondamentale, o sia da un unico principio che, applicato successivamente ai tre angoli o ai tre lati, desse le equazioni necessarie a determinare tre de' sei elementi del triangolo sferico. L'analisi di questo matematico fu però così complicata, che il celebre *Lagrange* disse che sembrava più propria a dimostrare gl' inconvenienti del proposto metodo che a farlo adottare. Laonde lo stesso *Lagrange* rivolse la sua attenzione al soggetto e, partendo dal principio del *de Gua*, ne dedusse con somma semplicità le quattro principali formole della Trigonometria sferica. (Veggasi il Giornale della Scuola Politecnica, 6.° cahier.) Ne' trattati posteriori non si è fatto che seguire la via segnata dall' illustre geometra italiano.

incomode a calcolarsi co' logaritmi, sono poi convenientemente modificate ond' essere adoperate con facilità nella ricerca de' valori numerici de' lati e degli angoli da determinarsi, e si adempie così al secondo e più importante scopo della Trigonometria.

Questo metodo è stato applicato anche alla Trigonometria rettilinea, adottandosi da alcuni autori come principio fondamentale analitico il teorema che, *il quadrato di un lato eguaglia la somma de' quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto degli stessi lati moltiplicato pel coseno dell' angolo da essi compreso;* ma siccome un tal teorema suppone la risoluzione del triangolo rettangolo, così esso non trovasi nella identica condizione del suo analogo di trigonometria sferica, dal quale tutto lo sviluppo analitico delle formole si fa derivare. Varii scrittori italiani hanno quindi preferito il teorema de' seni degli angoli proporzionali ai lati opposti, quantunque a rigore non possa considerarsi come principio unico fondamentale, perchè non offre se non due equazioni essenzialmente diverse fra loro, laddove per determinare tutti gli elementi incogniti ce ne vogliono tre. Ma la terza equazione emerge spontanea dalla principalissima proprietà del triangolo rettilineo, che la somma de' tre angoli è eguale a due retti. E siccome quest' ultimo teorema è di un uso indispensabile nella risoluzione dei triangoli piani, qualunque sia la forma che voglia darsi alla Trigonometria, così abbiamo creduto che il metodo più naturale e semplice fosse quello di adottarlo fin da principio come fondamentale insieme al teorema de' seni. Indicando dunque con a, b, c i lati del triangolo rettilineo, e con A, B, C gli angoli ad essi opposti, le tre equazioni fondamentali dalle quali si desumono analiticamente tutte le formole della Trigonometria rettilinea, senza la considerazione anticipata del caso particolare del triangolo rettangolo, e senza duplicità di metodo, sono le seguenti

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{\text{sen}\,A}=\dfrac{b}{\text{sen}\,B}=\dfrac{c}{\text{sen}\,C} \\ A+B+C=180^\circ \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (a)$$

Il principio de' seni degli angoli proporzionali a' lati opposti, espresso dalle prime due equazioni, si dimostra facilmente a questo modo. Sia ABC [*fig.* 1.] il triangolo proposto al quale si circoscriva un cerchio, e col centro O e col raggio Oa delle tavole si descriva l'altro cerchio abc. Condotte le rette OA, OB, OC ai vertici del triangolo, si uniscano anche le bc, ac, ab, che risulteranno evidentemente parallele a BC, AC, AB, e proporzionali alle medesime, per i triangoli simili abc, ABC. Ma nel cerchio abc le corde bc, ac, ab rappresentano i doppi seni delle metà degli archi che sottendono, ossiano i doppi seni degli an-

goli bac, abc, bca, rispettivamente eguali agli angoli del triangolo proposto, dunque i lati BC, AC, AB saranno proporzionali ai doppi seni degli angoli opposti A, B, C, e quindi anche ai semplici seni, cioè si avrà

$a : b : c :: \text{sen} A : \text{sen} B : \text{sen} C$, ovvero

$$\frac{a}{\text{sen} A} = \frac{b}{\text{sen} B} = \frac{c}{\text{sen} C}.$$

§. 10. Ciò premesso, cerchiamo una relazione fra due lati a, b del triangolo, e due angoli A, C uno opposto e l'altro adiacente. Dalle equazioni precedenti abbiamo

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen} B}{\text{sen} A}, \text{ e } \text{sen} B = \text{sen} \{180^\circ - (A+C)\} = \text{sen}(A+C), \text{ onde}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen}(A+C)}{\text{sen} A} = \frac{\text{sen} A \cos C + \text{sen} C \cos A}{\text{sen} A}$$

$$= \cos C + \text{sen} C \cot A, \text{ e finalmente}$$

$$\cos C = \frac{b}{a} - \cot A \,\text{sen} C,$$

che è la relazione richiesta. Con un simile procedimento si dimostreranno altre cinque equazioni analoghe alla precedente che formano insiem con essa il secondo sistema di formole della Trigonometria rettilinea cioè,

$$\left.\begin{aligned} \cos C &= \frac{b}{a} - \cot A \,\text{sen} C, & \cos C &= \frac{a}{b} - \cot B \,\text{sen} C \\ \cos A &= \frac{b}{c} - \cot C \,\text{sen} A, & \cos A &= \frac{c}{b} - \cot B \,\text{sen} A \\ \cos B &= \frac{a}{c} - \cot C \,\text{sen} B, & \cos B &= \frac{c}{a} - \cot A \,\text{sen} B \end{aligned}\right\} \cdots (b)$$

§. 11. Il terzo ed ultimo sistema comprende le relazioni fra tre lati ed un angolo. Per trovarle sommiamo le prime due equazioni (b), ed avremo

$$2\cos C = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \text{sen} C \{\cot A + \cot B\}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{ab} - \frac{\text{sen} C \,\text{sen}(A+B)}{\text{sen} A \,\text{sen} B}, \text{ (§. 3)};$$

e poichè per le equazioni (a), $\text{sen}(A+B) = \text{sen} C$, e $\dfrac{\text{sen} C}{\text{sen} A} = \dfrac{c}{a}$,

$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{b}$, facendo le sostituzioni si avrà

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Allo stesso modo si dimostreranno le altre due equazioni analoghe, onde il terzo ed ultimo sistema di formole sarà

$$\left.\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ \cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\end{aligned}\right\}\;\cdots\cdots\cdots\;(c)$$

le quali possono anche scriversi così,

$$\left.\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2\,ab\cos C\\ b^2&=a^2+c^2-2\,ac\cos B\\ a^2&=b^2+c^2-2\,bc\cos A\end{aligned}\right\}\;\cdots\cdots\cdots\;(c)$$

e sotto questo aspetto sono l'espressione analitica del teorema; *in ogni triangolo rettilineo il quadrato di un lato qualunque eguaglia la somma de' quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto degli stessi lati moltiplicato pel coseno dell'angolo da essi compreso.*

Aggiungendo fra loro a due a due queste ultime equazioni, e dividendo le somme ottenute per $2a$, per $2b$, e per $2c$, se ne caveranno le relazioni semplici ed eleganti che seguono,

$$\left.\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B\\ b&=a\cos C+c\cos A\\ c&=a\cos B+b\cos A\end{aligned}\right\}\;\cdots\cdots\cdots\;(c').$$

Le quali a primo aspetto, pare che potessero servire a determinare i lati a, b, c per mezzo degli angoli, ma trattate con gli ordinarii metodi di eliminazione conducono all'equazione, $\cos B\cos C+\cos A=\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C$, che non contiene più i lati, onde chiara apparisce l'impossibilità di quella ricerca. E l'indicata relazione fra gli angoli, che si cambia in, $\cos A=-(\cos B\cos C-\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C)=-\cos(B+C)$, da cui si ottiene $A=180^\circ-(B+C)$, esprime la nota proprietà del triangolo che la somma de' tre angoli è eguale a due retti.

§. 12. Le formole (a), (b), (c) offrono la risoluzione algebrica del triangolo rettilineo in tutti i casi; ma le (b), (c) non essendo

comode pel calcolo logaritmico, bisognerà cercarne delle altre più adattate alla risoluzione numerica.

Dalle equazioni fondamentali si ha,

$$\frac{a}{c}=\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C},\ \text{e}\ \frac{b}{c}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

le quali uguaglianze aggiunte e sottratte una dall'altra danno

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

e per le formole generali, $\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p \pm q) \times \cos \frac{1}{2}(p \mp q)$, $\operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$, (§. 4, 7), sarà

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2}(A+B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}.$$

Or essendo $A+B=180^\circ-C$, ed $\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}C$, si ha $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C$, e $\cos\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$, e quindi

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}C\operatorname{sen}\frac{1}{2}C};\quad \frac{a-b}{c}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C},$$

e riducendo

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{c}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}\\ \frac{a-b}{c}&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}\end{aligned}\right\}\ \textit{ovvero},\ \left.\begin{aligned}\frac{a+b}{c}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\\ \frac{a-b}{c}&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}\end{aligned}\right\}.(m).$$

Queste relazioni rimarcabili, che corrispondono a quelle di *Gauss* o di *Delambre* della Trigonometria sferica, potranno essere utili in molti casi, e divise una per l'altra danno immediatamente

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C},\ \text{da cui si desume}$$

$$a+b:a-b::\tan\frac{1}{2}(A+B)\,[=\cot\frac{1}{2}C]:\tan\frac{1}{2}(A-B)\ldots(n)$$

cioè, *la somma di due lati sta alla loro differenza come la tangente della semisomma degli angoli opposti sta alla tangente della semidifferenza degli angoli medesimi.*

Per rendere le formole (c) comode a calcolarsi co' logaritmi, se ne prenda una qualunque e si aggiungano e sottraggano dall'unità i due membri dell'uguaglianza che esprime; si avrà

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad 1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

ovvero

$$1+\cos A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},\quad 1-\cos A=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc},$$

e riflettendo che $1+\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A$, $1-\cos A=2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}A$ (§. 7), e che la differenza di due quadrati eguaglia la somma delle radici moltiplicata per la loro differenza, si avrà

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2bc},$$

$$2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{2bc},$$

onde

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4bc}},$$

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{4bc}},$$

nelle quali formole facendo per brevità $a+b+c=p$, e quindi $b+c-a=p-2a$, $a+b-c=p-2c$, ed $a+c-b=p-2b$, si avrà, dopo le convenienti riduzioni

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-a)}{bc}},\ \text{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-b)(\frac{1}{2}p-c)}{bc}}\ldots(p)$$

Con un simile procedimento si troverebbero le formole analoghe per gli altri due angoli B, C del triangolo.

Risoluzione de' triangoli rettangoli.

§. 13. Applichiamo le formole precedenti alla risoluzione de'triangoli. E cominciando da' triangoli rettangoli, se si faccia l'angolo $A=90°$, per questo valore particolare si avrà, sen $A=1$, e $\cos A=\cot A=0$, e quindi le formole (a), (b), (c), scegliendo quelle in cui si trova l'angolo A, si cambieranno nelle seguenti,

$$a=\frac{b}{\text{sen}\,B}=\frac{c}{\text{sen}\,C},\ \text{ovvero},\ \text{sen}\,B=\frac{b}{a},\ \text{sen}\,C=\frac{c}{a},$$

$$\cos C=\frac{b}{a},\ \cos B=\frac{c}{a};$$

$$o = \frac{c}{b} - \cot B,\quad o = \frac{b}{c} - \cot C,\ \text{ovvero}$$

$$\tan B = \frac{b}{c},\quad \tan C = \frac{c}{b};$$

$$o = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \text{e quindi}\ a^2 = b^2 + c^2:$$

le quali sono l'espressione analitica dei quattro teoremi che risolvono il triangolo rettangolo in tutti i casi;

1.° *Il seno* di un angolo obliquo *è eguale al lato opposto diviso per l'ipotenusa.*

2.° *Il coseno* di un angolo obliquo *è eguale al lato adiacente diviso per l'ipotenusa.*

3.° *La tangente* di un angolo obliquo *è eguale al lato opposto diviso per l'adiacente.*

4.° *Il quadrato dell'ipotenusa è eguale alla somma de' quadrati de' cateti.*

Risoluzione de' triangoli obliquangoli.

§. 14. Passando ai triangoli obliquangoli, le formole fondamentali (*a*) danno immediatamente la risoluzione algebrica e numerica del

I.° Caso. *Dato un lato* a *del triangolo e due angoli qualunque,* A, B, *trovare* C, b, c. Sarà

$$C = 180^\circ - (A + B),\ b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},\ c = \frac{a \operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

II.° Caso. *Dati i tre lati* a, b, c, *del triangolo, trovare i tre angoli* A, B, C. Le formole (*p*) e le loro analoghe, risolvono compiutamente il problema. Ed è notabile che questo caso può avere due soluzioni algebriche differenti, poichè le formole (*c*) danno il coseno di un angolo incognito in funzione de' tre lati, e per mezzo delle (*p*) può ottenersi il seno o il coseno della metà dell'angolo stesso espresso per le medesime quantità.

Ma quando occorre di determinare tutti tre gli angoli incogniti, l'applicazione successiva delle formole (*p*) agli angoli A, B, C riesce troppo incomoda; si potranno allora adoperare le seguenti.

Si divida l'espressione di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}A$ per quella di $\cos\frac{1}{2}A$, e si avrà

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p - b)(\frac{1}{2}p - c)}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p - a)}}.$$

E facendo lo stesso per sen $\frac{1}{2}B$, cos $\frac{1}{2}B$, e per sen $\frac{1}{2}C$, cos $\frac{1}{2}C$, si otterranno le altre due formole

$$\tan \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-a)(\frac{1}{2}p-c)}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-b)}},$$

$$\tan \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-a)(\frac{1}{2}p-b)}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-c)}}.$$

Dividiamo di nuovo tan $\frac{1}{2}A$ per tan $\frac{1}{2}B$, e tan $\frac{1}{2}A$ per tan $\frac{1}{2}C$, ed avremo con piccole riduzioni

$$\frac{\tan \frac{1}{2}A}{\tan \frac{1}{2}B} = \frac{(\frac{1}{2}p-b)}{(\frac{1}{2}p-a)}, \quad \frac{\tan \frac{1}{2}A}{\tan \frac{1}{2}C} = \frac{(\frac{1}{2}p-c)}{(\frac{1}{2}p-a)}$$

ovvero, introducendo le cotangenti mediante la relazione, $\tan = \frac{1}{\cot}$,

$$\frac{\cot \frac{1}{2}B}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{(\frac{1}{2}p-b)}{(\frac{1}{2}p-a)}, \quad \frac{\cot \frac{1}{2}C}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{(\frac{1}{2}p-c)}{(\frac{1}{2}p-a)}.$$

Le formole da adottarsi a preferenza quando si vogliono tutti i tre angoli saranno dunque,

$$\tan \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-b)(\frac{1}{2}p-c)}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-a)}},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} B = \frac{(\frac{1}{2}p-b)}{(\frac{1}{2}p-a)} \cot \tfrac{1}{2} A, \quad \cot \tfrac{1}{2} C = \frac{(\frac{1}{2}p-c)}{(\frac{1}{2}p-a)} \cot \tfrac{1}{2} A.$$

§. 15. III.° Caso. *Dati due lati* a, b, *e l'angolo compreso C, trovare* A, B, c.

1.ª *Soluzione*. Combiniamo le lettere indicanti gli elementi dati con ciascuna di quelle che dinotano gli elementi incogniti, e scegliamo tra le formole (*b*) le due che contengono rispettivamente le lettere *abC A*, *abC B*, e tra le formole (*c*) quella che contiene le lettere *abC c*. Si avrà

$$\cos C = \frac{b}{a} - \cot A \operatorname{sen} C, \text{ da cui, } \cot A = \frac{b - a\cos C}{a \operatorname{sen} C}$$

$$\cos C = \frac{a}{b} - \cot B \operatorname{sen} C, \text{ da cui, } \cot B = \frac{a - b\cos C}{b \operatorname{sen} C}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \text{ dalla quale, } c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}.$$

Queste formole danno la risoluzione algebrica del triangolo, ma non vi si possono applicare con vantaggio i logaritmi. Proponiamoci di modificarle per calcolare comodamente gli elementi *A*, *c*.

Pongasi, $a \cos C = m$, e sarà

$$\cot A = \frac{b-m}{a \operatorname{sen} C}, \text{ ovvero, } \tan A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b-m}.$$

Per introdurre l'angolo A nel valore del lato c, riflettiamo che

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C} = \sqrt{(b-a\cos C)^2+a^2-a^2\cos^2 C}$$
$$= \sqrt{(b-a\cos C)^2+a^2 \operatorname{sen}^2 C};$$

ed essendo $a \cos C = m$, ed $a \operatorname{sen} C = (b-m)\tan A$, si avrà

$$c = \sqrt{(b-m)^2(1+\tan^2 A)} = (b-m)\operatorname{seg} A = \frac{b-m}{\cos A}.$$

Le formole che danno i valori degli elementi A, c, saranno dunque

$$m = a \cos C,\ \tan A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b-m},\ c = \frac{b-m}{\cos A}.$$

Le quali sono pregevoli specialmente perchè possono usarsi con utilità nel caso in cui l'angolo compreso è grandissimo e quasi uguale a due retti, oppure quando uno de' due lati dati è piccolissimo rispetto all'altro. Parlando delle operazioni geodetiche troveremo delle serie adattate allo stesso oggetto. Giova intanto osservare che questa soluzione corrisponde allo spezzamento del triangolo obliquangolo in due triangoli rettangoli. Sia ABC [*fig.* 2.] il triangolo da risolversi in cui sono dati i lati BC, CA e l'angolo C; abbassando dal vertice B la perpendicolare BD sulla base CA, nel triangolo rettangolo CBD sarà, $CD = CB \cos C = a \cos C = m$, e $BD = a \operatorname{sen} C$. Quindi $DA = CA - CD = b - m$, e nel triangolo rettangolo BDA si avrà, $\tan A = \frac{BD}{DA} = \frac{a \operatorname{sen} C}{b-m}$. Finalmente lo stesso triangolo BDA darà, $\cos A = \frac{DA}{BA} = \frac{b-m}{c}$, $c = \frac{b-m}{\cos A}$.

Se in vece di esser dati i lati a, b fossero conosciuti i loro logaritmi, come avviene quasi sempre ne' calcoli geodetici, sarebbe preferibile il seguente andamento. Si ha già l'equazione,

$$\tan A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b - a\cos C} \text{ ovvero, } \tan A = \frac{\frac{a}{b}\operatorname{sen} C}{1-\frac{a}{b}\cos C};$$

Si faccia, $\frac{a}{b}\operatorname{sen} C = \tan \varphi$, dinotando con φ un angolo da determinarsi per mezzo di questa relazione, il quale suol chiamarsi *angolo ausiliare*. Sarà, $\frac{a}{b}\cos C = \frac{a}{b}\operatorname{sen} C . \frac{\cos C}{\operatorname{sen} C} = \tan \varphi \cot C$,

e quindi

$$\tan A = \frac{\tan\varphi}{1-\tan\varphi\cot C} = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} : \frac{\text{sen}\,C\cos\varphi - \text{sen}\,\varphi\cos C}{\text{sen}\,C\cos\varphi},$$

$$\tan A = \frac{\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,(C-\varphi)}.$$

Ottenuto in tal modo l'angolo A, il terzo lato c si determinerà per mezzo delle equazioni fondamentali. Le formole che risolvono il triangolo saranno dunque,

$$\tan\varphi = \frac{a}{b}\,\text{sen}\,C,\ \tan A = \frac{\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,(C-\varphi)},\ c = \frac{a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}.$$

Da molti anni facciamo uso di queste formole quasi esclusivamente per risolvere il triangolo con due lati e l'angolo compreso, avendole trovate comode nella pratica.

E per accennare come possano ottenersi per mezzo di considerazioni geometriche, si conducano BE parallela, ed AE perpendicolare ad AC, e si unisca CE. L'angolo ECA risulterà eguale a φ, perchè $\tan ECA = \frac{AE}{AC} = \frac{BD}{AC} = \frac{a\,\text{sen}\,C}{b}$; e nel triangolo BEC, essendo $\frac{BE}{BC} = \frac{\text{sen}\,BCE}{\text{sen}\,BEC}$, sarà, $BE = \frac{a\,\text{sen}\,(C-\varphi)}{\text{sen}\,\varphi}$, e quindi, $\tan A = \frac{BD}{DA} = \frac{BD}{BE} = \frac{\text{sen}\,C\,\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,(C-\varphi)}$.

§. 16. 2.ª *Soluzione.* Dalla proporzione (n) [§. 12] si desume

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}C,$$ che servirà a calcolare l'arco $\frac{1}{2}(A-B)$; conoscendosi poi l'angolo C, e quindi $180°-C = A+B$, sarà noto anche $\frac{1}{2}(A+B)$, e de'due angoli A, B il maggiore A si otterrà aggiungendo la semisomma alla semidifferenza, ed il minore togliendo questa da quella. Sarà cioè,

$$A = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B),\ B = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Il terzo lato c si calcolerà per mezzo delle formole fondamentali, o più brevemente con la formola

$$c = (a-b)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)};$$ che si deduce immediatamente dalle (m) del §. 12.

Ma qui ancora, se in vece di esser conosciuti i lati fossero noti i loro logaritmi, converrebbe meglio la seguente modificazione. Abbiamo

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}C=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}\cot\tfrac{1}{2}C.$$ E ponendo $\frac{a}{b}=\tan\varphi$,

sarà

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\tan\varphi-1}{\tan\varphi+1}\cot\tfrac{1}{2}C=\tan(\varphi-45^\circ)\cot\tfrac{1}{2}C\ (\S.\ 5).$$

Per determinare la semidifferenza $\frac{1}{2}(A-B)$ de' due angoli incogniti, si applicheranno dunque le due formole,

$\tan\varphi=\frac{a}{b}$, $\tan\frac{1}{2}(A-B)=\tan(\varphi-45^\circ)\cot\frac{1}{2}C$; e dopo aver ottenuto gli angoli A, B nel modo indicato, il terzo lato c si calcolerà con la formola $c=\frac{a\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,A}$.

§. 17. IV. Caso. *Dati due lati* a, b *e l'angolo* A *opposto ad uno di essi, trovare* B, C, c.

La scelta delle formole che risolvono il problema si regolerà come nel caso precedente combinando le lettere indicanti gli elementi dati con ciascuna di quelle che dinotano gli elementi incogniti. Il primo sistema di formole (a) darà fra le lettere $abA\ B$ l'equazione,

$\mathrm{sen}\,B=\frac{b\,\mathrm{sen}\,A}{a}$. Il 2.° sistema ($b$) darà fra le lettere $abA\ C$ l'altra,

$\cos C=\frac{b}{a}-\cot A\,\mathrm{sen}\,C$; ed il 3.° sistema ($c$) darà fra le lettere $abA\,c$ l'ultima,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

le quali dimostrano che in questo caso ognuno degli elementi incogniti B, C, c può avere, in generale, due valori. Primieramente l'angolo B, essendo determinato per mezzo di un seno, può essere acuto ed ottuso, poichè si sa che un angolo qualunque ed il suo supplemento hanno lo stesso seno col medesimo segno; inoltre, se nella seconda equazione si sostituisca a sen C il radicale $\sqrt{1-\cos^2 C}$, essa monterà al secondo grado, e darà anche due valori per $\cos C$; ed in fine la terza equazione è completa di 2.° grado rispetto al lato incognito c. Risolvendo queste

due ultime equazioni si avranno le espressioni degli elementi C, c in funzione de' dati che, insieme all'espressione ottenuta per sen B, danno la risoluzione algebrica del triangolo. Ma le formole cui si perviene sono molto complicate, onde è preferibile nel caso attuale l'applicazione delle equazioni fondamentali anche alla determinazione degli elementi C, c; sarà così

$$C = 180° - (A + B), \; c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

§. 18. Rimane ora a discutersi l'ambiguità che si manifesta nelle formole. Risolviamo l'equazione di 2.° grado che determina direttamente il terzo lato c, ed avremo

$c^2 - 2bc \cos A = a^2 - b^2$, da cui

$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 (1 - \cos^2 A)}$, ovvero

$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}$.

Sarà facile costruire questo doppio valore di c. Si faccia un angolo CAN [*fig.* 3] eguale al dato angolo A del triangolo, e si prenda CA eguale al lato dato b. Indi col centro C ed un intervallo CB eguale all'altro lato a si descriva una circonferenza di cerchio mn la quale, generalmente parlando, taglierà la retta AN ne' due punti B, B'; dico che le rette AB, AB' così determinate corrispondono ai due valori analitici del lato incognito c. Imperocchè, unendo le rette CB, CB' ed abbassando la perpendicolare CD, che dividerà in parti eguali la corda BB' del cerchio, il triangolo rettangolo ACD in cui l'ipotenusa è eguale a b, e l'angolo $CAD = A$, darà $CD = b \operatorname{sen} A$, $AD = b \cos A$; e nell'altro triangolo rettangolo BCD essendo

$BD = \sqrt{(BC)^2 - (CD)^2}$, sarà

$BD = \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}$. Si sostituiscano nel doppio valore di c le quantità geometriche alle espressioni analitiche corrispondenti, e si avrà

$c = AD \pm BD$, ovvero

$$c = \begin{cases} AD + DB' = AB' \\ AD - BD = AB. \end{cases}$$

Questi due valori del lato c cui corrispondono i due triangoli ACB', ACB, indicano che il problema può esser risoluto in due modi, vale a dire, *con gli stessi elementi dati* a, b, A *possono formarsi due triangoli differenti* ACB, ACB'.

§. 19. Ma in molti casi particolari le *due soluzioni* si riducono ad una sola, e qualche volta non ve n'è alcuna, ossia il problema è impossibile.

Sono in fatti da rifiutarsi le supposizioni che darebbero per c un valore negativo, perchè *nella trigonometria si cerca il valore assoluto degli elementi del triangolo, e non già la loro posizione*. Laonde vi saranno due soluzioni quando $BD < AD$, e ve ne sarà una sola,

1.° *quando* $BD = AD$, perchè il secondo valore di c si annulla,
2.° *quando* $BD > AD$, perchè quel valore diviene negativo,
3.° *quando* $BD = 0$, perchè i due valori di c si confondono in un solo.

E poichè le precedenti relazioni fra BD ed AD corrispondono ad altrettante diverse posizioni delle oblique BC, AC rispetto alla perpendicolare CD, si potrà conchiudere che

1.° *quando* $a < b$ *vi sono due soluzioni*
2.° *quando* $a = b$ ...... *una soluzione*
3.° *quando* $a > b$ ...... *una soluzione.*

Nell'ipotesi di $BD = 0$ i punti B, D si confondono, e quindi il triangolo proposto ABC si cambia nel triangolo rettangolo ACD, ed il lato a nella perpendicolare CD. Ciò apparisce anche dal valore analitico di c, perchè quando $BD = 0$, si ha $\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} = 0$, e quindi $a = b \operatorname{sen} A = CD$. Se poi fosse a minore di CD, o sia di $b \operatorname{sen} A$, il radicale divenendo immaginario e con esso anche il valore di c, non vi sarebbe alcuna soluzione; siccome si vede ancora dalla figura, non potendo fra tutte le rette condotte dal punto C a qualche punto della AN esservene alcuna minore della perpendicolare. Aggiungeremo dunque ai precedenti criterii i due altri qui appresso.

4.° *quando* $a = b \operatorname{sen} A = CD$......... *una soluzione*
5.° *quando* $a < b \operatorname{sen} A$, o sia $< CD$... *nessuna soluzione.*

Finalmente se l'angolo A fosse retto od ottuso, vi sarebbe una soluzione soltanto, ma questi due casi sono compresi nel 3.° criterio, perchè è noto dalla Geometria che allora deve essere necessariamente $a > b$, e senza questa condizione i dati sarebbero assurdi; onde potrà aggiungersi per ultimo criterio

6.° *quando* $a < b$, ed $A \geqq 90.°$... *nessuna soluzione.*

§. 20. La costruzione del triangolo con due lati e l'angolo opposto eseguita nelle varie condizioni de' dati qui sopra considerate, farebbe conoscere pienamente il significato geometrico delle regole precedenti. Questo problema si trova compiutamente risoluto nelle geometrie moderne, ed in particolar modo nell'eccellente trattato del chiaris. Prof. *Carlo Rocco*, al quale rimandiamo i nostri lettori.

§. 21. Le condizioni necessarie affinchè ne' tre primi casi i dati non siano assurdi sono le seguenti.

Nel 1.° caso il lato e i due angoli dati possono essere qualunque, purchè la somma di questi ultimi sia minore di 180°.

Nel 2.° caso si ha, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, e dovendo l'angolo A essere maggiore di zero e minore di 180°, il suo coseno sarà compreso fra i limiti 1 e -1, che non potrà mai raggiungere; sarà dunque

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} < 1, \text{ e } \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > -1.$$

Da queste due disuguaglianze si desume,

$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$, e $b^2 + c^2 - a^2 > -2bc$, ovvero

$b^2 + c^2 - 2bc < a^2$, $b^2 + c^2 + 2bc > a^2$, e passando alle radici

$\pm(b - c) < a$, $b + c > a$, ovvero

$b < a + c, c < a + b$, $a < b + c$; quindi, *allorchè sono dati i tre lati, uno qualunque di essi deve essere sempre minore della somma degli altri due*, ciò che era noto altronde dalla Geometria.

Nel 3.° caso i dati possono essere qualsivogliano, poichè con due lati di qualunque lunghezza, ed un angolo compreso di qualunque grandezza si potrà sempre formare il triangolo. Questa verità apparisce ancora dalle formole che risolvono questo caso (§. 15), poichè le cotangenti che determinano gli angoli incogniti A, B possono avere qualunque valore positivo o negativo, ed il radicale $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$, che serve a calcolare il lato c non può mai divenire immaginario, come si scorge sostituendo a $\cos C$ l'espressione equivalente $1 - 2\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} C$, per cui il radicale prende la forma, $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 4ab\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} C}$, ovvero $\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} C}$.

Espressioni varie dell'aja di un triangolo rettilineo.

§. 22. La superficie di un triangolo rettilineo qualunque ABC [*fig.* 2] si ottiene moltiplicando la base AC per la metà dell'altezza BD, ma dal triangolo rettangolo CBD si ha, $BD = a\,\text{sen}\,C$, dunque, chiamando S l'aja del triangolo sarà,

$S = \tfrac{1}{2} ab\,\text{sen}\,C$.

Così potrà calcolarsi la superficie del triangolo con due lati e l'angolo compreso. Volendo esprimerla per mezzo di un lato e di due angoli, bisognerà sostituire in luogo di b il suo valore $\frac{a\,\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A}$ dedotto dalle formole fondamentali, ossia l'equivalente $\frac{a\,\text{sen}\,B}{\text{sen}(B+C)}$,

e si avrà,

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}(B+C)}.$$

Potrebbe ancora porsi $\frac{a\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A}$ in luogo di b, e $\operatorname{sen}(A+B)$ in vece di $\operatorname{sen}C$, e si avrebbe,

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}A}.$$

Finalmente è facilissimo dedurre dalla prima formola l'espressione conosciuta della superficie del triangolo in funzione de' tre lati. Poichè essendo $\operatorname{sen}C=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C$ (§. 4), se si sostituiscono a $\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$, $\cos\frac{1}{2}C$ le formole analoghe alle (p) del §. 12 si avrà,

$$S=ab\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-a)(\frac{1}{2}p-b)}{ab}}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-c)}{ab}},\ \text{ovvero}$$

$$S=\sqrt{\tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p-a)(\tfrac{1}{2}p-b)(\tfrac{1}{2}p-c)}.$$

CAPO III.

Principii generali per la risoluzione de' triangoli sferici.

Formole che danno un elemento qualunque del triangolo espresso per altri tre.

§. 23. La Trigonometria sferica ha per oggetto la *risoluzione dei triangoli sferici*, che può distinguersi in *algebrica* e *numerica*, siccome si è detto di sopra (§. 9).

Ne' triangoli sferici, a differenza de' rettilinei, non si considera la lunghezza assoluta de' lati ma soltanto il numero di gradi che contengono, cioè il loro rapporto con la circonferenza di un cerchio massimo della sfera. Per la qual cosa la grandezza del raggio della sfera sulla quale sono disegnati i triangoli può variare a piacere, senza che il valore de' loro elementi soffra alcuna alterazione; e per comodità di calcolo potrà prendersi eguale a quello delle tavole, ossia all' unità. Per questa medesima ragione il triangolo sferico può risolversi anche quando fra i tre elementi dati non vi sia alcun lato, come si vedrà fra poco.

Ciò premesso, sia ABC [*fig.* 4] un triangolo sferico qualunque; O il centro della sfera cui appartiene. Si conduca per lo

punto A un piano tangente la superficie sferica, ed in esso siano segnate le rette AD, AE tangenti agli archi AB, AC. Si unisca il centro O della sfera co' vertici del triangolo e si prolunghino i raggi OB, OC sino ad incontrare in D, E le tangenti; si conduca la DE. Siano indicati gli angoli del triangolo sferico con le lettere A, B, C, ed i lati opposti con le lettere minuscole a, b, c.

Supponendo il raggio della sfera eguale all' unità, sarà evidentemente,

$AD = \tan AB = \tan c$, $OD = \text{seg}\, c$

$AE = \tan AC = \tan b$, $OE = \text{seg}\, b$.

Il triangolo ODE, di cui l'angolo $O = BC = a$ darà, per la proprietà del triangolo rettilineo dimostrata al §. 11,

$(DE)^2 = (OE)^2 + (OD)^2 - 2OE \times OD \cos a$,

ed il triangolo ADE, di cui l'angolo $EAD = A$, darà similmente

$(DE)^2 = (AE)^2 + (AD)^2 - 2AE \times AD \cos A$.

Sottraendo questa equazione dalla precedente si avrà

$$o = (OE)^2 - (AE)^2 + (OD)^2 - (AD)^2 - 2OE \times OD \cos a + 2AE \times AD \cos A,$$

ovvero

$$o = \text{seg}^2 b - \tan^2 b + \text{seg}^2 c - \tan^2 c - 2 \,\text{seg}\, b \,\text{seg}\, c \cos a + 2 \tan b \tan c \cos A$$

ma, in generale, $\text{seg}^2 - \tan^2 = 1$ (§. 2), dunque

$o = 1 + 1 - 2 \,\text{seg}\, b \,\text{seg}\, c \cos a + 2 \tan b \tan c \cos A$.

Dividendo per 2 ed esprimendo le seganti e le tangenti per seni e coseni sarà,

$$o = 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}{\cos b \cos c} \cos A \text{; ed in fine}$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c} \ldots\ldots\ldots (1).$$

*§. 24. Questa dimostrazione semplicissima del teorema fondamentale della Trigonometria sferica è del Signor *de Gua*, ed è stata poi adottata dal celebre *Lagrange* e da altri insigni geometri ne' loro trattati di Trigonometria. Ma a primo aspetto essa sembra non potersi applicare a tutti i casi, poichè la costruzione da cui dipende esige che i due lati b, c siano minori di un quadrante, altrimenti il raggio prolungato o non incontra la tangente, o l'incontra dalla parte opposta. Sarà facile però mostrare che la formola (1) è esatta in qualunque ipotesi.

Se il triangolo ABC avesse un lato $AB = 90^\circ$ [*fig.* 5], compito il triangolo birettangolo ABD, la costruzione del Signor *de Gua* potrebbe applicarsi all' angolo D del triangolo BCD, in cui il lato $BC = a$, $CD = 90^\circ - b$, $BD = A$, e l'angolo $D = 90^\circ$; e per questi valori particolari si avrebbe, $\cos a = \cos A \,\text{sen}\, b$, la quale uguaglianza si ottiene appunto dalla formola (1) in cui si faccia $c = 90^\circ$.

Se oltre ad essere $AB = 90°$, si verificasse l'angolo BAC' eguale o maggiore di $90°$, nella prima supposizione il triangolo sarebbe birettangolo, e nella seconda si potrebbe, in vece del triangolo proposto ABC', considerare il suo complemento al fuso sferico $BACb$, cioè il triangolo $C'Ab$ che si troverebbe nelle stesse condizioni del triangolo ABC esaminato poc' anzi.

Se ciascuno de' due lati AB, AC fosse di $90°$, il triangolo sarebbe birettangolo, e si sa che allora il terzo angolo A è misurato dal lato opposto a. Questa medesima conseguenza si deduce dalla formola (1), poichè ponendo in essa $b = c = 90°$ si ottiene $\cos A = \cos a$.

Verificandosi un lato $AB = 90°$ ed un lato $AC'' > 90°$, la costruzione del *de Gua* potrebbe applicarsi al triangolo BDC'' rettangolo in D.

Nel caso poi che un lato AB' fosse $> 90°$ e l'altro AC fosse $< 90°$, compito il fuso sferico $B'ACb'$, la costruzione potrebbe applicarsi all'angolo A del triangolo complemento CAb'; ed in fine se ambedue i lati AB', AC'' fossero maggiori di $90°$, dovrebbe considerarsi il triangolo $B'C''A'$ complemento del proposto $AB'C''$ al fuso sferico AA'. In tutte queste supposizioni il triangolo sul quale si esegue la costruzione giustifica sempre l'esattezza della formola (1).

Le costruzioni geometriche dalle quali *Eulero*, *Legendre*, *Lacroix* ed altri desumono lo stesso teorema fondamentale se non vanno soggette a simili difficoltà, richieggono particolari avvertenze nelle diverse condizioni de' dati. Ma dai principii generali della geometria analitica dovendo dedursi una dimostrazione indipendente da qualunque costruzione geometrica, noi ne abbiamo data una abbastanza semplice, nella prima edizione di questa Trigonometria pubblicata nel 1839.

§. 25. Se a ciascuno de' rimanenti angoli B, C del triangolo sferico ABC si applicherà un ragionamento analogo a quello del §. 23 relativo all' angolo A, si otterranno le altre due equazioni

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

le quali possono anche dedursi immediatamente dalla equazione (1) mutando A in B, ovvero in C, e scambiando nello stesso tempo fra loro i lati a, b, ovvero li a, c; e tutte sono l'espressione analitica del teorema: *in ogni triangolo sferico il coseno di un angolo è eguale alla differenza fra il coseno del lato opposto ed il prodotto de' coseni degli altri due lati divisa per il prodotto de' seni degli stessi lati.*

Le equazioni (1), (2), (3) dedotte da un principio unico, con-

tengono tutti i sei elementi del triangolo sferico, e potranno servire a risolvere compiutamente il problema generale della Trigonometria sferica, *dati tre qualunque de' sei elementi di un triangolo, determinare gli altri tre;* poichè considerati questi ultimi come tre incognite, i loro valori sono sempre determinati per mezzo di tre equazioni. Non si tratta se non di eseguire l'eliminazione.

§. 26. Prendiamo due delle equazioni fondamentali; per esempio,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \quad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c},$$

ed osserveremo che esse contengono cinque elementi del triangolo sferico, cioè i tre lati e due angoli, per cui, volendo dedurne una relazione fra due angoli A, B, e i due lati opposti a, b, bisognerà combinarle in modo da farne sparire il terzo lato c.

Si cerchi di ottenere dalla prima il valore di $\operatorname{sen}^2 A$, ed a tal fine si elevino a quadrato i due membri e si sottraggano dall'unità. Si avrà

$$1 - \cos^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}, \text{ ovvero}$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}.$$

Nel numeratore della frazione si sostituisca a $\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c$ il prodotto equivalente $(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c)$ e sviluppando e riducendo si otterrà,

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}.$$

Si divida l'equazione per $\operatorname{sen}^2 a$ ad oggetto di rendere il secondo membro una funzione simmetrica rispetto ad a, b, c; sarà

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c} = F.$$

Eseguite le stesse operazioni sulla seconda equazione fondamentale, si avrà, $\frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b} = F$; il che appariva ancora dalla forma della funzione F, la quale non varia mutando a in b, laddove la frazione equivalente $\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a}$ diviene $\frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b}$.

Si conchiuderà dunque che, $\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b}$, e quindi

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}, \text{ ovvero } \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \; \ldots . \; (4)$$

la quale uguaglianza, che non contiene più il lato c è la *relazione* domandata *fra due angoli del triangolo sferico e due lati ad essi opposti.*

Combinando le formole (1) e (3), o le (2), e (3) si dimostrerà similmente,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c},\ \textit{ovvero}\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \ldots\ldots(5),\ \text{e}$$

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c},\ \textit{ovvero}\ \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c=\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C \ldots(6);$$

ma le formole (5), (6) potevano anche dedursi dalla (4) mutando l'angolo B in C ed il lato b in c, o pure l'angolo A in C ed il lato a in c.

Le equazioni (4), (5), (6) dimostrano che, *in ogni triangolo sferico i seni degli angoli stanno fra loro come i seni de' lati opposti.*

§. 27. Cerchiamo inoltre una relazione fra gli elementi A, B, a, c; per ottenerla dalle equazioni (1) e (2), si dovrà eliminarne il lato b. Sarà

$$\cos b=\frac{\cos a-\cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{\cos c},$$

$$\cos b=\cos B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c+\cos a \cos c, \text{ onde}$$

$$\cos B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos c+\cos a \cos^2 c=\cos a-\cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$$

$$\cos B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos c=(1-\cos^2 c) \cos a-\cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c.$$

Riflettendo che $1-\cos^2 c=\operatorname{sen}^2 c$, e dividendo tutto per $\operatorname{sen} c$, sarà

$$\cos B \operatorname{sen} a \cos c=\operatorname{sen} c \cos a-\cos A \operatorname{sen} b,$$

e sostituendo a $\operatorname{sen} b$ il suo valore $\dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$ dato dell' equazione (4), si avrà

$$\cos B \operatorname{sen} a \cos c=\operatorname{sen} c \cos a-\cos A \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},$$

ed in fine dividendo per $\operatorname{sen} a$,

$$\cos B \cos c=\cot a \operatorname{sen} c-\cot A \operatorname{sen} B \ldots\ldots(7).$$

Se con un simile procedimento elimineremo il lato a in vece del lato b dalle equazioni (1), (2), avremo

$$\cos A \cos c=\cot b \operatorname{sen} c-\cot B \operatorname{sen} A \ldots\ldots(8).$$

Allo stesso modo eliminando successivamente i lati b, e c dalle equazioni (2), (3), si avranno le altre due relazioni,

$$\cos B \cos a=\cot c \operatorname{sen} a-\cot C \operatorname{sen} B \ldots\ldots(9)$$

$$\cos C \cos a=\cot b \operatorname{sen} a-\cot B \operatorname{sen} C \ldots\ldots(10).$$

Ed in fine eliminando il lato a, o il lato c dalle equazioni (1), (3) si avranno le ultime due relazioni analoghe alle precedenti,

$$\cos A \cos b=\cot c \operatorname{sen} b-\cot C \operatorname{sen} A \ldots\ldots(11)$$

$$\cos C \cos b=\cot a \operatorname{sen} b-\cot A \operatorname{sen} C \ldots\ldots(12).$$

Ciascuna delle equazioni (7), (8) .... (12) esprime *una rela-*

zione fra due angoli del triangolo e due lati uno opposto e l'altro adiacente (*).

§. 28. Cerchisi finalmente *una relazione fra i tre angoli ed un lato del triangolo*, ed a tale oggetto dalle equazioni (7), (8)...(12), se ne scelgano due che contengano lo stesso angolo nel primo membro; per esempio le (7), (9)

$\cos B \cos c = \cot a \,\mathrm{sen}\, c - \cot A \,\mathrm{sen}\, B; \cos B \cos a = \cot c \,\mathrm{sen}\, a - \cot C \,\mathrm{sen}\, B.$

Siccome in queste si trovano le cinque lettere A, B, C, a, c, è chiaro che bisognerà eliminarne uno de' lati; eliminiamo c. Si pongano in luogo delle cotangenti le loro equivalenti espressioni in seni e coseni, e moltiplicando la prima equazione per $\mathrm{sen} A$, e la seconda per $\mathrm{sen} C$, si avrà,

$$\cos B \cos c \,\mathrm{sen} A = \frac{\cos a \,\mathrm{sen}\, c \,\mathrm{sen} A}{\mathrm{sen}\, a} - \cos A \,\mathrm{sen} B,$$

$$\cos B \cos a \,\mathrm{sen} C = \frac{\cos c \,\mathrm{sen}\, a \,\mathrm{sen} C}{\mathrm{sen}\, c} - \cos C \,\mathrm{sen} B;$$

ma per l'equazione (5), $\dfrac{\mathrm{sen}\, c \,\mathrm{sen} A}{\mathrm{sen}\, a} = \mathrm{sen} C$, e $\dfrac{\mathrm{sen}\, a \,\mathrm{sen} C}{\mathrm{sen}\, c} = \mathrm{sen} A$,

dunque

$$\left.\begin{array}{l} \cos B \cos c \,\mathrm{sen} A = \cos a \,\mathrm{sen} C - \cos A \,\mathrm{sen} B \\ \cos B \cos a \,\mathrm{sen} C = \cos c \,\mathrm{sen} A - \cos C \,\mathrm{sen} B \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Prendendo da queste due equazioni i valori di $\cos c$ ed eguagliandoli, si avrà

$$\cos c = \frac{\cos a \,\mathrm{sen} C - \cos A \,\mathrm{sen} B}{\cos B \,\mathrm{sen} A} = \frac{\cos B \cos a \,\mathrm{sen} C + \cos C \,\mathrm{sen} B}{\mathrm{sen} A},$$

onde

$$\cos a \,\mathrm{sen} C - \cos A \,\mathrm{sen} B = \cos^2 B \cos a \,\mathrm{sen} C + \cos C \,\mathrm{sen} B \cos B,$$

$$\cos a \,\mathrm{sen} C\,(1 - \cos^2 B) = \cos A \,\mathrm{sen} B + \cos C \,\mathrm{sen} B \cos B;$$

sostituendo $\mathrm{sen}^2 B$ ad $1 - \cos^2 B$ e dividendo per $\mathrm{sen} B$, si avrà

(*) L'equazione (7) è, fra quelle che presenta la Trigonometria sferica, una delle meno facili a ritenersi a memoria. Per riuscirvi bisogna riflettere un poco sulla sua composizione, e la seguente analisi potrebbe essere utile all'oggetto. Il primo membro dell'equazione è formato dal prodotto di due coseni, cioè di un angolo e di un lato che non si oppongono uno all'altro. Il secondo membro è la differenza di due prodotti, ciascuno de' quali di una cotangente per un seno; il prodotto positivo contiene due lati ed il negativo due angoli. La cotangente del 1.° prodotto appartiene al lato del triangolo che insieme con quello che trovasi nel primo membro dell'equazione comprende l'angolo dello stesso primo membro; ed il seno dell'indicato prodotto appartiene al lato scritto nel primo membro. La cotangente del 2.° prodotto è di un angolo che nel triangolo si oppone al lato di cui si è presa la cotangente nel 1.° prodotto, ed il seno appartiene all'angolo notato nel primo membro. Così potranno con facilità formarsi le equazioni analoghe alla (7).

$\cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \cos A + \cos B \cos C$, e quindi

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} \ldots\ldots\ldots (13).$$

Dalle stesse equazioni (7) e (9), o dalle loro trasformate (α), eliminando a in vece di c, si avrà

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} \ldots\ldots\ldots (14).$$

E dalle (8), (11) eliminando c, si otterrà

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C} \ldots\ldots\ldots (15).$$

Le equazioni (14), (15) potevano dedursi dalla (13) cambiando a in c ovvero in b, e scambiando fra loro gli angoli A, C, o li A, B.

§. 29. Ma la formola (13) e le sue analoghe si ottengono pure con grande facilità dalle equazioni fondamentali applicate a' triangoli polari. Siano a', b', c' i lati, ed A', B', C' gli angoli del triangolo polare corrispondente al triangolo proposto ABC; l'equazione (1) applicata a quel triangolo dà,

$$\cos A' = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'},$$

e poichè, per la proprietà de' triangoli polari, $A' = 180° - a$, $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$, si avrà, introducendo questi valori, e riflettendo che $\cos(180° - a) = -\cos a$, $\cos(180° - A) = -\cos A$, etc., e $\operatorname{sen}(180° - B) = \operatorname{sen} B$, etc.

$$-\cos a = \frac{-\cos A - (-\cos B \times -\cos C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}, \text{ ovvero}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

come sopra. Similmente si otterrebbero le altre due.

Le equazioni (4) e (7) e le loro analoghe applicate a' triangoli polari non darebbero nuove relazioni, ma riprodurrebbero loro stesse, siccome potrà facilmente verificarsi.

§. 30. Riassumendo ciò che si è detto ne' §§. precedenti osserveremo che,

1.° Ciascuna delle equazioni (1), (2), (3) ... (15) esprime una relazione fra quattro elementi del triangolo sferico, e può dare il valore di un lato o di un angolo incognito per mezzo di tre altri elementi conosciuti. Così per esempio dall' equazione (1) si ha,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \text{ non meno che,}$$

$\cos a = \cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos b \cos c$;

l'equazione (4) dà, $\operatorname{sen}A = \frac{\operatorname{sen}a \operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}b}$, e $\operatorname{sen}a = \frac{\operatorname{sen}A \operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}B}$,

l'equazione (7) dà, $\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen}c - \cos B \cos c}{\operatorname{sen}B}$, e

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen}B + \cos B \cos c}{\operatorname{sen}c},$$

ed in fine dall'equazione (13) si ottengono,

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen}B \operatorname{sen}C}, \ \cos A = \cos a \operatorname{sen}B \operatorname{sen}C - \cos B \cos C.$$

2.° Il numero delle suddette equazioni corrisponde appunto a quello delle combinazioni che si possono fare in tutti i modi con le sei lettere dinotanti i lati e gli angoli del triangolo sferico prese a quattro a quattro cioè, $\frac{6.5.4.3}{2.3.4} = 15$; e siccome la risoluzione de' triangoli consiste nel determinare ciascuno de' loro elementi per mezzo di altri tre in qualunque modo presi, così le equazioni enunciate risolvono completamente i triangoli sferici.

3.° Quantunque siano quindici le combinazioni delle sei lettere a, b, c; A, B, C a quattro a quattro, pure i tre lati ed i tre angoli dovendo considerarsi come due sole classi di quantità distinte fra loro, quelle combinazioni possono ridursi a quattro essenzialmente diverse che sono,

Prima. *Tre lati ed un angolo*, la quale abbraccia le tre, *abcA*, *abcB*, *abcC*.

Seconda. *Due lati e due angoli ad essi opposti*, che comprende le tre, *abAB*, *acAC*, *bcBC*.

Terza. *Due lati e due angoli, uno opposto e l'altro adiacente*, che comprende le sei, *abAC*, *abBC*, *acAB*, *acBC*, *bcBA*, *bcCA*.

Quarta. *Tre angoli ed un lato*, che comprende le tre, *ABCa*, *ABCb*, *ABCc*.

Quattro devono dunque considerarsi le formole principali della Trigonometria sferica,

$$(\text{I}) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen}b \operatorname{sen}c},$$

$$(\text{II}) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}a} = \frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}b},$$

$$(\text{III}) \ldots\ldots\ldots \cos B \cos c = \cot a \operatorname{sen}c - \cot A \operatorname{sen}B,$$

$$(\text{IV}) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen}B \operatorname{sen}C},$$

poichè tutte le altre non sono che le medesime relazioni applicate a diverse lettere.

4.° Le quindici formole trovate di sopra esibiscono un lato

o un angolo qualunque del triangolo sferico espresso per altri tre elementi noti, e quindi possono riguardarsi come le soluzioni algebriche del triangolo stesso; ma all'infuori della formola (II) e delle sue analoghe, tutte le rimanenti sono molto incomode a calcolarsi co' logaritmi, onde dovranno cercarsi delle formole più opportune per la risoluzione numerica de' triangoli.

* §. 31. Non sarà inutile qui rivolgere per un momento l'attenzione alla notabile analogia che havvi fra le due Trigonometrie. I tre sistemi di formole (a), (b), (c) esposti ne' §. 9, 10, 11 pe' triangoli rettilinei corrispondono alle formole (II), (III), (I) e loro analoghe relative ai triangoli sferici, e la sola formola (IV) non si verifica per i triangoli piani, i quali non possono risolversi quando fra gli elementi dati non siavi almeno un lato. Tale corrispondenza apparirà più manifesta se le formole (a), (b), (c) si dedurranno dalle sferiche considerando, come è permesso, il triangolo rettilineo descritto sulla sfera di raggio *uno* con lati infinitamente piccoli. In questa supposizione gli angoli rimarranno quali sono, ma i lati potranno trascurarsi rispetto alle quantità finite e i termini di 2.° ordine rispetto a quei di 1.° etc., secondo le regole del calcolo infinitesimale. Laonde nella formola (I), sostituendo ai seni ed ai coseni de' lati i loro sviluppi in serie (§. 8), si avrà

$$\cos A = \frac{1-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{24}a^4 \ldots -(1-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{24}b^4\ldots)(1-\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{24}c^4\ldots)}{(b-\frac{1}{6}b^3 \text{ etc.})(c-\frac{1}{6}c^3 \text{ etc.})},$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)-\frac{1}{24}(b^4+c^4-a^4) \text{ etc.}}{bc-\frac{1}{6}bc(b^2+c^2) \text{ etc.}},$$

e trascurando i termini del 4.° ordine rispetto a quelli del 2.° sarà,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

La formola (II) si cambia immediatamente nella (a) ponendo in vece di $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} b$, i loro sviluppi in serie e trascurando i termini di 3.° ordine nella loro somma con quelli di 1.°

La formola (III), riflettendo che $\cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$, e sviluppando in serie, diviene

$$\cos B(1-\tfrac{1}{2}c^2\ldots)(a-\tfrac{1}{6}a^3\ldots) = (1-\tfrac{1}{2}a^2\ldots)(c-\tfrac{1}{6}c^3\ldots) - \cot A \operatorname{sen} B(a-\tfrac{1}{6}a^3\ldots)$$

ovvero, eseguendo le moltiplicazioni, e trascurando i termini degli ordini superiori al primo,

$$\cos B = \frac{c}{a} - \cot A \operatorname{sen} B,$$ che è una delle formole (b).

Finalmente la formola (IV) si cambia in

$$1-\tfrac{1}{2}a^2+\text{etc.}=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C},$$

dove le potenze del lato a essendo trascurabili rispetto al raggio devono cancellarsi, e sparisce così l'elemento incognito da determinarsi. Risulta quindi evidente l'impossibilità di risolvere il triangolo rettilineo con i tre angoli soltanto, e l'equazione,

$1=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$, alla quale si perviene, esprime una condizione cui debbono soddisfare gli elementi dati A, B, C. In fatti, togliendo il denominatore, si avrà

$\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C=\cos A+\cos B\cos C$,

$\cos A=-(\cos B\cos C-\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C)$, ovvero,

$\cos A=-\cos(B+C)$, da cui si deduce $A=180^\circ-(B+C)$; cioè la somma degli angoli dati deve essere eguale a due retti.

La precedente analisi ci conferma che tre sono le formole principali della Trigonometria rettilinea, come quattro sono quelle della sferica. Il sistema di formole (b), di cui generalmente non si fa uso, quantunque non sia essenzialmente necessario nella risoluzione numerica de' triangoli rettilinei, è indispensabile per la loro risoluzione algebrica, e completa il quadro analitico della scienza.

§. 32. Le formole precedenti essendo generali possono applicarsi a qualunque caso particolare in cui un angolo o un lato del triangolo sferico abbia un valore determinato. Facciasi $A=90^\circ$ e si avrà il caso del triangolo rettangolo; e poichè allora $\operatorname{sen}A=1$, $\cos A=0$, $\cot A=0$, si otterrà, dalla formola (1),

$o=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$, ovvero.........$\cos a=\cos b\cos c$;

dalla (4) e dalle sue analoghe,

$\frac{1}{\operatorname{sen}a}=\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}b}$, ed $\frac{1}{\operatorname{sen}a}=\frac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}c}$, e quindi, $\operatorname{sen}a=\frac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}B}=\frac{\operatorname{sen}c}{\operatorname{sen}C}$;

dalla (7), $\cos B\cos c=\cot a\operatorname{sen}c$, ovvero...$\cot a=\cot c\cos B$;

dalla (8), $o=\cot b\operatorname{sen}c-\cot B$, da cui....$\operatorname{sen}c=\frac{\cot B}{\cot b}=\frac{\tan b}{\tan B}$;

dalla (11), $o=\cot c\operatorname{sen}b-\cot C$, onde.... $\operatorname{sen}b=\frac{\tan c}{\tan C}$;

dalla (12), $\cos C\cos b=\cot a\operatorname{sen}b$, e quindi, $\cot a=\cot b\cos C$;

dalla (13), $\cos a=\frac{\cos B\cos C}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$, ovvero .... $\cos a=\cot B\cot C$;

dalla (14), $\cos c=\frac{\cos C}{\operatorname{sen}B}$, onde .... $\operatorname{sen}B=\frac{\cos C}{\cos c}$;

e per ultimo dalla (15), $\cos b=\frac{\cos B}{\operatorname{sen}C}$, ovvero $\operatorname{sen}C=\frac{\cos B}{\cos b}$.

* Qui si potrebbe domandare se le formole generali (2), (3), (9), (10) nelle quali non entra l'angolo retto A, trattate convenientemente, darebbero altre relazioni diverse dalle precedenti fra tre elementi del triangolo rettangolo, ma sarà facile persuadersi che ciò non può accadere; poichè introducendo nelle formole suddette alcuna delle relazioni spettanti al triangolo rettangolo si ricade subito in una delle altre. Per esempio la relazione $\cot a = \cot b \cos C = \cot c \cos B$ si potrà ottenere da ciascuna delle quattro formole indicate ponendo $\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$ nella (2), $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$ nella (3), $\cot C = \frac{\cos a}{\cot B}$ nella (9) e $\cot B = \frac{\cos a}{\cot C}$ nella (10).

Combinando poi le formole fra tre elementi, se ne potrebbero dedurre varie fra quattro elementi del triangolo rettangolo. Le più rimarcabili sono,

$$\cos b \cos c = \cot B \cot C, \quad \frac{\cot b}{\cot c} = \frac{\cos B}{\cos C}.$$

Con un simile procedimento si modificheranno le formole generali nel caso del triangolo *rettilatero*, cioè nell'ipotesi di un lato $a = 90°$. Le formole che ne risultano hanno un aspetto al tutto conforme a quelle del triangolo rettangolo, perchè questo triangolo ed il rettilatero sono *polari* uno dell'altro.

* §. 33. Supponiamo ancora che il lato a sia eguale a b, cioè che il triangolo sferico sia isoscele. Dalla formola fondamentale $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$ si avrà, $\cos A = \frac{\cos a\,(1 - \cos c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} = \cot a \times \tan \frac{1}{2} c$ (§. 4); e similmente sarà $\cos B = \cot a \tan \frac{1}{2} c$, per cui $\cos A = \cos B$, ed $A = B$, ciò che altronde era noto dalla Geometria. Per essere poi $A = B$, l'equazione $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$ darà pure $\cos a = \frac{\cos A\,(1 + \cos C)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C} = \cot A \cot \frac{1}{2} C$.

Inoltre la formola $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$ si cambierà in $\cos C = \frac{\cos c - \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}$ da cui, $\cos C \operatorname{sen}^2 a = \cos c - 1 + \operatorname{sen}^2 a$; e sostituendo ai coseni le espressioni equivalenti in archi metà, avremo $\operatorname{sen}^2 a\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c - 1 + \operatorname{sen}^2 a$, e riducendo sarà $2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C \operatorname{sen}^2 a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$, onde $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \operatorname{sen} \frac{1}{2} c$.

La formola $\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$ trattata similmente darà

$\mathrm{sen}A\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}C$; dimodochè le formole che risolvono il triangolo isoscele, cioè quelle che servono a determinare due dei quattro elementi A, a, C, c, quando sono dati gli altri due, saranno

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = \cot a \tan\frac{1}{2}c \\ \cos a = \cot A \cot\frac{1}{2}C \\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}c = \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}C \\ \cos\frac{1}{2}C = \mathrm{sen}A\cos\frac{1}{2}c\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(\mathrm{V})$$

Se nelle formole generali si ponesse $b = 180^\circ - a$, e quindi $\mathrm{sen}b = \mathrm{sen}a$, e $\cos b = -\cos a$, con un andamento simile al precedente si otterrebbero le seguenti formole per la risoluzione del triangolo di cui due lati presi insieme eguagliano 180°.

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = \cot a \cot\frac{1}{2}c \\ \cos a = \cot A \tan\frac{1}{2}C \\ \cos\frac{1}{2}c = \mathrm{sen}\,a\cos\frac{1}{2}C \\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}C = \mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}c\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(\mathrm{V}')$$

§. 34. Dalle formole del triangolo rettangolo possono dedursi alcune conseguenze importanti.

Premettiamo che due archi o due angoli diconsi ***della stessa specie*** quando sono ambedue maggiori o ambedue minori di 90°, ***e di specie diversa*** se uno è maggiore e l'altro è minore del quadrante. Inoltre, non potendo un lato o un angolo di triangolo sferico raggiungere non che superare 180°, quando uno di questi elementi è dato per mezzo del suo seno, la sua *specie* rimane indeterminata, ossia non può conoscersi se quell'elemento appartenga al primo o al secondo quadrante, giacchè lo stesso seno può convenire ad un angolo acuto ed all'ottuso che n'è supplemento. Così non avviene se l'elemento è dato per mezzo di un coseno, di una tangente, o di una cotangente, poichè queste linee trigonometriche cambiano di segno nel secondo quadrante, per cui il lato o l'angolo da determinarsi sarà acuto se il segno del coseno, della tangente o della cotangente è positivo, ed ottuso se è negativo.

Ciò posto, prendendo a considerare l'equazione, $\cos a = \cos b \cos c$, siccome il segno del primo membro dev'essere lo stesso di quello del secondo, si vede che $\cos a$ è positivo quando $\cos b$, $\cos c$, sono dello stesso segno, ossia quando gli archi b, c sono ambedue minori o ambedue maggiori di 90°; e $\cos a$ è negativo se $\cos b$, $\cos c$ sono di segno contrario, cioè se gli archi b, c sono uno minore e l'altro maggiore di 90°. Per esempio, se si abbia $b = 110^\circ$, $c = 95^\circ$, i coseni di questi due archi saranno ambedue negativi ed il loro prodotto positivo, onde $\cos a$ sarà positivo; viceversa se $b = 110^\circ$, $c = 81^\circ$, il coseno di b sarà negativo e quello di c positivo, ed il loro prodotto risulterà negativo, per

cui negativo sarà il coseno dell'ipotenusa. Ma il coseno positivo appartiene ad un angolo acuto ed il negativo ad un angolo ottuso, dunque potrà conchiudersi che, *nel triangolo* RETTANGOLO *sferico l'ipotenusa è minore del quadrante se i due cateti sono della stessa specie, ed è maggiore del quadrante se sono di specie diversa*. Un simile ragionamento sulla formola, $\cos a = \cot B \cot C$ proverà che, *l'ipotenusa è minore o maggiore del quadrante se gli angoli obliqui sono della stessa specie o di specie diversa.*

* Nei triangoli sferici rettangoli l'ipotenusa non è dunque sempre maggiore di un cateto, come ne' triangoli rettilinei, ma può essere anche minore. Anzi il cateto, cioè la perpendicolare che da un punto qualunque della superficie sferica si abbassa sulla circonferenza di un cerchio massimo, può essere il minimo di tutti gli archi che dal punto stesso si conducono ai diversi punti di quella circonferenza, e può essere anche il massimo. In fatti nella formola, $\cos a = \cos b \cos c$, considerando b come perpendicolare, ed a come obliqua all'arco c, il valore numerico di $\cos a$, prodotto di due coseni, è sempre minore di uno di essi $\cos b$; e quindi, se $b < 90^\circ$, qualunque sia c, sarà sempre $a > b$, e se $b > 90^\circ$, sarà sempre $a < b$, cioè nel primo caso la perpendicolare sarà minima e nel secondo sarà massima. *

Dalla formola $\cot a = \cot b \cos C$ si ha, $\cos C = \frac{\cot a}{\cot b}$; ed in questa equazione è da osservare che $\cot a$ deve avere lo stesso segno di $\cot b$, se $\cos C$ è positivo, e diverso segno se $\cos C$ è negativo; ciò che in generale significa che, *l'ipotenusa ed un cateto sono della stessa specie se l'angolo compreso è acuto, e di specie diversa se è ottuso.*

Finalmente nella formola $\operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}$, $\operatorname{sen} C$ è sempre positivo perchè appartiene ad un angolo minore di 180°, per cui $\cos B$ e $\cos b$ devono avere lo stesso segno; cioè, *in un triangolo* RETTANGOLO *sferico un cateto è sempre della stessa specie dell'angolo opposto*. Quest'ultima conseguenza è la più importante di tutte.

Formole più comode a calcolarsi co' logaritmi.

§. 85. Le formole (I) e (IV) e le loro analoghe, incomode a calcolarsi con i logaritmi, possono trasformarsi come segue.

Cominciando dalla formola, $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$, si sa che in generale, $2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos A$, e $2\cos^2 \frac{1}{2} A = 1 + \cos A$ (§. 7;)

e sostituendo a $\cos A$ il suo valore nella prima di queste due uguaglianze sarà,

$$2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A=1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}=\frac{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c-\cos a+\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}.$$

Il numeratore di quest'ultima frazione, che esprime la differenza di due coseni, si può cangiare in un prodotto mediante la formola conosciuta, $\cos q-\cos p=2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$ (§.7); per applicar la quale si farà, $q=b-c$, $p=a$, onde $\frac{p+q}{2}=\frac{a+b-c}{2}$, e $\frac{p-q}{2}=\frac{a+c-b}{2}$, ed in conseguenza,

$$\cos(b-c)-\cos a=\cos q-\cos p=2\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}.$$

Introducendo nella frazione indicata questo nuovo valore del suo numeratore, sarà

$$2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},\ \text{e quindi}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}}.$$

Rispetto alla seconda uguaglianza, $2\cos^2\tfrac{1}{2}A=1+\cos A$, si avrà

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c+\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},$$

e modificando, come sopra, il numeratore $\cos a-\cos(b+c)$, per mezzo della stessa formola generale, nella quale si dovrà porre $q=a$, $p=b+c$, si otterrà facilmente,

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}}.$$

Con un procedimento analogo la formola (IV) darà le due seguenti,

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}},$$

le quali potrebbero anche dedursi dalle precedenti con la considerazione de' triangoli polari.

Allo stesso modo si troveranno i valori di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}B$; $\operatorname{sen}\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}b$; $\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$, $\cos\frac{1}{2}C$; $\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$, $\cos\frac{1}{2}c$. Tutte queste formole sono assai più comode delle formole originarie per calcolarsi co' logaritmi, poichè ognuna di esse richiede l'uso delle sole tavole trigonometriche, e si calcola con cinque logaritmi, laddove ciascuna delle altre abbisogna delle tavole trigonometriche e di quella de' numeri, nè può calcolarsi con meno di nove logaritmi.

È da notare che il valore di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$ si presenta sotto aspetto immaginario; ma quella quantità essendo reale di sua natura è necessario, perchè cessi l'apparenza immaginaria, che qualcheduno de' fattori componenti la frazione sotto il segno radicale sia negativo. E poichè la somma degli angoli $A+B+C$ deve esser sempre maggiore di 180°, e quindi $\frac{1}{2}(A+B+C)>90°$, il coseno di quest'angolo sarà il fattore negativo che si cercava. Scomparsa in tal modo la forma immaginaria, non potrà esser riprodotta dagli altri tre fattori; per cui essendo $\operatorname{sen}B$, $\operatorname{sen}C$ ambedue positivi, dovrà esserlo ancora il fattore $\cos\frac{1}{2}(B+C-A)$. Il che dimostra che l'arco $\frac{1}{2}(B+C-A)$ è minore di 90°, e $B+C-A<180°$; cioè, *in ogni triangolo sferico, se dalla somma di due angoli si tolga il terzo, il residuo sarà sempre minore di 180°.*

* Le trasformazioni eseguite qui sopra danno origine ad un'altra osservazione importante. Moltiplicando fra loro i binomi $\cos(b-c)-\cos a$, $\cos a-\cos(b+c)$ e le loro espressioni equivalenti si ha, $[\cos(b-c)-\cos a][\cos a-\cos(b+c)]=4\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\times \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)$, onde per le formole generali del §. 6 sarà, $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\times \cos b\cos c=4\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)\times \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)=M\ \ldots.$ (K). L'eguaglianza di queste due funzioni invariabili si verifica per tutti i valori di a, b, c ed è indipendente dal triangolo sferico. In questo triangolo poi si ha, $\operatorname{sen}^2 A\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c=\operatorname{sen}^2 B\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 c=\operatorname{sen}^2 C\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b=M$, siccome apparisce dal §. 26, e si potrebbe ancora desumere dagli sviluppi precedenti moltiplicando insieme i valori di $2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$, e $2\cos^2\frac{1}{2}A$; dimodochè l'uguaglianza rimarcabile (K) potrebbe risultare dal semplice confronto delle formole dei §§. 26 e 35.

§. 36. Dalle formole trovate nel §. precedente possono dedursene alcune altre egualmente comode per la risoluzione numerica dei triangoli. Si è dimostrato,

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

Si facciano i quattro prodotti, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B$; e riflettendo che nel moltiplicare le frazioni sotto i segni radicali si ottiene sempre un fattore elevato a quadrato che si può cacciar fuori del segno, si avrà

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}},$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen}c}\cos\tfrac{1}{2}C.$$ Similmente si otterrà,

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}A=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C.$$

Si prenda la differenza e la somma de' primi due prodotti, e la somma e la differenza degli ultimi due; e poichè in generale $\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\mp\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A=\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A\mp B)$, e $\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\pm\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B=\cos\frac{1}{2}(A\mp B)$, sarà

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)-\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}c}\cos\tfrac{1}{2}C\\
\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}c}\cos\tfrac{1}{2}C\\
\cos\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C\\
\cos\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)-\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C
\end{aligned}\right\}\ldots.(A).$$

Per cambiare le somme e differenze de' seni contenute ne' secondi membri delle equazioni precedenti in altrettanti prodotti, si

applicheranno le formole generali, $\text{sen}p+\text{sen}q=2\text{sen}\frac{1}{2}(p+q)\times\cos\frac{1}{2}(p-q)$; $\text{sen}p-\text{sen}q=2\,\text{sen}\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)$, facendo $p=\frac{1}{2}(a+c-b)$, $q=\frac{1}{2}(b+c-a)$ per le prime due equazioni, e $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $q=\frac{1}{2}(a+b-c)$ per le ultime due; e sarà $\frac{1}{2}(p+q)=\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}(p-q)=\frac{1}{2}(a-b)$ per le prime, ed $\frac{1}{2}(p+q)=\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(p-q)=\frac{1}{2}c$ per le seconde. Eseguite le sostituzioni e le riduzioni opportune, avendo riguardo che, $\text{sen}c=2\,\text{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c$, si avrà

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\text{sen}\frac{1}{2}c}\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)\\
\text{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\,\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\\
\cos\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\text{sen}\frac{1}{2}C}{\text{sen}\frac{1}{2}c}\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)\\
\cos\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\text{sen}\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\,\cos\tfrac{1}{2}(a+b)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(B)\ (*).$$

Le quali eleganti formole, ottenute per diversa via da *Delambre*, e da *Gauss*, daranno con piccole riduzioni le famose analogie di *Nepero*, dividendo successivamente la prima per la terza, la seconda per la quarta, la prima per la seconda, e la terza per la quarta. Si avrà

$$\left.\begin{aligned}
\tan\tfrac{1}{2}(A-B)&=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\\
\tan\tfrac{1}{2}(A+B)&=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

$$\left.\begin{aligned}
\tan\tfrac{1}{2}(a-b)&=\tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\frac{1}{2}(A+B)}\\
\tan\tfrac{1}{2}(a+b)&=\tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(D).$$

§. 37. La precedente dimostrazione delle formole di *Nepero* dedotta dai valori del seno e del coseno della metà di un angolo,

(*) Per ritenere facilmente a memoria queste formole si rifletterà, 1.° che esse non contengono altre linee trigonometriche all'infuori di seni e coseni, 2.° che in ciascuna equazione la linea trigonometrica relativa al terzo angolo C è opposta a quella del primo membro, e simili sono sempre fra loro le linee trigonometriche relative ai lati nella stessa equazione, 3.° che al segno $-$ fra gli angoli A, B nel primo membro corrisponde sempre il *seno* ne' fattori del secondo membro che contengono i lati, ed al $+$ corrisponde il *coseno;* viceversa al *seno* del primo membro corrisponde il segno $-$ fra i lati a, b nel secondo membro, ed al *coseno* corrisponde il segno $+$.

è del Signor *Gergonne*, e non se n'è data sinora una più semplice che le comprenda tutte. La crediamo quindi preferibile alle altre dimostrazioni in cui si perviene a due formole soltanto, deducendosi le rimanenti da' triangoli polari; ed anche perchè ha il pregio di passare per le importanti relazioni (B). Che se si volesse, come per lo innanzi, star contenti a due sole formole, la dimostrazione di *Gergonne* potrebbe darle ancora con un procedimento semplice e breve; e però sotto ogni aspetto è da anteporsi alle antiche. In fatti dividendo la prima delle equazioni (A) per la seconda, e la terza per la quarta si ottiene

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)-\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)-\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)},$$

dove i secondi membri hanno la stessa forma dell' espressione $\frac{\operatorname{sen}p\mp\operatorname{sen}q}{\operatorname{sen}p\pm\operatorname{sen}q}$ equivalente al rapporto $\frac{\tan\frac{1}{2}(p\mp q)}{\tan\frac{1}{2}(p\pm q)}$, per cui ponendo nella prima uguaglianza $p=\frac{1}{2}(a+c-b)$, $q=\frac{1}{2}(b+c-a)$, e nella seconda $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $q=\frac{1}{2}(a+b-c)$, si otterranno subito le equazioni (D), le quali applicate ai triangoli polari daranno le (C).

Dalle equazioni (C) e dalle (D) si ottiene facilmente,

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}(a+b)},$$

eguaglianza rimarcabile per l'analogia che ha col teorema (n) del §. 12 riguardante il triangolo rettilineo.

§. 38. La prima e l'ultima delle formole (B) servono a dimostrare due importanti teoremi. Dalla prima si ha,

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}C},$$

dove si osserva che, essendo $\frac{1}{2}C$ minore di 90°, e quindi il suo coseno positivo, positivo deve esser sempre il secondo membro dell' equazione. Dunque nel primo membro, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)$, e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)$ devono avere lo stesso segno; e non potendo gli archi $\frac{1}{2}(a-b)$ ed $\frac{1}{2}(A-B)$ giammai raggiungere non che sorpassare 180°, i segni de' seni dipenderanno da quelli degli archi, e quindi $\frac{1}{2}(a-b)$ ed $\frac{1}{2}(A-B)$ dovranno essere positivi insieme e negativi insieme. Laonde se $a>b$, sarà $A>B$, e se $b>a$, sarà $B>A$; e viceversa se $A>B$, sarà $a>b$, e se $B>A$, sarà $b>a$; cioè *in un triangolo sferico qualunque al maggior lato si oppone il maggior angolo e viceversa*. Si può dare a questo teorema una enunciazione più generale e più comoda per le ap-

plicazioni. Se fra i lati a, b, c del triangolo sferico, sia a il massimo, b il medio, e c il minimo, è chiaro che si avrà $a>b$, $b>c$; e dal teorema dimostrato si dedurrà $A>B$, $B>C$, onde fra i tre angoli, A sarà il massimo, B il medio, e C il minimo. Viceversa se sussiste fra gli angoli A, B, C l'ordine di grandezza ora enunciato, di modo che sia $A>B$, $B>C$, sarà pure $a>b$, $b>c$, cioè sussisterà lo stesso ordine di grandezza fra i lati opposti. Dunque *in ogni triangolo sferico al maggior lato si oppone il maggior angolo, al medio il medio, ed al minimo il minimo; e viceversa.*

L'ultima delle formole (B) può scriversi così,

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C},$$

nella quale equazione, essendo il secondo membro sempre positivo, $\cos\frac{1}{2}(a+b)$, e $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ dovranno avere lo stesso segno, onde *in un triangolo sferico qualunque la semisomma di due lati e la semisomma degli angoli opposti sono sempre della stessa specie.*

Questo teorema forma parte di un altro più generale che può enunciarsi a questo modo; *se in un triangolo sferico la somma di due lati è minore, eguale o maggiore di 180°, la somma degli angoli opposti goderà della medesima proprietà, e viceversa.* Non rimane a dimostrare se non la parte riguardante l'uguaglianza. A tal fine, nelle equazioni (1), (2) si faccia, $b=180°-a$; ed essendo allora, $\operatorname{sen}b=\operatorname{sen}a$, e $\cos b=-\cos a$, si avrà

$$\cos A=\frac{\cos a+\cos a\cos c}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c},\quad \cos B=\frac{-\cos a-\cos a\cos c}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c},\ \text{e quindi}$$

$\cos B=-\cos A$, da cui risulta, $B=180°-A$.

Allo stesso modo, facendo $B=180°-A$ nelle equazioni (13), (15), si otterrà pure $b=180°-a$, e quindi se la somma di due lati eguaglia 180°, anche la somma degli angoli opposti ha lo stesso valore, e viceversa.

CAPO IV.

Risoluzione de' triangoli sferici.

Triangoli rettangoli.

§. 39. La risoluzione de' triangoli sferici in generale offre sei casi. In fatti per risolvere un triangolo dovendo conoscersi tre de' suoi elementi, le sei lettere a, b, c, A, B, C danno $\frac{6.5.4}{2.3} = 20$ combinazioni a tre a tre, che sono le seguenti:

abc
ABC
abC , *acB* , *bcA*
ABc, *ACb*, *BCa*
abA , *abB* , *acA* , *acC* , *bcB* , *bcC*
ABa, *ABb*, *ACa*, *ACc*, *BCb*, *BCc*

e siccome le combinazioni scritte nella stessa linea orizzontale esprimono un medesimo caso applicato a diverse lettere, così i casi saranno sei, cioè

1.° *Dati i tre lati*
2.° *Dati i tre angoli*
3.° *Dati due lati e l' angolo compreso*
4.° *Dati due angoli ed il lato compreso*
5.° *Dati due lati ed un angolo opposto ad uno di essi*
6.° *Dati due angoli ed un lato opposto ad uno di essi.*

Ne' triangoli rettilinei non si verifica il secondo caso come ne' triangoli sferici, ed il 4.° ed il 6.° rivengono allo stesso, perchè dati due angoli si può conchiudere il terzo; la loro risoluzione offre perciò soli quattro casi.

Per la risoluzione de' triangoli sferici rettangoli si richiede un dato di meno, essendovi per terzo dato costante l' angolo retto. I sei casi espressi di sopra, applicati al triangolo rettangolo in cui si suppone l' angolo $A = 90°$, si modificheranno come segue, avendo cura di scegliere fra le combinazioni quelle in cui si trova l' angolo A, e facendo una distinzione necessaria fra l' ipotenusa a ed i cateti b, c.

1.° Questo caso non si verifica perchè vi sarebbe un dato di più.
2.° *Dati i due angoli obliqui* B, C.
3.° *Dati i due cateti* b, c.

4.° *Dato un cateto ed un angolo adiacente ;* c , B.
5.° *Data l' ipotenusa ed un cateto ;* a , b.
6.° {*Dato un angolo obliquo e l' ipotenusa;* B , a.
Dato un cateto e l' angolo ad esso opposto; b , B.

Dal 6.° caso relativo a' triangoli sferici in generale emergono dunque pe' triangoli rettangoli due casi ben differenti fra loro, come or ora si vedrà.

§. 40. Ciò premesso, la risoluzione de' triangoli rettangoli si riduce ad applicare a' diversi casi le formole trovate nel §. 32 con piccole avvertenze. E primieramente quelle formole possono ordinarsi come segue ;

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} a = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} \ldots\ldots\ldots\ldots 1.^\circ \\ \cos a = \cos b \cos c = \cot B \cot C \ldots 2.^\circ \text{ e } 3^\circ \\ \cot a = \cot b \cos C = \cot c \cos B \ldots 4.^\circ \\ \operatorname{sen} b = \dfrac{\tan c}{\tan C},\ \operatorname{sen} c = \dfrac{\tan b}{\tan B} \ldots 5.^\circ \\ \operatorname{sen} B = \dfrac{\cos C}{\cos c},\ \operatorname{sen} C = \dfrac{\cos B}{\cos b} \ldots\ldots 6.^\circ \end{array}\right\} \ldots (VI)$$

Delle quali uguaglianze sei sono essenzialmente diverse fra loro, perchè le altre non esprimono che le stesse relazioni applicate ad una diversa combinazione di lettere ; e quindi si potrà , per ajuto della memoria , enunciarle ne' seguenti sei teoremi.

In ogni triangolo sferico rettangolo ,

1.° *Il seno dell' ipotenusa è eguale al seno di un cateto diviso pel seno dell' angolo opposto.*

2.° *Il coseno dell' ipotenusa è eguale al prodotto de' coseni dei cateti.*

3.° *Lo stesso coseno , dell' ipotenusa, eguaglia il prodotto delle cotangenti degli angoli obliqui.*

4.° *La cotangente dell' ipotenusa è eguale alla cotangente di un cateto moltiplicata per il coseno dell' angolo compreso.*

5.° *Il seno di un cateto è eguale al rapporto di due tangenti , cioè dell' altro cateto e dell' angolo ad esso opposto.*

6.° *Il seno di un angolo obliquo è eguale al rapporto di due coseni , cioè dell' altro angolo e del cateto opposto.*

Inversamente , questi teoremi serviranno a formare il quadro delle formole (VI) , che bisognerà aver presente nella risoluzione dei triangoli rettangoli.

I. Caso. *Dati i due angoli obliqui* B , C , *trovare* a , b , c.
Soluzione = Combinando gli elementi noti con ciascuno degl' incogniti , si vede che per risolvere questo caso occorrono tre equazioni contenenti rispettivamente le lettere , *BC a* , *BC b* , *BC c.*

Si cerchino nel quadro delle formole (VI), e si avrà

$\cos a = \cot B \cot C$

$\operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}$, onde, $\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$

$\operatorname{sen} B = \frac{\cos C}{\cos c}$, onde, $\cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$.

II. Caso. *Dati i due cateti* b, c, *trovare*, a, B, C.

Soluzione = Dovranno cercarsi tre equazioni fra le lettere *bc a*, *bc B*, *bc C*, e sarà,

$\cos a = \cos b \cos c$

$\operatorname{sen} c = \frac{\tan b}{\tan B} = \tan b \cot B$, onde, $\cot B = \operatorname{sen} c \cot b$,

$\operatorname{sen} b = \frac{\tan c}{\tan C} = \tan c \cot C$, e quindi, $\cot C = \operatorname{sen} b \cot c$.

III. Caso. *Dato un cateto* b *ed un angolo adiacente* C, *trovare* a, B, c.

Soluzione = Si debbono cercare tre equazioni fra le lettere *bCa*, *bCB*, *bCc*, le quali saranno,

$\cot a = \cot b \cos C$

$\operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}$, da cui, $\cos B = \operatorname{sen} C \cos b$

$\operatorname{sen} b = \frac{\tan c}{\tan C}$, da cui, $\tan c = \operatorname{sen} b \tan C$.

Ne' tre casi precedenti le quantità incognite sono determinate per mezzo di coseni, tangenti e cotangenti; e siccome queste linee trigonometriche cambiano di segno quando l'arco sorpassa il quadrante, così non vi potrà essere alcuna ambiguità sulla specie degli elementi da determinarsi. Nel 1.° caso per esempio, se il prodotto $\cot B \cot C$ riesce di segno positivo, l'ipotenusa sarà minore di 90°, e se riesce di segno negativo, l'ipotenusa sarà maggiore di 90°.

§. 41. IV. Caso. *Data l'ipotenusa* a *ed un cateto* b, *trovare* c, B, C.

Soluzione = Risolveranno il problema tre relazioni fra le lettere *ab c*, *ab B*, *ab C*, cioè

$\cos a = \cos b \cos c$, da cui, ... $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$

$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$............... $\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$

$\cot a = \cot b \cos C = \frac{\cos C}{\tan b}$; onde, $\cos C = \cot a \tan b$.

Qui l'angolo B essendo determinato da un seno può avere indistintamente due valori uno supplemento dell'altro. Ma questa ambiguità non è che apparente, perchè in forza delle osservazioni del §. 34. l'angolo B dev'essere della stessa specie del lato b dato.

V. Caso. *Data l'ipotenusa* a *ed un angolo obliquo* B, *trovare* b, c, C.

Soluzione = Dovranno cercarsi tre equazioni fra le lettere aBb, aBc, aBC, le quali saranno,

$$\operatorname{sen}a = \frac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}B}, \text{ da cui } \ldots\ldots\ldots \operatorname{sen}b = \operatorname{sen}a \operatorname{sen}B$$

$$\cot a = \cot c \cos B = \frac{\cos B}{\tan c}, \text{ onde, } \tan c = \cos B \tan a$$

$$\cos a = \cot B \cot C = \frac{\cot C}{\tan B} \ldots\ldots \cot C = \cos a \tan B.$$

La specie del cateto b determinato da un seno deve esser la stessa di quella dell'angolo dato B (§. 34).

VI. Caso. *Dati un cateto* b *ed un angolo opposto* B, *trovare* a, c, C.

Soluzione = Le tre equazioni fra le lettere bBa, bBc, bBC, saranno,

$$\operatorname{sen}a = \frac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}B}, \ \operatorname{sen}c = \frac{\tan b}{\tan B} = \tan b \cot B, \ \operatorname{sen}C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

In quest'ultimo caso tutte le incognite sono determinate per mezzo di seni, e non potendo togliersi l'ambiguità, come ne' due casi precedenti, vi saranno effettivamente *due soluzioni*; cioè potranno formarsi due diversi triangoli con gli stessi elementi B, b. In fatti, se si prolunghino l'ipotenusa BC [*fig.* 6] ed uno de' cateti BA di un triangolo rettangolo BAC sino ad incontrarsi di nuovo in D, nascerà un altro triangolo rettangolo CAD che avrà un lato CA di comune col primo e l'angolo D opposto a questo lato eguale all'angolo B opposto al lato medesimo nel primo triangolo. Questi due triangoli soddisferanno egualmente al problema in cui si suppongono dati, come nel presente caso, il lato comune b e l'angolo $B = D$ ad esso opposto.

Si avverte però che per separare i valori di a, c, C convenienti ad uno de' due triangoli da quelli che convengono all'altro, essi dovranno prendersi in modo che, in uno stesso triangolo, c sia della stessa specie di C, ed a della stessa specie di b quando $C < 90°$, e di specie diversa quando $C > 90°$ (§. 34); dimodochè i sei valori ottenuti dal calcolo delle formole saranno così distribuiti,

Per un triangolo, $c > 90°$, $C > 90°$, *ed* a *di diversa specie di* b.

Per l'altro triangolo, $c < 90°$, $C < 90°$, *ed* a *della stessa specie di* b.

Triangoli obliquangoli.

§. 42. I. Caso. *Dati i tre lati* a , b , c , *trovare i tre angoli* A , B , C.

1.ª *Soluzione* = Per trovare le formole che risolvono il problema si combineranno gli elementi noti con ciascuno degl' incogniti, e si vedrà che occorrono tre equazioni contenenti rispettivamente le lettere *abc A*, *abc B*, *abc C*, cioè *tre lati ed un angolo*, le quali appartengono tutte alla prima combinazione del §. 30, e derivano dalla formola (I). Si avrà quindi,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \quad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Ma queste formole non essendo comode per calcolarsi co' logaritmi, si adoperano in vece, nelle applicazioni numeriche, i radicali dedotti dalle medesime nel §. 35. Per renderne più semplice la forma ed il calcolo, si ponga $a+b+c=s$, e si avrà $a+b-c=a+b+c-2c=s-2c$, per cui, $\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}s-c$. Similmente sarà $\frac{1}{2}(a+c-b)=\frac{1}{2}s-b$, ed $\frac{1}{2}(b+c-a)=\frac{1}{2}s-a$; e fatte queste sostituzioni nelle formole indicate esse diverranno,

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-b)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s \operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-a)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s \operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-a)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s \operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}$$

E deve notarsi che, quantunque dalla prima, dalla terza, e dalla quinta gli elementi incogniti vengano determinati per mezzo di un seno, ciò non ostante non può esservi alcuna ambiguità sulla specie de' medesimi, perchè la metà di un angolo o di un lato di triangolo sferico è sempre minore di 90°.

2.ª *Soluzione*. Le formole precedenti si adoperano generalmente quando deve calcolarsi uno soltanto degli angoli incogniti, ma

è chiaro che riuscirebbero molto penose applicandole al calcolo di tutti tre gli angoli o pure di due; crediamo allora preferibili le seguenti.

Si dividano le espressioni di $\text{sen}\frac{1}{2}$ per quelle di $\cos\frac{1}{2}$ appartenenti alla stessa lettera, e si avranno immediatamente le altre.

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}s\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}s\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}s\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)}}.$$

E dividendo di nuovo la seconda per la prima e la terza per la prima di queste tre ultime equazioni, dopo facili riduzioni, si otterranno

$$\frac{\tan\frac{1}{2}B}{\tan\frac{1}{2}A}=\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)}{\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)},\quad \frac{\tan\frac{1}{2}C}{\tan\frac{1}{2}A}=\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)}{\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)},$$

ed introducendo le cotangenti in vece delle tangenti si avrà,

$$\frac{\cot\frac{1}{2}B}{\cot\frac{1}{2}A}=\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)},\quad \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\cot\frac{1}{2}A}=\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)};$$

le quali eleganti relazioni sono dovute al Signor *Molweide*, e si trovano dimostrate dal Signor *Puissant* con una costruzione geometrica, a pag. 93 del I tomo della sua Geodesia (2.ª edizione).

Ciò posto le formole più comode per calcolare due degli angoli incogniti o tutti tre, saranno evidentemente,

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}\frac{1}{2}s\,\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)}},$$

$$\cot\tfrac{1}{2}B=\cot\tfrac{1}{2}A\times\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)},\quad \cot\tfrac{1}{2}C=\cot\tfrac{1}{2}A\times\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)},$$

le quali danno il logaritmo cotangente della metà del secondo e del terzo angolo con la semplice addizione di tre logaritmi già trovati nel calcolare il primo.

II. Caso. *Dati i tre angoli* A, B, C, *trovare i tre lati* a, b, c.

1.ª *Soluzione* = Dovranno cercarsi tre equazioni fra le lettere $ABCa$, $ABCb$, $ABCc$, cioè *fra i tre angoli ed un lato*; le quali appartenendo alla quarta combinazione si ottengono dalla formola (IV). Si avrà,

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\text{sen}B\,\text{sen}C},\quad \cos b=\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\text{sen}A\,\text{sen}C}$$

$$\cos c=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\text{sen}A\,\text{sen}B}.$$

Ma i radicali dedotti da queste formole nel §. 35 sono più comodi per le applicazioni numeriche. Si faccia in essi, $A+B+C=S$, e sarà
$\frac{1}{2}(A+B-C)=\frac{1}{2}S-C$, $\frac{1}{2}(A+C-B)=\frac{1}{2}S-B$, ed
$\frac{1}{2}(B+C-A)=\frac{1}{2}S-A$, onde si avrà,

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-A)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2}S-A)\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2}S-A)\cos(\frac{1}{2}S-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}$$

2.ª *Soluzione* = Dalle espressioni di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$, e $\cos\frac{1}{2}$ si caveranno, come nel caso precedente, quelle delle tangenti da usarsi a preferenza quando si cercano due o tutti tre i lati incogniti. Sarà

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-A)}{\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-B)}{\cos(\frac{1}{2}S-A)\cos(\frac{1}{2}S-C)}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\cos(\frac{1}{2}S-A)\cos(\frac{1}{2}S-B)}};$$

e dividendo la seconda per la prima di queste ultime equazioni, e la terza per la prima, si avrà

$$\frac{\tan\frac{1}{2}b}{\tan\frac{1}{2}a}=\frac{\cos(\frac{1}{2}S-B)}{\cos(\frac{1}{2}S-A)},\ \frac{\tan\frac{1}{2}c}{\tan\frac{1}{2}a}=\frac{\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\cos(\frac{1}{2}S-A)}.$$

Quindi le formole più comode per calcolare i tre lati incogniti. o due di essi, saranno,

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-A)}{\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}},$$

$$\cot\tfrac{1}{2}b=\cot\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos(\frac{1}{2}S-A)}{\cos(\frac{1}{2}S-B)};\quad \cot\tfrac{1}{2}c=\cot\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos(\frac{1}{2}S-A)}{\cos(\frac{1}{2}S-C)}.$$

§.43. III. Caso. *Dati due lati* a, b *e l'angolo compreso* C, *trovare* A, B, c.

1.ª *Soluzione* = Combinando gli elementi dati con ciascuno degl'incogniti, si vede che convien cercare tre equazioni fra le lettere $abCA$, $abCB$, $abCc$. Le prime due, dovendo contenere due lati e due angoli uno opposto e l'altro adiacente, appartengono alla TERZA combinazione, e l'ultima appartiene alla PRIMA. Quindi le equazioni richieste di cui le formole (III) ed (I) offrono il modello, saranno (*),

$$\cos b \cos C = \cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C$$
$$\cos a \cos C = \cot b \operatorname{sen} a - \cot B \operatorname{sen} C$$
$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

dalle quali si ottengono subito i seguenti valori degli elementi incogniti,

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos C \cos b}{\operatorname{sen} C} \quad \ldots\ldots\ (12)$$
$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos C \cos a}{\operatorname{sen} C} \quad \ldots\ldots\ (10)$$
$$\cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C + \cos a \cos b \quad \ldots\ldots\ (3)$$

Queste formole non sono comode a calcolarsi co' logaritmi, ma eseguendo sulle medesime alcune modificazioni, se ne possono dedurre altre opportunissime per il calcolo numerico, nel caso che non si cerchino tutti tre gli elementi incogniti A, B, c.

Debba primieramente determinarsi il solo angolo A, oppure l'angolo A insieme al terzo lato c. Per cambiare in un prodotto il binomio rappresentante il numeratore del secondo membro dell'equazione (12), si ponga

$$\cot a = \cos C \cot \varphi \quad \ldots\ldots\ (a)$$

dove φ dinota un angolo da determinarsi per mezzo di questa relazione. Sarà

$$\cot A = \frac{\cos C \cot \varphi \operatorname{sen} b - \cos C \cos b}{\operatorname{sen} C},$$
$$= \frac{\cos C}{\operatorname{sen} C}\left(\frac{\cos \varphi \operatorname{sen} b - \cos b \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}\right), \text{ e quindi}$$
$$\cot A = \cot C \frac{\operatorname{sen}(b-\varphi)}{\operatorname{sen} \varphi} \quad \ldots\ldots\ (b).$$

(*) Per facilitare la scelta delle equazioni appartenenti alla III combinazione non sarà inutile avvertire che, per formare il primo membro di ciascuna di esse con la regola esposta nella nota al §. 27, delle quattro lettere che deve contenere l'equazione, si tralasceranno il lato e l'angolo ad esso opposto, e si adotteranno le due rimanenti. Per esempio, l'equazione fra i quattro elementi $abCA$ si otterrà con la regola indicata, tralasciando per la formazione del primo membro le lettere a, A, e adottando le b, C.

L'angolo A si otterrà da questa formola, avendo prima calcolato l'angolo φ mediante l'equazione (a) da cui si ottiene facilmente,

$$\tan\varphi = \cos C \tan a.$$

L'angolo φ dicesi *ausiliare* perchè col suo soccorso la formola originaria determinante l'elemento incognito si cambia in un'altra più comoda a calcolarsi co' logaritmi.

Lo stesso angolo φ può introdursi nell'equazione (3) quando insieme con l'angolo A voglia determinarsi anche il terzo lato c. Si divida l'equazione indicata per $\operatorname{sen} a$, e si sostituisca a $\cot a$ il suo valore $\cos C \cot\varphi$; si avrà,

$$\frac{\cos c}{\operatorname{sen} a} = \cos C \left\{ \operatorname{sen} b + \cot\varphi \cos b \right\} = \cos C \left\{ \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen}\varphi + \cos b \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \right\}, \text{ onde}$$

$$\cos c = \frac{\operatorname{sen} a \cos C \cos(b-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} \; . \; . \; . \; . \; (c).$$

Questa formola servirà a calcolare il lato c; ma essa può rendersi molto più semplice introducendovi l'angolo A già determinato. A tal fine si divida l'equazione (c) per la (a), e sarà

$$\frac{\cos c}{\cot A} = \operatorname{sen} C \operatorname{sen} a \cot(b-\varphi),$$

e ponendo $\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A$ in luogo di $\operatorname{sen} C \operatorname{sen} a$, come dalla formola (5), una di quelle che il Signor Delambre chiama *de' quattro seni*, si avrà, dopo alcune facili riduzioni

$$\cot c = \cos A \cot(b-\varphi).$$

Per calcolare gli elementi A, c, si adopreranno dunque le tre formole,

$$\tan\varphi = \tan a \cos C, \ \cot A = \frac{\cot C \operatorname{sen}(b-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}, \ \cot c = \cos A \cot(b-\varphi).$$

Sia in secondo luogo da determinarsi il solo lato c. Nell'equazione (3) si farà $\operatorname{sen} a \cos C = \cos a \tan\varphi$, ed eseguita la sostituzione si otterrà,

$$\cos c = \cos a \left\{ \tan\varphi \operatorname{sen} b + \cos b \right\} = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Le due formole per calcolare il lato c saranno dunque,

$\tan\varphi = \tan a \cos C$, $\cos c = \dfrac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}$, e si vede che l'angolo φ è lo stesso di quello adoperato precedentemente per determinare A, c.

2.ª *Soluzione* = Le formole di Nepero sono preferibili alle precedenti nelle applicazioni numeriche quando si cercano tutti tre gli elementi incogniti A, B, c, oppure i due angoli A, B. Questi ultimi si determinano per mezzo delle equazioni (C) (§. 36);

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

poichè tutto essendo conosciuto ne' secondi membri, si otterranno dal calcolo i valori de' due archi, $\tfrac{1}{2}(A-B)$, $\tfrac{1}{2}(A+B)$, che rappresentano la semidifferenza e la semisomma degli angoli incogniti; per cui l' angolo maggiore risulterà dall' uguaglianza, $A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)$, ed il minore dall' altra, $B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)$. Dopo aver così calcolati gli angoli A, B, si determinerà il terzo lato c con una delle rimanenti formole (D) di Nepero; per esempio

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)},$$ la quale darà

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a-b).$$

Gli autori di Trigonometria, per la maggior parte, determinano il terzo lato c mediante l'equazione de'seni, cioè $\text{sen}c=\frac{\text{sen}C\,\text{sen}a}{\text{sen}A}$, la quale, in apparenza più semplice della precedente, in realtà lo è meno, perchè i logaritmi che servono a calcolare $\tan\tfrac{1}{2}c$ appartengono ad archi già considerati nel calcolo delle due precedenti formole, e possono prepararsi con la stessa apertura di tavole che serve a trovare gli archi $\tfrac{1}{2}(A-B)$, $\tfrac{1}{2}(A+B)$, ed il seno e coseno di $\tfrac{1}{2}(a-b)$. Altronde la formola $\text{sen}c=\frac{\text{sen}C\,\text{sen}a}{\text{sen}A}$ offre due valori per l' arco c, uno supplemento dell'altro, nè la proprietà del triangolo sferico che al maggior angolo si oppone il maggior lato basta sempre a scegliere il lato che conviene al triangolo, potendo benissimo accadere che sì l' uno che l' altro valore di c occupi fra i tre lati a, b, c lo stesso luogo in ordine di grandezza che l' angolo C occupa fra i tre angoli A, B, C. Per esempio, formando un triangolo sferico co' tre lati $a=45°$, $b=55°$, $c=88°$, gli angoli risulteranno, $A=32°.56'.4'',3$; $B=39°.2'.15'',2$; $C=129°.47'.18'',7$; e supponendo conosciuti i cinque elementi a, b, A, B, C, il terzo lato c determinato per mezzo del seno presenterà i due valori, $c=88°$, $c=92°$, nè si saprà quale scegliere, perchè ognuno di essi è maggiore di ciascuno degli altri due lati, come l' angolo C è maggiore di ciascuno degli altri due angoli. In questo caso non servirà neppure all' oggetto l' altra proprietà de' triangoli sferici che la somma di due lati deve esser minore, eguale o maggiore di 180° in cor-

relazione della somma de' due angoli opposti; poichè $C+A$ è minore di 180° al pari di $C+B$, e per i lati opposti,

$$\left.\begin{matrix}88^\circ+a\\88^\circ+b\end{matrix}\right\}<180^\circ,\ \text{come pure}\ \left.\begin{matrix}92^\circ+a\\92^\circ+b\end{matrix}\right\}<180^\circ.$$

Nè hanno miglior successo le altre due proprietà che la somma di due lati presi comunque deve essere maggiore del terzo lato, e la somma dei tre lati deve esser minore di una circonferenza; perchè quelle condizioni sono adempite egualmente da ciascuno dei due valori di c. Laonde rimane sempre l'incertezza sulla specie di questo lato. Se in vece di supporre conosciuti i cinque elementi a, b, A, B, C, si supponessero dati gli altri cinque a, b, c, A, B, si potrebbe incontrare lo stesso inconveniente nel determinare il terzo angolo C per mezzo del suo seno.

IV. Caso. *Dati due angoli* A, B *ed il lato compreso* c, *trovare* a, b, C.

Per risolvere il problema dovranno cercarsi tre equazioni contenenti le lettere $ABc\,a$, $ABc\,b$, $ABc\,C$. Le prime due appartengono alla terza combinazione e l'ultima alla quarta; e, formate sul modello delle formole (III) e (IV), sono

$$\cos B \cos c = \cot a \operatorname{sen} c - \cot A \operatorname{sen} B;$$

$$\cos A \cos c = \cot b \operatorname{sen} c - \cot B \operatorname{sen} A;$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B},$$

dalle quali si ottengono i seguenti valori degli elementi richiesti,

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} B + \cos c \cos B}{\operatorname{sen} c} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} A + \cos c \cos A}{\operatorname{sen} c} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c - \cos A \cos B \ldots\ldots (14).$$

Queste soluzioni algebriche potranno, come nel precedente caso, rendersi più comode pe' logaritmi e servire utilmente quando si cerca uno de' due lati a, o un lato a ed il terzo angolo C, o finalmente il solo angolo C.

Vogliasi in primo luogo determinare il lato a. Nell'equazione (7) si faccia,

$\cot A = \cos c \tan\theta \ldots (a')$, e si avrà

$$\cot a = \frac{\cos c \tan\theta \operatorname{sen} B + \cos c \cos B}{\operatorname{sen} c},$$

$$= \frac{\cos c}{\operatorname{sen} c}\left\{\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen}\theta + \cos B \cos\theta}{\cos\theta}\right\},$$

$\cot a = \cot c \dfrac{\cos(B-\theta)}{\cos\theta} \ldots (b')$, la quale equazione servirà a calcolare il lato a dopo aver ottenuto l'angolo θ per mezzo della relazione (a') da cui si desume $\cot\theta = \cos c \tan A$.

Volendo insieme col lato a determinare anche il terzo angolo C, si divida l'equazione (14) per sen$A$, onde introdurvi l'angolo ausiliare θ, e si sostituisca a cot$A$ il suo valore, secondo la supposizione (a'); sarà

$$\frac{\cos C}{\operatorname{sen} A}=\operatorname{sen} B\cos c-\cos c\tan\theta\cos B=\cos c\left\{\frac{\operatorname{sen} B\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos B}{\cos\theta}\right\},$$

onde

$$\cos C=\frac{\operatorname{sen} A\cos c\operatorname{sen}(B-\theta)}{\cos\theta}\ldots.(c').$$

Ma può ottenersi per C un'espressione più semplice facendolo dipendere dal lato a già trovato. Si divida la formola (c') per la (b'), e si avrà

$$\frac{\cos C}{\cot a}=\operatorname{sen} A\operatorname{sen} c\tan(B-\theta),$$ e sostituendo sen$a$ sen$C$ a sen$A$ sen$c$ come dalla formola *de' quattro seni*, si otterrà dopo qualche riduzione,

$$\cot C=\cos a\tan(B-\theta).$$

Le formole che determinano a, C saranno dunque,

$$\cot\theta=\cos c\tan A,\ \cot a=\frac{\cot c\cos(B-\theta)}{\cos\theta},\ \cot C=\cos a\tan(B-\theta).$$

In fine, volendo calcolare il solo angolo C, nell'equazione (14) si farà sen$A$ cos$c$ = cos$A$ cotθ, e si avrà,

$$\cos C=\cos A(\cot\theta\operatorname{sen} B-\cos B)=\frac{\cos A\operatorname{sen}(B-\theta)}{\operatorname{sen}\theta},$$

onde le due formole per ottenere l'angolo C saranno,

$$\cot\theta=\cos c\tan A,\ \cos C=\frac{\cos A\operatorname{sen}(B-\theta)}{\operatorname{sen}\theta},$$ nelle quali l'angolo θ è lo stesso adoperato di sopra nel calcolo degli elementi a, C.

2.ª *Soluzione* = Le formole di Nepero si applicano con vantaggio a questo caso quando si vogliono determinare tutti gli elementi incogniti, oppure i due lati a, b. Questi due ultimi si ottengono dalle equazioni (D),

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

poichè ne'secondi membri tutto essendo conosciuto, il loro calcolo darà per mezzo delle tavole i valori degli archi, $\frac{1}{2}(a-b)$, $\frac{1}{2}(a+b)$; e quindi il lato maggiore a risulterà dall'uguaglianza,

$a=\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)$, ed il minore b dall'altra,

$b=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$. Il terzo angolo C si calcolerà per

mezzo di una delle formole (*C*) di Nepero. Per esempio, dalla formola

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)}$$ si avrà,

$$\cot\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}(A-B).$$

§. 44. V. Caso. *Dati due lati* a, b, *e l'angolo* A *opposto ad uno di essi, trovare* B, c, C.

1.ª *Soluzione* = Le equazioni che determinano gli elementi incogniti dovranno contenere le lettere $abA\,B$, $abA\,c$, $abA\,C$. La prima appartiene alla seconda combinazione, la seconda alla prima, e l'ultima alla terza, onde le tre equazioni richieste, modellate sulle formole (II), (I), (III) saranno,

$$\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B}=\frac{\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}b}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\ \ldots\ldots\ (1)$$

$$\cos C\cos b=\cot a\operatorname{sen}b-\cot A\operatorname{sen}C.\ \ .\ (12).$$

Nella seconda di queste equazioni trovandosi il seno ed il coseno dell'elemento incognito c, per ottenere il valore di $\cos c$ dovrebbe sostituirsi a $\operatorname{sen}c$ il radicale equivalente $\sqrt{1-\cos^2 c}$, ciò che farebbe montare l'equazione a secondo grado rispetto a $\cos c$. Lo stesso accaderebbe volendo determinare $\cos C$ nella equazione (12). Ciò dimostra che in generale questo caso ha due soluzioni, cioè gli elementi incogniti possono avere due valori che soddisfacciano egualmente alle condizioni del problema. L'equazione (4) quantunque di primo grado presenta anche due valori per l'angolo B, il quale vien determinato per mezzo di un seno.

Le equazioni (1) e (12) possono però risolversi mediante un angolo ausiliare, evitando la sostituzione del radicale che le farebbe salire al secondo grado. Dalla (1) si ottiene
$\cos A\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c+\cos b\cos c=\cos a$: e ponendo $\cos A\operatorname{sen}b=\cos b\tan\varphi$, sarà $\cos b[\tan\varphi\operatorname{sen}c+\cos c]=\cos a$, ovvero

$$\cos b\frac{\cos(c-\varphi)}{\cos\varphi}=\cos a,\ \text{e quindi}\ \cos(c-\varphi)=\frac{\cos a\cos\varphi}{\cos b}.$$

Questa equazione servirà a calcolare il lato c, avendo prima determinato l'angolo ausiliare φ per mezzo dell'altra,
$\cos A\operatorname{sen}b=\cos b\tan\varphi$, da cui si ha, $\tan\varphi=\cos A\tan b$.

Similmente l'equazione (12) dà,
$\cos b\cos C+\cot A\operatorname{sen}C=\cot a\operatorname{sen}b$, in cui facendo $\cot A=\cos b\tan\theta$, sarà $\cos b[\cos C+\tan\theta\operatorname{sen}C]=\cot a\operatorname{sen}b$, cioè

$\cos b \frac{\cos(C-\theta)}{\cos\theta} = \cot a \operatorname{sen} b$, ed in fine

$\cos(C-\theta) = \cot a \tan b \cos\theta$.

L'angolo θ si calcolerà per mezzo della supposizione $\cot A = \cos b \tan\theta$, onde le due formole che determinano l'angolo C saranno,

$\cot\theta = \cos b \tan A$, $\cos(C-\theta) = \cot a \tan b \cos\theta$.

A primo aspetto sembra che le formole precedenti, determinando gli elementi c, C per mezzo di un coseno, smentiscano l'ambiguità menzionata di sopra inerente al presente caso. Ma deve riflettersi che nel trasformare l' equazione (1) si è avuto il binomio, $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} c + \cos\varphi \cos c$, al quale si può far corrispondere, tanto $\cos(c-\varphi)$, quanto $\cos(\varphi-c)$; per cui, secondo la duplice supposizione di

$$\left.\begin{matrix}\cos(c-\varphi)\\ \cos(\varphi-c)\end{matrix}\right\} = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b},$$ indicando con K l' arco delle tavole che ha il coseno equivalente a $\frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}$,

si avranno le due uguaglianze, $c-\varphi = K$, $\varphi - c = K$, dalle quali risultano per c due valori cioè, $c = K+\varphi$, $c = \varphi - K$. Per esempio, supponendo che dal calcolo si abbia $\varphi = 92°$, e l' arco il cui coseno eguaglia l' espressione $\frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}$, sia di $54°$, sarà

$c = 54° + 92° = 146°$, e $c = 92° - 54° = 38°$.

Similmente, supponendo $\cot a \tan b \cos\theta = \cos M$, l' angolo C potrà avere i due valori,

$C = M + \theta$, e $C = \theta - M$.

2.ª *Soluzione* = Le formole ottenute dalla soluzione precedente sono le migliori quando si tratta di determinare un solo degli elementi incogniti B, C, c; ma il calcolo delle medesime riuscirebbe troppo lungo se dovessero trovarsi tutti, o due di essi. Allora saranno preferibili le formole seguenti.

Si cercherà primieramente l' angolo B opposto al lato conosciuto b, per mezzo dell' equazione (4), de' quattro seni, e si avrà

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}.$$

In tal modo, essendo noti due lati e due angoli ad essi opposti, si potranno applicare le formole di Nepero per trovare gli altri due elementi C, c. Serviranno all'uopo una delle formole (C) ed una delle (D); per esempio

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \cot\tfrac{1}{2}C \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b) = \tan\tfrac{1}{2}c \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$$

le quali daranno,

$$\cot\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}(A-B),$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a-b).$$

Da queste formole apparisce ancora che il presente caso ha in generale due soluzioni; poichè l'angolo B determinato da un seno presenta due valori uno supplemento dell'altro, i quali introdotti successivamente nelle formole che servono a calcolare C, c, danno anche per ciascuno di questi elementi due valori diversi. Vedremo però in seguito che spesso fra gli elementi dati esistono relazioni tali che ne risulta determinata la specie dell'angolo B, ed allora ha luogo una soluzione soltanto.

VI. Caso. *Dati due angoli* A, B *ed un lato* a *opposto ad uno di essi, trovare* b, C, c.

1.ª *Soluzione* = Si cercheranno tre equazioni fra le lettere $ABab$, $ABaC$, $ABac$, delle quali la prima appartiene alla SECONDA combinazione, la seconda alla QUARTA, e l'ultima alla TERZA, per cui le equazioni richieste di cui le formole (II), (IV), (III) danno il modello, saranno

$$\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B}=\frac{\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}b}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}\ \ldots\ldots\ (13)$$

$$\cos B\cos c=\cot a\operatorname{sen}c-\cot A\operatorname{sen}B\ \ldots\ (7).$$

Questo caso, come il precedente, ha in generale due soluzioni, e lo dimostrano le equazioni (4), (13), (7) in cui gli elementi incogniti b, C, c si trovano nelle medesime condizioni considerate di sopra.

Per risolvere le equazioni (13) e (7) con un angolo ausiliare si scrivano nel modo seguente,

$$\cos a\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C-\cos B\cos C=\cos A;\ \cot a\operatorname{sen}c-\cos B\cos c=\cot A\operatorname{sen}B$$

e nella prima si ponga, $\cos a\operatorname{sen}B=\cos B\cot\varphi'$, e nella seconda, $\cot a=\cos B\cot\theta'$. Fatte le riduzioni, l'angolo C rimarrà determinato per mezzo delle due equazioni,

$$\cot\varphi'=\cos a\tan B,\ \operatorname{sen}(C-\varphi')=\frac{\cos A\operatorname{sen}\varphi'}{\cos B},$$

ed il lato c con le altre due,

$$\tan\theta'=\cos B\tan a,\ \operatorname{sen}(c-\theta')=\tan B\cot A\operatorname{sen}\theta'.$$

Queste formole sono comode quando non si voglia determinare che un solo degli elementi incogniti.

2.ª *Soluzione* = L'equazione (4) insieme alle analogie di Nepero sono in questo caso preferibili ad ogni altro sistema di for-

mole, allorchè debbonsi determinare i tre elementi ignoti, o due di essi. Si avrà, analogamente a ciò che si è praticato di sopra pel V caso,

$$\text{sen}b=\frac{\text{sen}B\,\text{sen}a}{\text{sen}A};\ \cot\tfrac{1}{2}C=\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen}\frac{1}{2}(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}(A-B);$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen}\frac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a-b).$$

§. 45. Nella precedente esposizione delle formole e delle regole necessarie per la risoluzione de' triangoli sferici si è dovuta notare la stretta analogia che hanno fra loro, il I col II caso, il III col IV, ed il V col VI. A confermare questa osservazioue, ricordiamo essersi veduto nei §§. 29 e 35 che le formole le quali risolvono il primo caso applicate a' triangoli polari danno immediatamente quelle che risolvouo il secondo. Allo stesso modo, applicando a' triangoli polari le equazioni (12), (10), (3), o le formole (*C*) di Nepero che risolvono il terzo caso, si otterrebbero facilmente le equazioni (7), (8), (14), e le formole (*D*) di Nepero che risolvono il quarto caso, e similmente dalle formole del V caso si caverebbero quelle del VI. Queste considerazioni dimostrano che nella Trigonometria sferica vi sono, a rigore, soltanto tre casi essenzialmente diversi fra loro, cioè I, III, V; non essendo gli altri tre che questi medesimi applicati a' triangoli polari.

§. 46. Le trasformazioni adoperate nella risoluzione degli ultimi quattro casi de' triangoli obliquangoli, o per rendere più comode le formole pel calcolo logaritmico, come ne' casi III e IV, o per evitare la risoluzione delle equazioni di 2.° grado, come nei casi V e VI, è chiaro che dipendono interamente dalla supposizione che si fa introducendo l'angolo ausiliare. A primo aspetto non si conosce quale criterio abbia regolato quelle supposizioni, le quali non vengono poi giustificate se non da' risultamenti che se ne ottengono. Ma sarà facile mostrare come in qualunque caso possa stabilirsi l'equazione determinante l'angolo ausiliare.

L'oggetto delle indicate trasformazioni è di cambiare in un monomio il binomio della forma $\pm P\text{sen}x \pm Q\cos x$ che s'incontra nella risoluzione de' triangoli. I coefficienti P, Q sono funzioni degli elementi noti del triangolo, ed x è uno degli elementi, dato o incognito, secondo i diversi casi. Se al binomio proposto potesse darsi la forma di uno dei seguenti,

$\tan A\,\text{sen}x+\cos x$, $\cot A\,\text{sen}x+\cos x$, $\text{sen}x-\tan A\cos x$ etc.

e simili, è chiaro che si sarebbe ottenuto l'intento, poichè questo

formole equivalgono a $\frac{\cos(A-x)}{\cos A}$, $\frac{\text{sen}(A+x)}{\text{sen}A}$, $\frac{\text{sen}(x-A)}{\cos A}$ etc. (§. 3).

Si moltiplichi e si divida per Q o per P il binomio suddetto $\pm P\text{sen}x \pm Q\cos x$, e si avrà,

$$Q\left\{\pm\frac{P}{Q}\text{sen}x\pm\cos x\right\},\ \text{o pure},\ P\left\{\pm\text{sen}x\pm\frac{Q}{P}\cos x\right\},$$

ne' quali prodotti il fattore binomiale prenderà immediatamente la forma di una delle espressioni sopra indicate se si ponga,

$$\frac{P}{Q}=\tan\varphi,\ \text{ovvero},\ \frac{P}{Q}=\cot\psi,$$

$$\frac{Q}{P}=\tan\psi,\ \text{ovvero},\ \frac{Q}{P}=\cot\varphi,$$

ossia se nel binomio $\pm P\text{sen}x\pm Q\cos x$, si faccia una delle due seguenti supposizioni, $P=Q\tan\varphi$, $P=Q\cot\psi$, giacchè le altre due, $\frac{Q}{P}=\tan\psi$, $\frac{Q}{P}=\cot\varphi$ rivengono allo stesso. Basterà dunque *eguagliare il coefficiente di un termine a quello dell' altro moltiplicato per la tangente o per la cotangente di un angolo ausiliare.*

Non altrimenti sono state regolate le trasformazioni praticate negli ultimi quattro casi della risoluzione de' triangoli obliquangoli. Solamente, fra le due supposizioni che possono aver luogo nel determinare l'angolo ausiliare, si è scelta quella che rendeva più semplici le formole, evitando pure qualche volta la supposizione che avrebbe dato un binomio della forma, $\text{sen}b\,\text{sen}\varphi -\cos b\cos\varphi$, equivalente al coseno negativo, $-\cos(b+\varphi)$. Per ricordarsi poi facilmente di tutte le supposizioni fatte per l'angolo ausiliare nella risoluzione de' triangoli obliquangoli esposta di sopra, gioverà notare; 1.° che *si è sempre scelto il coefficiente più composto del binomio per uguagliarlo al più semplice moltiplicato per la tangente o cotangente dell' angolo ausiliare;* così nel binomio, $\cot A\,\text{sen}B+\cos c\cos B$ si è fatto $\cot A=\cos c\tan\theta$, e non, $\cos c=\cot A\tan\theta$: 2.° che *si è usata la* tangente *dell'angolo ausiliare quando il binomio era una somma, e la* cotangente *quando era una differenza.*

Finalmente sarà utile osservare che gli angoli ausiliari di cui si ragiona rappresentano geometricamente un cateto o un angolo obliquo di uno de' due triangoli rettangoli che emergono dal triangolo obliquangolo proposto quando da un vertice di esso si abbassa un arco perpendicolare sulla base. Per esempio nel caso III l'equazione, $\cot a=\cot\varphi\cos C$ determinante l'angolo ausiliare, in forza del teorema 4.° del §. 40, mostra che a e φ sono

l'ipotenusa ed un cateto di triangolo rettangolo, e C l'angolo da essi compreso, e si riconoscerà subito che un tal triangolo è uno de' due che risultano abbassando dal vertice B del proposto triangolo ABC (*fig.* 7) un arco perpendicolare sulla base AC; per cui dagli stessi triangoli rettangoli si cavano con facilità le formole contenenti l'angolo ausiliare già trovate analiticamente per la risoluzione del triangolo obliquangolo.

* §. 47. In fatti, si ponga il segmento $CD = \varphi$, ed il triangolo rettangolo BCD darà le due uguaglianze, $\cot a = \cot\varphi \cos C$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\tan BD}{\tan C}$; ma dall'altro triangolo BDA, in cui il lato $DA = b - \varphi$, si ottiene ancora, $\operatorname{sen}(b-\varphi) = \frac{\tan BD}{\tan A}$, dunque uguagliando fra loro i valori di $\tan BD$ si avrà,

$\operatorname{sen}\varphi \tan C = \operatorname{sen}(b-\varphi)\tan A$, e quindi

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen}\varphi \tan C}{\operatorname{sen}(b-\varphi)}, \text{ ovvero } \cot A = \frac{\operatorname{sen}(b-\varphi)\cot C}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Finalmente il secondo triangolo BAD darà $\cot c = \cot(b-\varphi)\cos A$, per cui le formole che determinano gli elementi A, c saranno come nel §. 43,

$$\tan\varphi = \cos C \tan a, \; \cot A = \frac{\operatorname{sen}(b-\varphi)\cot C}{\operatorname{sen}\varphi}, \; \cot c = \cot(b-\varphi)\cos A.$$

Con un procedimento analogo, ponendo l'angolo $DBA = \theta$, si cavano dagli stessi triangoli BCD, BAD le formole che nel IV caso servono a calcolare gli elementi a, C.

Per gli ultimi due casi la perpendicolare dovrà abbassarsi dal vertice C, e gli angoli ausiliari per determinare gli elementi c, C saranno nel V caso, $AE = \varphi$, $ACE = \theta$; e nel VI caso, $BE = \theta'$, $BCE = \varphi'$.

Tutte queste formole dedotte da' triangoli rettangoli parziali, essendo identiche con quelle dimostrate ne' §§. 43 e 44 analiticamente e senza dipendere da considerazioni geometriche, dovranno rimanere le stesse, sia che la perpendicolare abbassata cada dentro, sia che cada fuori del triangolo obliquangolo proposto. Lasciamo al lettore la cura di verificare una tale asserzione.

Qui si potrebbe dire da alcuno che il metodo precedente avrebbe dovuto esser preferito, perchè più breve, a quello adoperato ne' §§. 43 e 44 per ottenere le formole contenenti l'angolo ausiliare; ma la via analitica ivi seguita, oltre che fa derivare regolarmente queste soluzioni numeriche dalle loro corrispondenti algebriche, è sempre più facile a ritenersi a memoria, e risparmia ogni discussione od esame diretto a dimostrare che le formole dedotte dalla figura in una determinata posizione de'dati, sono applicabili a qualunque altra.

* §. 48. Nella precedente risoluzione dei triangoli si osserva più volte determinato qualche elemento per mezzo del coseno o del seno; ma quando il coseno corrisponde ad un arco piccolissimo, o il seno ad un arco non molto diverso dal quadrante, i logaritmi di quelle linee trigonometriche, limitati a sette cifre come nelle tavole ordinarie, variano così poco per 10″ di arco, che gli angoli corrispondenti ai dati logaritmi non possono ottenersi con molta esattezza. Per rimediare a questa imperfezione delle tavole, si preferisce in tal caso la tangente nella determinazione dell'elemento incognito; per la qual cosa sarà utile indicare come si possa mutare la data formola di seno o di coseno in formola di tangente. Si abbia $\cos x = F$, e sussisterà pure l'uguaglianza, $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-F}{1+F}$, ma $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2 \frac{1}{2} x$ (§. 4), dunque $\tan^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-F}{1+F}$. Allo stesso modo, avendosi $\operatorname{sen} y = \mathrm{F}$, sarà $\frac{1-\operatorname{sen} y}{1+\operatorname{sen} y} = \frac{1-F}{1+F}$, ovvero (§. 5), $\tan^2(45^\circ - \frac{1}{2} y) = \frac{1-F}{1+F}$.

Cambiato così il coseno od il seno in tangente quadrata, il calcolo più o meno facile della espressione $\frac{1-F}{1+F}$ dipenderà dalla forma particolare della funzione F, la quale si suppone sempre comoda a calcolarsi coi logaritmi. I casi più ovvii ne' quali l'espressione $\frac{1-F}{1+F}$ si riduce subito in fattori, e può quindi calcolarsi agevolmente con i logaritmi, sono i seguenti. 1.° *Quando la funzione* F *è una frazione di cui i termini sieno due coseni o due seni, o un seno ed un coseno.* 2.° *Allorchè la funzione* F *è il prodotto o il quoziente di due tangenti o di due cotangenti, o di una tangente ed una cotangente.* Se l'espressione $\frac{1-F}{1+F}$ non può ridursi in fattori, l'andamento più semplice da tenersi allora è di uguagliare la funzione F alla tangente di un angolo z da determinarsi. Così si avrebbe, per ciò che si è detto qui sopra, $\tan^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-\tan z}{1+\tan z} = \tan(45^\circ - z)$, (§. 5), o pure $\tan^2(45^\circ - \frac{1}{2} y) = \tan(45^\circ - z)$; e l'angolo z sarebbe conosciuto per mezzo della relazione $\tan z = F$

Non possiamo qui dilungarci ad applicare di proposito questi principii generali alla risoluzione dei triangoli, ma daremo solo qualche esempio, rimandando per il di più i nostri lettori alla

prima edizione di questa trigonometria più sopra citata. Si abbia la formola

$\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$, e sarà $F = \frac{\cos B}{\cos(90^\circ - C)}$ e quindi,

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} b = \frac{1 - F}{1 + F} = \frac{\cos(90^\circ - C) - \cos B}{\cos(90^\circ - C) + \cos B},$$ e per le formole del §. 7

$$\tan \tfrac{1}{2} b = \sqrt{-\tan\{45^\circ - \tfrac{1}{2}(C - B)\}\tan\{45^\circ - \tfrac{1}{2}(C + B)\}}$$

Se dovesse calcolarsi il lato c per mezzo della formola $\cos c = \frac{\cos a \cos(b - \varphi)}{\cos \varphi}$, come nel III caso de' triangoli obliquangoli, si farebbe $\tan z = \frac{\cos a \cos(b - \varphi)}{\cos \varphi}$, e si avrebbe,

$$\tan \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\tan(45^\circ - z)}.$$

Analisi de' casi dubbi della Trigonometria sferica.

§. 49. Abbiamo veduto che gli ultimi due casi V e VI offrono in generale due soluzioni, ossia danno due valori per ogni elemento incognito. Molte volte però può esservi una soluzione soltanto, e ciò avviene quando fra gli elementi dati esistono tali relazioni che, in forza di alcune proprietà del triangolo sferico, si fa nota la specie di uno degli elementi incogniti.

Nel V caso, essendo conosciuti a, b, A, se fra i valori di a, b si abbiano le relazioni $a < b$, $a + b > 180^\circ$, per le proprietà dimostrate nel §. 38 sussisteranno le relazioni medesime fra gli angoli opposti; sarà cioè, $A < B$, $A + B > 180^\circ$. Ora, queste disuguaglianze possono cambiarsi nelle altre due, $B > A$, $B > 180^\circ - A$, le quali esprimono che l'angolo B è maggiore dell'angolo A non meno che del suo supplemento. Quindi, qualunque sia il valore di A, l'angolo B sarà sempre ottuso; poichè se A è acuto, il suo supplemento $180^\circ - A$ è ottuso, e B dovendo superarlo sarà pure ottuso, e se A è retto, ovvero ottuso, essendo $B > A$, ne risulterà anche B ottuso. Conosciuta in tal modo la specie di B, questo elemento, quantunque calcolato con l'equazione de' seni, avrà un sol valore, al pari degli altri due C, c, che ne dipendono quando si calcolano con le formole di Nepero.

Si verificherà pure una sola soluzione quando si abbiano fra i due lati conosciuti le relazioni $a > b$, $a + b < 180^\circ$. In fatti le proprietà dimostrate al §. 38 daranno per gli angoli opposti le stesse relazioni cioè, $A > B$, $A + B < 180^\circ$, ovvero, $B < A$ e $B < 180^\circ - A$. L'angolo B, essendo perciò minore di A e del suo supplemento, sarà necessariamente acuto, qualunque sia il valore di A, e quindi calcolato con l'equazione de' seni, avrà un solo valore.

Vi sarà dunque una sola soluzione sempre che le relazioni di disuguaglianza fra a e b, e fra $a+b$ e 180° saranno dissimili.

Se si abbiano fra a, b e 180°, le relazioui simili $a<b, a+b<180°$, ovsi avranno anche per gli angoli opposti, $A<B, A+B<180°$, ovvero $A<B$, $A<180°-B$; da cui apparisce che l'angolo A dev'essere necessariamente acuto, onde i dati sarebbero assurdi, ossia non apparterrebbero ad un triangolo sferico, se insieme con $a<b$, $a+b<180°$, si avesse $A>90°$.

Allo stesso modo dalle relazioni $a>b$, $a+b>180°$ si desumono le analoghe $A>B$, $A+B>180°$, ovvero, $A>B$, $A>180°-B$, le quali dimostrano che l'angolo A dev'essere ottuso. Perciò, se fra i dati a, b, A esistessero le relazioni $a>b$, $a+b>180°$, $A<90°$, essi non potrebbero appartenere ad un triangolo sferico.

Dunque i dati saranno assurdi quando le relazioni fra a e b, $a+b$ e 180° saranno simili fra loro e dissimili con la relazione fra A e 90°.

Dall'esame precedente si vede che, sebbene il caso V ammetta in generale due soluzioni, nulladimeno se ne verifica una soltanto, o nessuna quando fra gli elementi dati esistono le relazioni discusse di sopra. La doppia soluzione non avrà dunque luogo che nell'ultima ipotesi che ci rimane a considerare, cioè quella in cui le relazioni fra a e b, ed $a+b$ e 180° sono simili fra loro e simili alla relazione fra A e 90°.

In fatti, se si supponga, $a<b$, $a+b<180°$, $A<90°$ se ne dedurrà $A<B$, $A+B<180°$, $A<90°$, ovvero $B>A$, $B<180°-A$, $A<90°$. Ed essendo l'angolo A acuto e quindi il suo supplemento ottuso, si potrà conchiudere che l'angolo B è maggiore di un angolo acuto, e minore di un angolo ottuso; esso potrà essere perciò tanto acuto che ottuso, ossia potrà avere due valori, coerentemente alla natura del problema, non presentando questa ipotesi alcuna eccezione.

Similmente se $a>b$, $a+b>180°$, $A>90°$, si avrà $A>B$, $A+B>180°$, $A>90°$, cioè $B<A$, $B>180°-A$, $A>90°$, le quali relazioni dimostrano ancora che l'angolo B può essere tanto acuto quanto ottuso.

Un'altra specie di assurdità ne' dati risulta dalla formola dei quattro seni, che nei due casi V e VI serve a calcolare l'angolo B, o il lato b. Essendo $\text{sen}B=\frac{\text{sen}b\,\text{sen}A}{\text{sen}a}$, è chiaro che questa eguaglianza non potrebbe sussistere se il secondo membro fosse maggiore dell'unità, perchè un seno non può mai superare il raggio; e però i dati saranno assurdi nel V caso se sussisterà fra essi la relazione $\frac{\text{sen}b\,\text{sen}A}{\text{sen}a}>1$, ovvero $\text{sen}a<\text{sen}b\,\text{sen}A$.

* Una tale assurdità è diversa ed indipendente da quella considerata più sopra, ed indica che il triangolo sferico non può geometricamente costruirsi, se il lato a opposto all'angolo dato A è minore della perpendicolare che dalla sua estremità può abbassarsi sul lato c, quando la perpendicolare è un minimo, o se il lato a è maggiore della perpendicolare, quando questa è un massimo (§. 34)* (a)

Riepilogando ciò che si è detto intorno ai dubbi che presenta la risoluzione del V caso, ed applicando una simile analisi al caso VI, i criterii per distinguere in ambedue i casi le doppie soluzioni, le semplici, e l'assurdità de' dati potranno disporsi come segue.

Nel V caso.

$$\begin{array}{l} \textit{Qualunque sia} \\ A\textit{, se} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a>b,\ a+b<180^\circ \\ a<b,\ a+b>180^\circ \end{array} \right\} \textit{una soluzione, e} \left\{ \begin{array}{l} B<90^\circ \\ B>90^\circ \end{array} \right.$$

$$Se\ A<90^\circ,\ ed \left\{ \begin{array}{ll} a<b,\ a+b<180^\circ & \textit{due soluzioni} \\ a>b,\ a+b>180^\circ & \textit{nessuna soluzione} \end{array} \right.$$

(a) La compiuta discussione de' casi dubbi della trigonometria sferica richiederebbe maggiore sviluppo, ed è stata da noi ampiamente trattata nella nostra Trigonometria messa a stampa nel 1839, dove abbiamo dimostrato per il V caso il seguente quadro di criterii, che crediamo più esatto e completo di quanti se n'erano dati prima.

Nel V caso.

$$\begin{array}{l} \textit{Qualunque sia} \\ A\textit{, se} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} a>b,\ a+b<180^\circ & \textit{una soluzione, e } B<90^\circ \\ a<b,\ a+b>180 & \textit{una soluzione, e } B>90^\circ \end{array} \right.$$

$$Se\ A<90^\circ,\ ed \left\{ \begin{array}{ll} a<b,\ a+b<180^\circ & \textit{due soluzioni,} \\ a=b,\ a+b<180 & \textit{una soluzione, e } B=A \\ a<b,\ a+b=180 & \textit{una soluzione, e } B=180^\circ-A \\ a>b,\ a+b>180 & \\ a>b,\ a+b=180 & \textit{nessuna soluzione} \\ a=b,\ a+b>180 & \\ a=b,\ a+b=180 & \end{array} \right.$$

$$Se\ A>90^\circ,\ ed \left\{ \begin{array}{ll} a>b,\ a+b>180^\circ & \textit{due soluzioni} \\ a=b,\ a+b>180 & \textit{una soluzione, e } B=A \\ a>b,\ a+b=180 & \textit{una soluzione, e } B=180^\circ-A \\ a<b,\ a+b<180 & \\ a<b,\ a+b=180 & \textit{nessuna soluzione.} \\ a=b,\ a+b<180 & \\ a=b,\ a+b=180 & \end{array} \right.$$

Quando $\operatorname{sen} a<\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b$ *nessuna soluzione.*

Il quadro di criterii per il VI caso si ottiene dal precedente cambiando le lettere grandi in piccole e viceversa.

$$Se\ A>90^\circ,\ ed \begin{cases} a>b,\ a+b>180^\circ & \textit{due soluzioni} \\ a<b,\ a+b<180^\circ & \textit{nessuna soluzione} \end{cases}$$

Quando $\operatorname{sen}a<\operatorname{sen}A\operatorname{sen}b$ *nessuna soluzione.*

Nel VI caso.

$$\textit{Qualunque sia } a\text{, se} \begin{cases} A<B,\ A+B>180^\circ \\ A>B,\ A+B<180^\circ \end{cases} \textit{una soluzione, e} \begin{cases} b>90^\circ \\ b<90^\circ \end{cases}$$

$$Se\ a>90^\circ,\ ed \begin{cases} A>B,\ A+B>180^\circ & \textit{due soluzioni} \\ A<B,\ A+B<180^\circ & \textit{nessuna soluzione} \end{cases}$$

$$Se\ a<90^\circ,\ ed \begin{cases} A<B,\ A+B<180^\circ & \textit{due soluzioni} \\ A>B,\ A+B>180^\circ & \textit{nessuna soluzione} \end{cases}$$

Quando $\operatorname{sen}A<\operatorname{sen}a\operatorname{sen}B$ *nessuna soluzione.*

Per ritenere facilmente a memoria questi criterii osserveremo; 1.° *che il quadro relativo al VI caso si deduce dall'altro, mutando le lettere grandi in piccole e viceversa;* 2.° *che nelle combinazioni del V caso si paragona* A *con* 90°, a *con* b, *ed* a+b *con* 180°; 3.° *che quando le relazioni di* a *con* b *e di* a+b *con* 180° *sono dissimili fra loro si verifica una sola soluzione, quando sono simili fra loro e simili alla relazione di* A *con* 90° *si verificano due soluzioni, e finalmente quando sono simili fra loro e dissimili dalla relazione di* A *con* 90° *i dati sono assurdi.*

§. 50. Nel §. precedente abbiamo esposti, per gli ultimi due casi dei triangoli obliquangoli, i criterii che escludono ogni soluzione, e servono a far conoscere quali condizioni rendano i dati assurdi, ossia non appartenenti ad un triangolo sferico. Non è difficile ancora indicare le condizioni cui debbono soddisfare gli elementi dati negli altri quattro casi, per potere far parte di un triangolo sferico.

Nel I caso, considerando che il coseno di uno degli angoli A, espresso per i tre lati deve esser <1, e >-1, si avranno le due relazioni, $\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}<1$, $\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}>-1$, dalle quali si ottengono, $\cos a<\cos\pm(b-c)$, $\cos a>\cos(b+c)$, e quindi passando agli archi, (poichè al minor coseno corrisponde l'arco maggiore, e viceversa) $a>\pm(b-c)$, $a<b+c$; ovvero, $b<a+c$, $c<a+b$, $a<b+c$, cioè *un lato qualunque deve esser minore della somma degli altri due.* Inoltre la formola $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$ dimostra che *la somma de' tre lati deve esser minore di* 360°. In fatti tra i fattori che compongono la quantità sotto il segno radicale, sen$b$, sen$c$

e $\text{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)$ sono positivi, perchè ciascuno de' lati b,c è minore di 180°, ed $\frac{1}{2}(b+c-a)$ è positivo e minore di una semicirconferenza; quindi, il radicale non potendo essere immaginario, anche $\text{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)$ deve esser positivo, per cui $\frac{1}{2}(a+b+c)<180°$, ed $a+b+c<360°$.

Nel II caso, *la somma de' tre angoli deve esser maggiore di 180°, e togliendo uno qualunque di essi dalla somma degli altri due, il resto deve esser minore di* 180°. La prima di queste condizioni si desume immediatamente dalla formola $\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}$ trattata come si è fatto qui sopra con la formola fondamentale nel I caso, e l'altra è stata dimostrata nel §. 35. Ma tutte queste proprietà del triangolo sferico erano già note per la Geometria.

Nel III caso *i dati possono essere qualsivogliano*, perchè le formole che risolvono questo caso non possono andar soggette ad assurdità: ciò è chiaro per le (12), e (10), ed in quanto alla (3), essa può modificarsi in due diversi modi, cioè; 1.° $\cos c=\cos(a-b)-2\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}^2\frac{1}{2}C$, $\cos^2\frac{1}{2}c=1-\text{sen}^2\frac{1}{2}(a-b)-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}^2\frac{1}{2}C=\cos^2\frac{1}{2}(a-b)-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}^2\frac{1}{2}C$; 2.° $\cos c=\cos(a+b)+2\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\cos^2\frac{1}{2}C$, $\cos^2\frac{1}{2}c=\cos^2\frac{1}{2}(a+b)+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\cos^2\frac{1}{2}C$. La prima delle due espressioni di $\cos^2\frac{1}{2}c$, essendo differenza di due frazioni vere ed essenzialmente positive, prova che $\cos\frac{1}{2}c$ è sempre minore di *uno;* e la seconda, essendo evidentemente positiva, dimostra che $\cos\frac{1}{2}c$ non può mai avere un valore immaginario. Lo stesso dicasi del IV caso. Altronde si concepisce facilmente come con un angolo qualunque, e con due lati che lo comprendono di qualunque lunghezza, purchè minori di 180°, possa sempre costruirsi un triangolo sferico.

Queste regole applicate ai triangoli rettangoli si modificano come segue.

Quando sono dati i due angoli obliqui B,C, *la loro somma dovrà esser maggiore di 90° e minore di 270°, e la loro differenza minore di* 90°. In fatti, deve essere $A+B+C>180°$, $A+B-C<180°$, e $B+C-A<180°$, le quali relazioni, supposto $A=90°$, si cambiano subito in quelle ora indicate.

Se sono dati i due cateti b,c, *oppure un cateto* b *e l'angolo adiacente* C, *questi elementi potranno avere qualunque valore;* perchè questi due casi corrispondono al III ed al IV de' triangoli in generale.

Quando sono dati a,b, cioè due lati ed un angolo opposto $A=90°$ come nel V caso, *il triangolo non sarà possibile se* $a<b, a+b<180°$, *o pure*, $a>b, a+b>180°$. In fatti, queste relazioni conducono alle altre $A<B, A+B<180°$, ed $A>B$, $A+B>180°$ (§. 49), dalle quali si desume $A<90°$, per le prime due, ed $A>90°$ per le altre, contro l'ipotesi che assegna ad A il valore di 90°. Potrebbe dubitarsi che l'altra relazione di assurdità $\text{sen}\,a<\text{sen}\,A\,\text{sen}\,b$ accennata nel V caso, la quale per

il triangolo rettangolo diviene sen$a <$sen$b$, desse nuovi criterii diversi dai due precedenti; ma discussa l'ineguaglianza sen$a <$sen$b$, facendo variare in qualunque modo la specie degli archi b, a, ne emergono le stesse relazioni $a > b, a+b > 180°$; ed $a < b, a+b < 180°$.

Applicando i criterii del VI caso (§. 49) al triangolo rettangolo in cui è data l'ipotenusa a ed un angolo B, si conosce subito che gli elementi dati non possono essere mai assurdi; perocchè le relazioni $A < B$, $A + B < 180°$, e le altre, $A > B$, $A + B > 180°$, quando $A = 90°$, divengono $B > 90°$, $B < 90°$, le quali non possono sussistere insieme per un angolo *dato B*. E neanche la relazione di assurdità sen $A <$ sen a sen B, ovvero, sen $90° <$ sen a sen B potrà mai verificarsi, essendo il prodotto di due seni sempre minore del raggio. Dunque *i dati possono prendersi comunque*, ed è in fatti evidente che, da un punto preso sopra un lato di un angolo sferico determinato, possa sempre abbassarsi un arco perpendicolare sull'altro lato.

L'ultimo caso de' triangoli rettangoli in cui è dato il lato b e l'angolo opposto B dipende anche dal VI caso de' triangoli obliquangoli. Dal quadro del §. 49, cambiando a in b, e scambiando fra loro gli angoli A, B, si hanno le relazioni di assurdità, $b < 90°, B > A, B + A > 180°$, e $b > 90°, B < A, B + A < 180°$; le quali, quando $A = 90°$ divengono, $b < 90°, B > 90°$; e $b > 90°$, $B < 90°$, e dimostrano che il triangolo è impossibile *se un cateto* b *ed il suo angolo opposto* B *sono di diversa specie*, il che altronde era noto. Dalla relazione sen $A <$ sen a sen B, che per il cambiamento delle lettere diviene sen $B <$ sen b sen A, ovvero sen $B <$ sen b, si desume facilmente che *i dati sono assurdi quando* $B < 90°$, *e* $B < b$, *o pure* $B > 90°$, *e* $B > b$; perocchè dovendo B, b appartenere allo stesso quadrante, se $B < 90°$, dovrà essere $B < b$ per verificarsi sen$B <$ sen$b$, e se $B > 90°$, per sussistere la medesima relazione fra i seni, dovrà essere $B > b$.

* §. 51. La discussione fatta ne' due §§. precedenti, intorno ai casi dubbi della trigonometria sferica, potrà sembrare oziosa riflettendo che, nell'applicare le formole ai dati numerici, il calcolo deve di necessità condurre a soluzioni doppie, semplici o assurde, secondo la natura delle quistioni. Così accade nel fatto, poichè se i dati sono assurdi, i lati o gli angoli che si ottengono dai calcoli risultano negativi o maggiori di 180°, e quando un elemento è dato per seno o per coseno, questi risultano sempre maggiori del raggio; se poi deve verificarsi una soluzione soltanto, delle due che in generale si ottengono dalle formole, una rimane esclusa, per trovarsi il lato o l'angolo cercato negativo, o maggiore di 180°. Nulladimeno, quando anche non volesse ammettersi che, per decoro della scienza, le teoriche debbono essere dichiarate e discusse in tutti i loro particolari, non potrebbe rivocarsi in dubbio l'utilità dei criterii assegnati di sopra, perchè essi risparmiano interamente il calcolo allorchè i dati sono assur-

di, mostrando ancora l'inesattezza delle osservazioni astronomiche o delle combinazioni da cui dipende il triangolo sferico proposto; e se si verifica una soluzione soltanto, essi la scelgono dal bel principio, senza che il calcolatore sia obbligato di seguire spesso una falsa via, dalla quale deve retrocedere tostochè si avvede che condurrebbe a risultamenti erronei.

Esempio numerico della risoluzione de' triangoli sferici.

§. 52. In un triangolo sferico obliquangolo siano conosciuti due lati, $a=96°.26'.50'',1$, $b=110°.40'.4'',0$, e l'angolo opposto $A=65°.56'.29'',5$. Esaminiamo primieramente se con questi dati il triangolo è possibile; abbiamo $A<90°$, $a<b, a+b>180°$, e dal quadro del §. 49 si scorge che la coesistenza di queste relazioni fra gli elementi di un triangolo sferico non è assurda, ma dà luogo ad una soluzione soltanto; inoltre da' valori numerici de' dati chiaramente appare che $\text{sen}\,a>\text{sen}A\,\text{sen}\,b$, e quindi non si verifica neanche la seconda assurdità menzionata nel quadro suddetto. Passiamo al calcolo del lato c;

$$\tan\varphi=\tan b\cos A\ ,\qquad \cos\pm(c-\varphi)=\frac{\cos a\cos\varphi}{\cos b}$$

log tan$b$ = 0,4233602 —	c log cos$b$ = 0,4522549 —
382.2	334.8
log cos$A$ = 9,6103050 +	log cos$a$ = 9,0503331 —
23.6	18.6
log tanφ = 0,0337057.8 —	log cosφ = 9,8319700 —
47°.13'.10'' 6799	87.8
+ 6, 13 422 | 258.8	log cos$\pm(c-\varphi)$ = 9,3346021 2 —
47 . 13 . 16, 13 6,13	77°.31'.20'' 5763
132 . 46 . 43, 87 = φ	— 2,72 951 | 258.2
	77 . 31 . 17,28 2.72
	102.28 42,72

$c-\varphi$ = 102°.28'.42'',72	φ = 132°.46'.43'', 87
φ = 132 . 46 . 43 , 87	$\varphi-c$ = 102 . 28 . 42 , 72
c = 235 . 15 . 26 , 59	c = 30 . 18 . 1 , 15

Il calcolo precedente dimostra che il lato c ha un solo valore $30°.18'.1'',15$ come lo annunziavano le relazioni esistenti fra i dati; giacchè l'altro valore $235°.15'.26'',59$ è maggiore di $180°$.

Se in vece del solo lato c si cercano tutti tre gli elementi B, c, C, bisognerà applicare la seconda soluzione del §. 44. L'angolo B, determinato con la formola de' seni presenterà allora due valori, $B=59°.17'.39'',2$, $B'=120°.42'.20'',8$; e non volendo scegliere la specie di B con la guida de' criterii del §. 49, il primo

di questi angoli introdotto nelle formole di Nepero condurrebbe ad un valor negativo di $\tan\frac{1}{2}c$, e quindi ad una determinazione di c maggiore di 180°. Ma questa soluzione non può ammettersi, e però quel valore di B deve rifiutarsi, e bisognerà servirsi dell'altro 120°. 42'. 20'', 8 per calcolare gli elementi c, C, che risulteranno, $c=30^\circ.18'.1'',1$, $C=27^\circ.37'.19'',0$. Riportiamo il calcolo del lato c.

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\tan\tfrac{1}{2}(a-b)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\begin{aligned}
A &= 65^\circ.56'.29'',5\\
B &= 120\,.42\,.20\;,8\\
A+B &= 186\,.38\,.50\;,3\\
\tfrac{1}{2}(A+B) &= 93\,.19\,.25\;,15\\
A-B &= -54\,.45\,.51\;,3\\
\tfrac{1}{2}(A+B) &= -27\,.22\,.55\;,65\\
\\
a &= 96^\circ.26'.50'',1\\
b &= 110\,.40\,.\;4\;,0\\
a-b &= -14\,.13\,.13\;,9\\
\tfrac{1}{2}(a-b) &= -\;7\,.\;6\,.36\;,95
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\tan\tfrac{1}{2}(a-b) &= 9{,}0958814\;-\\
&\qquad 1191.2\\
\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B) &= 9{,}9992683\;+\\
&\qquad 5.8\\
C.\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B) &= 0{,}3372974\;-\\
&\qquad 176.6\\
l\tan\tfrac{1}{2}c &= 9{,}4325844.6+\\
15.9'.0'' &\qquad 799\\
+0{,}55 &\qquad 835 \,|\; 45.6\\
\tfrac{1}{2}c=15.\;9.0{,}55 &\qquad 0{,}55\\
c=30.18.1{,}1 &
\end{aligned}$$

Quanto precede giustifica e dichiara l'osservazione fatta nel §. 51.

§. 53. Non c' intratterremo qui ad esporre minutamente le regole pratiche per applicare i logaritmi alle formole della trigonometria sferica, perchè debbono essere già conosciute dai giovani che hanno studiata l'Algebra e la Trigonometria rettilinea; nulladimeno non tralasceremo alcune osservazioni principali.

I. Qualunque sia l' arco di cui deve prendersi il seno, il coseno, la tangente o la cotangente, prima operazione è quella di notare il segno della linea trigonometrica; questo segno non appartiene al logaritmo, che deve considerarsi come un mezzo facile di calcolo del quale si potrebbe anche far senza, e perciò si nota, per semplice ricordo, dopo e non prima del logaritmo stesso, come si vede nell' esempio del §. precedente. I segni che hanno le linee trigonometriche, nei successivi quattro quadranti della circonferenza, sono come segue;

il SENO *è positivo nel* 1.° *e nel* 2.° *quadrante, e negativo nel* 3.° *e nel* 4.°

il COSENO *è positivo nel* 1.° *e nel* 4.° *quadrante*, *e negativo nel* 2.° e *nel* 3.°

la TANGENTE *e la* COTANGENTE *sono positive nel* 1.° *e nel* 3.° *quadrante e negative nel* 2.° *e nel* 4.°

Per trovare i segni delle linee trigonometriche degli archi negativi, basta ricordarsi che questi archi si contano in direzione contraria dei positivi, e però i quadranti negativi 1.°, 2.°, 3.°, e 4.°, hanno le stesse linee trigonometriche de' quadranti positivi 4.°, 3.°, 2.°, e 1.°

II. Dopo aver notato il segno della linea trigonometrica, bisogna cercarne il logaritmo nelle tavole, il che non può farsi immediatamente se il dato arco è maggiore di 90°, e bisogna prima trovare un arco che, senza uscire dai limiti delle tavole, abbia una linea trigonometrica equivalente a quella dell'arco dato. A ciò si perviene in due modi, o prendendo il ***supplemento*** dell' arco dato, o prendendone il ***complemento;*** il supplemento si ottiene prendendo la differenza fra l'arco dato e 180°, o pure 360°, ed il complemento si ha prendendo la differenza fra l'arco dato e 90°, o pure 270°. Se si fa uso del SUPPLEMENTO, ***la linea trigonometrica non cangia denominazione***, e se si adopera il COMPLEMENTO, ***la linea trigonometrica cambia denominazione***, cioè da seno diviene coseno o viceversa, e da tangente diviene cotangente, o viceversa. Nel seguente quadro si veggono compendiate le due regole ora esposte, rispetto ai segni ed agli archi da cercarsi nelle tavole.

Se l' arco a *è compreso nel* 1.° *quadrante.*

$$\begin{aligned}
\text{sen}a &= +\,\text{sen}a = +\cos(90^\circ - a)\\
\cos a &= +\cos a = +\,\text{sen}(90^\circ - a)\\
\tan a &= +\tan a = +\cot(90^\circ - a)\\
\cot a &= +\cot a = +\tan(90^\circ - a)
\end{aligned}$$

Se l' arco a *è compreso nel* 2.° *quadrante.*

$$\begin{aligned}
\text{sen}a &= +\,\text{sen}(180^\circ - a) = +\cos(a - 90^\circ)\\
\cos a &= -\cos(180^\circ - a) = -\,\text{sen}(a - 90^\circ)\\
\tan a &= -\tan(180^\circ - a) = -\cot(a - 90^\circ)\\
\cot a &= -\cot(180^\circ - a) = -\tan(a - 90^\circ)
\end{aligned}$$

Se l' arco a *è compreso nel* 3.° *quadrante.*

$$\begin{aligned}
\text{sen}a &= -\,\text{sen}(a - 180^\circ) = -\cos(270^\circ - a)\\
\cos a &= -\cos(a - 180^\circ) = -\,\text{sen}(270^\circ - a)\\
\tan a &= +\tan(a - 180^\circ) = +\cot(270^\circ - a)\\
\cot a &= +\cot(a - 180^\circ) = +\tan(270^\circ - a)
\end{aligned}$$

Se l' arco a *è compreso nel* 4.° *quadrante.*

$$\begin{aligned}
\text{sen}a &= -\,\text{sen}(360^\circ - a) = -\cos(a - 270^\circ)\\
\cos a &= +\cos(360^\circ - a) = +\,\text{sen}(a - 270^\circ)\\
\tan a &= -\tan(360^\circ - a) = -\cot(a - 270^\circ)\\
\cot a &= -\cot(360^\circ - a) = -\tan(a - 270^\circ)
\end{aligned}$$

Dovendo, per esempio, trovare il coseno di 194°. 5'. 37'', si comincerà ad osservare che è negativo, ed indi si cercherà nelle tavole, o il coseno del supplemento 14°. 5'. 37'', o il seno del complemento 75°. 54'. 23''.

III. Se, come avviene quasi sempre, l'arco di cui si cerca la linea trigonometrica non si trova esattamente nelle tavole, esso dovrà per necessità cadere fra due archi compresi nelle tavole stesse. Allora il logaritmo della linea trigonometrica si otterrà aggiungendo ad uno de' logaritmi della tavola la *parte proporzionale*, corrispondente alla differenza fra l'arco dato e quello preso nella tavola.

Per mostrare come debba calcolarsi in tutti i casi la parte proporzionale, sarà utile considerare la quistione sotto un aspetto più generale. Sia $F(x)$ una funzione qualunque della variabile x, ed indichiamo con A, A', A'', A''' etc. i valori che prende una tal funzione quando alla variabile si danno le particolari determinazioni a, a', a'', a''' etc.; si potrà con le quantità a, a', a'', a''' etc. e le corrispondenti A, A', A'', A''' etc. formare una *tavola*, che servirà a trovare il valore di $F(x)$ per un valore della variabile compreso fra due di quelli notati nella tavola, senza intraprendere da capo il calcolo della funzione. La variabile x, che con le sue successive determinazioni dà origine alla tavola, si chiama in generale l'*argomento* della tavola medesima. Supponiamo ora che, come nelle tavole logaritmiche, i *numeri* $a, a', a'', a'''\ldots$ formino una progressione aritmetica *crescente* e sia i la differenza costante di essa, ossia l'*intervallo* per il quale è calcolata la tavola; e rispetto alle quantità $A, A', A'', A'''\ldots$, che per brevità chiameremo *logaritmi*, supponiamo che le loro differenze $\delta, \delta', \delta''\ldots$, quantunque non costanti, non abbiano però una rapida variazione in più o in meno. La disposizione della tavola sarà come segue.

NUMERI	LOGARITMI	DIFFERENZE
a	A	δ
a'	A'	δ'
a''	A''	δ''
a'''	A'''	

Possono darsi due casi; o i logaritmi vanno *crescendo*, o vanno *diminuendo*. Nel 1.° caso debba trovarsi il logaritmo corrispondente al numero $a'+K$ compreso fra a' ed a''; il logaritmo dovrà esser compreso fra A' ed A'', e siccome tanto i logaritmi quanto i numeri vanno crescendo, così ad un numero $a'+K$ maggiore di a' dovrà corrispondere un logaritmo $A'+p$ maggiore di A'. La parte *proporzionale* p si troverà supponendo che gli *aumenti* dei logaritmi siano proporzionali agli aumenti de' numeri, il che non si allon-

tana molto dal vero quando le differenze δ, δ', δ'' non variano rapidamente. Si potrà fare perciò,

$$a''-a' : K :: A''-A' : p \text{ , ovvero}$$

$$i : K :: \quad \delta' : p = \delta' \frac{K}{i}$$

La parte proporzionale si ottiene dunque, *moltiplicando la differenza de' due logaritmi fra i quali deve cadere il logaritmo cercato per una frazione che ha per numeratore l' eccesso del numero dato sul prossimamente minore della tavola, e per denominatore l' intervallo della tavola.* Questa frazione rappresenta il *luogo* che occupa il numero proposto fra i numeri della tavola; così se $\frac{K}{i}$ fosse eguale ad $\frac{1}{2}$, indicherebbe che il proposto numero si trova precisamente in mezzo ai due a', a'' della tavola; se fosse eguale a $\frac{2}{3}$, indicherebbe che, dividendo l' intervallo i della tavola in tre parti eguali, ossia inserendo fra a' ed a'' due medie aritmetiche, il numero proposto coincide con la seconda di esse.

Nel 2.° caso, cioè quando i *logaritmi* vanno *diminuendo*, mentre i numeri vanno crescendo, è chiaro che la parte proporzionale $\frac{K}{i}\delta'$, sarà calcolata nell' ipotesi che gli *aumenti* de'numeri siano proporzionali alle *diminuzioni* dei logaritmi, e dovrà *togliersi* in vece di aggiungersi ad A', dimodochè il logaritmo del numero proposto $a+K$ sarà espresso da $A'-\frac{K}{i}\delta'$. Ma perchè l' uso delle parti proporzionali negative è incomodo, ed assolutamente da evitarsi nel calcolo, in questo secondo caso si darà al logaritmo $A'-\frac{K}{i}\delta'$ un altro aspetto; sarà cioè

$$A'-\frac{K}{i}\delta' = A'-\delta'+\delta'-\frac{K}{i}\delta'$$
$$= A'-\delta'+\delta'\left(1-\frac{K}{i}\right)$$

Or nella supposizione che i logaritmi vadano diminuendo è evidente che $A'-\delta' = A''$; dunque in questa ipotesi si avrà,

$$\mathrm{Log}(a'+K) = A''+\delta'\left(1-\frac{K}{i}\right);$$

cioè, *quando i logaritmi* vanno diminuendo, *si otterrà il logaritmo cercato, aggiungendo al logaritmo* A'' *del numero* a'', prossimamente maggiore *del dato, la parte proporzionale, che risulta dal prodotto della differenza* δ' *della tavola per il complemento*

all' unità della frazione $\frac{K}{i}$ *indicante il* LUOGO *del dato numero.*

IV. Allorchè il numero da porsi a calcolo si trova nel denominatore di una formola, è noto che, in vece del suo logaritmo, si deve prendere nella tavola il complemento aritmetico del logaritmo stesso. Si è veduto qui sopra che il logaritmo di $a'+K$, quando i logaritmi vanno *crescendo*, era $A'+\delta'\frac{K}{i}$; quindi il complemento del logaritmo sarà $(10-A')-\delta'\frac{K}{i}$, il quale esprime che deve prendersi nella tavola il complemento del logaritmo A' corrispondente al numero a' prossimamente minore del dato, e diminuirlo della parte proporzionale. Per evitare la parte proporzionale negativa, si metterà il complemento sotto quest' altra forma,

$10-(A'+\delta')+\delta'-\delta'\frac{K}{i}$, ed essendo $A'+\delta'=A''$, il complemento prenderà l'aspetto, $10-A''+\delta'\left(1-\frac{K}{i}\right)$. Ma $10-A''$

dinota il complemento del logaritmo A'' corrispondente al numero a'' *prossimamente maggiore* del dato, dunque *il complemento del logaritmo di un dato numero, quando la serie de' logaritmi è* crescente, *si otterrà, cercando nella tavola il numero* prossimamente maggiore *del dato, prendendo il complemento del suo logaritmo, ed aggiungendovi la parte proporzionale risultante dal prodotto della differenza della tavola per il complemento all'unità della frazione indicante il* LUOGO *del numero dato. Nel caso che la serie de' logaritmi fosse* decrescente, è facile provare che *il complemento logaritmo di un numero dato, si otterrà cercando nella tavola il numero* prossimamente minore, *prendendone il complemento logaritmo, ed aggiungendovi la parte proporzionale, che risulta dal prodotto della differenza della tavola per la frazione indicante il* LUOGO *del numero proposto.*

Si vede dunque che le regole riguardanti i *complementi* sono inverse di quelle relative ai *logaritmi*, e però riassumendo;

Per trovare il LOGARITMO *di un dato numero, se* i logaritmi vanno crescendo, *si cerca nella tavola il numero* prossimamente minore, *e se* vanno diminuendo *si cerca il numero* prossimamente maggiore; *il contrario si fa se deve trovarsi* il COMPLEMENTO logaritmo *di un numero dato. Quando poi si è preso nella tavola il numero* prossimamente minore *del dato, la parte proporzionale, che deve sempre aggiungersi, risulterà dal prodotto della*

differenza della tavola per la frazione indicante il LUOGO *del numero proposto; e quando si è preso nella tavola il numero* prossimamente maggiore, *la parte proporzionale risulterà dal prodotto della stessa differenza per il complemento all'unità della frazione accennata.*

Nelle tavole trigonometriche i seni e le tangenti vanno soggetti a regole contrarie a quelle de' coseni e delle cotangenti, perchè i seni e le tangenti crescono con l'arco, ed i coseni e le cotangenti diminuiscono. Quindi i logaritmi dei coseni e delle cotangenti si prendono come i complementi logaritmi de' seni e delle tangenti e viceversa.

V. Per trovare il numero corrispondente ad un dato logaritmo la regola è più semplice.

Si cerca sempre *nella tavola il logaritmo* prossimamente minore *del dato, e si* sottrae *dal logaritmo proposto; il resto si moltiplica per l'intervallo de' numeri della tavola, e si divide per la differenza dei logaritmi della tavola fra i quali è compreso il logaritmo dato. Il quoziente della divisione si* aggiunge *al numero della tavola corrispondente al logaritmo prossimamente minore se i logaritmi* vanno crescendo, *e si* toglie *da quel numero, se i logaritmi* vanno diminuendo. Tutto ciò appare manifesto dal valore della parte proporzionale trovata di sopra, cioè $p=\delta' \frac{K}{i}$; la quale uguaglianza si cangia subito nell'altra, $K=\frac{p \times i}{\delta'}$, che dà origine alla regola ora espressa.

VI. Rispetto alle caratteristiche de' logaritmi, ricorderemo; 1.° che la caratteristica del logaritmo di un numero dato si deve sempre dedurre dal luogo che occupa la prima cifra significativa del numero a sinistra; 2.° che trattandosi de' logaritmi delle frazioni decimali, in vece delle caratteristiche negative, si usano i loro complementi, come si osserva nella terza linea del seguente quadro in cui sono notate le caratteristiche de' logaritmi delle diverse classi di unità intere e decimali;

Caratteristiche	4	3	2	1	0,	—1	—2	—3	—4	—5...
Classi di unità...	1	1	1	1	1,	1	1	1	1	1 ...
Caratteristiche complementi........						9	8	7	6	5 etc.

3.° che per prendere la metà di un logaritmo che ha una caratteristica complemento, onde estrarre la radice quadrata dal numero corrispondente, si deve aggiungere 10 alla caratteristica prima di eseguire la divisione per 2; e se deve prendersi la terza parte di un simile logaritmo, si aggiungerà 20, e così di seguito.

Tutte le regole esposte in questo §. 53 si vedono applicate nel seguente esempio trigonometrico complessivo.

Calcolare la formola

$$\cos x = \sqrt{\frac{\tan 164^\circ.32'.24'',\ 80 \times \cos\ 65^\circ.12'.11'',40}{\text{sen}\ 77^\circ.15'.12'',\ 71 \times \tan 140^\circ.10'.27'',34}}$$

Log tan 15°.27′.30″	9,4417604	—
p.p. . . . 819×0,52	425.9	
Log cos 65 . 12. 20	9,6225912	+
p.p. . . 456×0,86	392.2	
C. log sen 77 . 15. 20	0,0108334	+
p.p. . . . 49×0,729	35	
C. log cot 50 . 10. 20	0,0788390	—
p.p. . . 428×0,734	314.2	
Log cos²x	19,1541407.3	
Log cos x	9,5770703.65	
Log cos 67°.48′.50″	9,5770508	
p.p. . . — 3 , 79	516 | 195.65	
x=67°.48′.46″, 21	3,79	

Termineremo queste considerazioni sul calcolo numerico rimandando coloro che desiderassero maggiori particolari all'*Appendice* aggiunta alla prima edizione di questa trigonometria. Non tralasceremo però la seguente osservazione di somma importanza in tutte le scienze applicate.

§. 54. Accade spesso che, per ridurre alcune espressioni letterali a forma più semplice e comoda nelle applicazioni, si sostituisce al seno o alla tangente di un arco piccolissimo, l'arco stesso, o viceversa. Allora ne' risultamenti finali viene a mancare l'omogeneità, la quale si ristabilisce mutando un piccolo arco in seno o in tangente, ed in altri casi, un seno o una tangente nel suo arco corrispondente. Ecco il principio sul quale si fonda questa permutazione. Se si supponga il raggio trigonometrico contorto ed applicato sulla circonferenza del cerchio cui appartiene, esso abbraccerà con la sua lunghezza un numero di gradi che indicheremo con R°. E chiamando π la semiciconferenza di raggio *uno*, la quale contiene 180 gradi, ed espressa in parti del raggio equivale a 3,1415926..., è chiaro che per determinare il numero R° servirà la proporzione,

$$\pi : 1 :: 180^\circ : R^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Il raggio abbraccerà dunque un numero di gradi della circonfe-

renza $=\frac{180}{\pi}$, o in vece un numero di minuti $=\frac{180\times60}{\pi}$, e un numero di secondi $=\frac{180\times60\times60}{\pi}$. Si avrà quindi,

Il raggio espresso in gradi . . . $R^\circ=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ,29578$

Il raggio espresso in minuti . . . $R'=\frac{10800'}{\pi}=3437',747$

Il raggio espresso in secondi . . $R''=\frac{648000''}{\pi}=206264'',8$

e per conseguenza,
$\log R^\circ=1,7581226$, $\log R'=3,5362739$, $\log R''=5,3144251$.
Laonde se da una formola si abbia un piccolo arco espresso per mezzo di linee trigonometriche, e per conseguenza in parti del raggio *uno*, esso si convertirà in gradi o in minuti o in secondi moltiplicandolo per R°, o per R', o per R''. Al contrario un arco espresso in gradi e frazioni di grado si convertirà in parti del raggio *uno* dividendolo per R°; e se è dato in minuti o in secondi si dividerà per R', o per R''. Per esempio, dal §. 8 si ha l'uguaglianza $x=\text{sen}x+\frac{\text{sen}^3x}{2.3}+\text{etc.}$, in cui il secondo membro non è omogeneo al primo, il quale esprime gradi, laddove il calcolo della serie darebbe una frazione indicante una parte del raggio trigonometrico. Ma si potrà ristabilire l'omogeneità moltiplicando il secondo membro per R°, perchè in tal modo quella frazione o parte del raggio delle tavole sarà valutata in gradi. Viceversa nell'altra eguaglianza $\text{sen}x=x-\frac{x^3}{2.3}+\text{etc.}$, affinchè il secondo membro sia omogeneo al primo, bisognerà esprimere l'arco x e le sue potenze in parti del raggio trigonometrico; al qual oggetto si sostituirà $\frac{x}{R^\circ}$ ad x nella serie. Le due serie preparate per il calcolo numerico saranno dunque,

$$x=R^\circ\left(\text{sen}x+\frac{\text{sen}^3x}{2.3}+\text{etc.}\right),\ \text{sen}x=\frac{x}{R^\circ}-\frac{1}{2.3}.\left(\frac{x}{R^\circ}\right)^3+\text{etc.}$$

È notabile che ad R'' si può sostituire con molta approssimazione $\frac{1}{\text{sen}\,1''}$, onde queste due espressioni si adoperano ne'calcoli una in

vece dell'altra indistintamente. Imperocchè $R''=\frac{648000''}{\pi}=\frac{1}{\frac{\pi}{648000}}$,

e siccome $\frac{\pi}{648000}$ rappresenta la lunghezza dell'arco di $1''$,

così $R''=\frac{1}{\text{arco}1''}$; ma per essere l'arco di $1''$ piccolissimo si

può considerare eguale al suo seno, dunque $R''=\frac{1}{\text{sen}1''}$.

Non sarà inutile ancora di avvertire che R' esprime il numero delle miglia geografiche da sessanta al grado contenute nel raggio della Terra, perchè il miglio geografico corrisponde appunto ad un minuto della circonferenza di un cerchio massimo della sfera terrestre, ed R' non è altra cosa se non se il numero di minuti della circonferenza di un cerchio qualunque contenuti nel raggio corrispondente.

CAPO V.

Della superficie del triangolo sferico, e di alcune espressioni dell'eccesso sferico.

* §. 55. È noto dalla Geometria che la superficie di un triangolo sferico qualunque equivale a tanti triangoli trirettangoli quanti angoli retti sono contenuti nell'*eccesso* della somma degli angoli del triangolo sopra due retti. Quindi se chiamiamo ρ il raggio della sfera, T la superficie del triangolo ed ε l'*eccesso sferico*, essendo il triangolo trirettangolo l'ottava parte della superficie della sfera, avremo

$$\left.\begin{array}{l} T=\frac{1}{2}\pi\rho^2\frac{\varepsilon}{90^\circ},\ \text{dove} \\ \varepsilon=A+B+C-180^\circ \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

La superficie di un triangolo sferico sarà dunque conosciuta quando si conoscerà il raggio della sfera cui appartiene e l'eccesso sferico. In vece di quest'ultimo basterà ancora che siano dati tre elementi del triangolo in qualunque modo presi, per mezzo de'quali si potranno determinare i tre angoli A, B, C e l'eccesso sferico che ne dipende.

Ma possono trovarsi direttamente alcune eleganti espressioni dell' eccesso sferico in funzione dei lati e degli angoli del triangolo. Dall' uguaglianza

$\varepsilon = A+B+C-180°$, si desume $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{A+B+C}{2} - 90°$,

e quindi

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2} = -\operatorname{sen}\left\{90° - \left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right)\right\} = -\cos\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right)$$
$$= \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Si sostituiscano a $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)$, $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ i valori dati dalle formole (B) del §. 36, e sarà

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right\},$$

ovvero (§. 6, 4)

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}C}{\cos\frac{1}{2}c} \quad . . . (17).$$

Ponendo in vece di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$, $\cos\frac{1}{2}C$ i radicali che si adoperano nella risoluzione del primo caso de' triangoli sferici, si avrà

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}$$

dove $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. E riflettendo che $\operatorname{sen}a = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$, $\operatorname{sen}b = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b$, sarà in fine

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad . . . . . (18).$$

* §. 56. Troviamo ora il valore di $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$. Sarà

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - 90°\right) = \cos\left(90° - \frac{A+B+C}{2}\right)$$
$$= \operatorname{sen}[\tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}C] = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C,$$

e sostituendo, come sopra, a $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)$, $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ i loro valori dati dalle formole (B), si avrà

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \cos^2\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} + \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Ma $\cos^2\frac{1}{2}C = \frac{1+\cos C}{2}$, $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C = \frac{1-\cos C}{2}$, dunque

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) + \cos\frac{1}{2}(a+b)}{2\cos\frac{1}{2}c}$$
$$+ \frac{\cos C[\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}(a+b)]}{2\cos\frac{1}{2}c}, \text{ ovvero}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c} \quad . . . . (19).$$

A questa espressione di $\cos\frac{1}{2}s$ può darsi un'altra forma molto elegante e simmetrica riflettendo che, $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$ ovvero, esprimendo i seni e coseni de' lati in seni e coseni di archi metà (§. 4),

$$\cos C = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}c - 2\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b - 1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b}.$$

Pongasi in luogo di $\cos C$ questo valore, e si avrà immediatamente

$$\cos\tfrac{1}{2}s = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}c - 1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

* §. 57. Dalle precedenti formole si possono anche dedurre $\tan\frac{1}{2}s$ e $\tan\frac{1}{4}s$. Si divida l'equazione (17) per la (19) e si otterrà,

$$\tan\tfrac{1}{2}s = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C}, \text{ ovvero}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}s = \frac{\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\operatorname{sen}C}{1 + \tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\cos C}, \text{ e } \cot\tfrac{1}{2}s = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\operatorname{sen}C} \ldots (21)$$

che serve a calcolare l'eccesso sferico con due lati a, b e l'angolo compreso C.

Si sa inoltre che in generale $\tan\frac{1}{2}x = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (§. 4), e quindi anche $\tan\frac{1}{4}s = \frac{1-\cos\frac{1}{2}s}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s}$; ed introducendo in questa formola i valori di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}s$, $\cos\frac{1}{2}s$ dati dalle equazioni (18) e (20), sarà

$$\tan\tfrac{1}{4}s = \frac{1 - \cos^2\frac{1}{2}a - \cos^2\frac{1}{2}b - \cos^2\frac{1}{2}c + 2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}.$$

Il numeratore del secondo membro di questa uguaglianza è una funzione invariabile della stessa forma di quella considerata nel §. 6, e per ciò che si è detto nel §. 35, potrà mutarsi nel prodotto, $4\operatorname{sen}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{sen}\frac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{sen}\frac{1}{4}(a+b-c)$, ossia, $4\operatorname{sen}\frac{1}{2}p\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-c)$, ponendo $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$. Si avrà dunque

$$\tan\tfrac{1}{4}s = 4 \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}p}{\sqrt{\operatorname{sen}p}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-a)}{\sqrt{\operatorname{sen}(p-a)}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-b)}{\sqrt{\operatorname{sen}(p-b)}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-c)}{\sqrt{\operatorname{sen}(p-c)}};$$

e poichè in generale,

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{\sqrt{\operatorname{sen}x}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}x}, \text{ sarà}$$

$$\tan\tfrac{1}{4}s = \sqrt{\tan\tfrac{1}{2}p\tan\tfrac{1}{2}(p-a)\tan\tfrac{1}{2}(p-b)\tan\tfrac{1}{2}(p-c)} \quad \ldots \quad (22)$$

espressione elegantissima dovuta al signor *Luilhier* di Ginevra.

* §. 58. Le formole (17), (18). . . . . (22), applicate al triangolo polare, danno con facilità la semisomma p de' lati del triangolo espressa analogamente per mezzo degli angoli e di un lato, o degli angoli soltanto, o degli angoli e dell' eccesso sferico, come qui appresso;

$$\operatorname{sen} p = \frac{\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} \ldots\ldots (17)'\ (18)'$$

$$\cos p = \frac{\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos c - \operatorname{sen}\frac{1}{2}A \operatorname{sen}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}$$

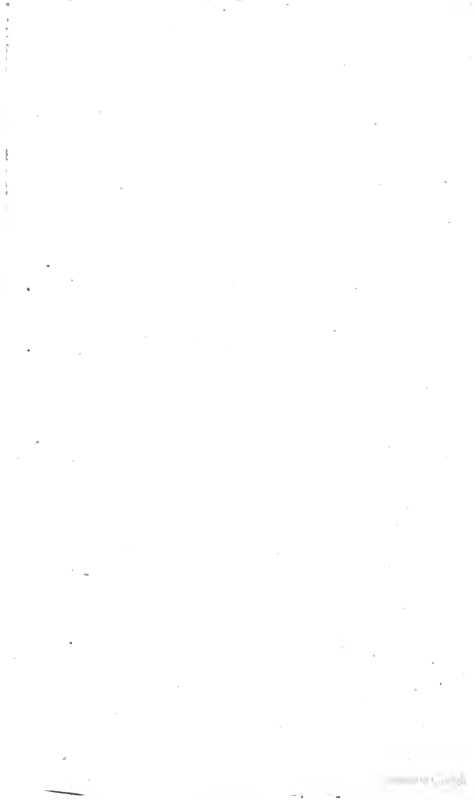
$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}B - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A \operatorname{sen}\frac{1}{2}B \operatorname{sen}\frac{1}{2}C} \ldots\ldots\ldots\ldots (19)',\ (20)'$$

$$\tan p = \frac{\cot\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}B \operatorname{sen} c}{\cot\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}B \cos c - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)'$$

$$\cot\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\cot\tfrac{1}{4}\varepsilon \tan\tfrac{1}{2}(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\tan\tfrac{1}{2}(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\tan\tfrac{1}{2}(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)},\ \text{ovvero}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\frac{\tan\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}}{\tan\frac{1}{2}\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\tan\frac{1}{2}\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\tan\frac{1}{2}\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \ldots (22)'.$$

Ma queste relazioni si potrebbero anche trovare direttamente col metodo usato di sopra per ottenere le espressioni di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon$, $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ etc. (Veggasi la prima edizione di questa trigonometria).

§. 59. Porremo qui termine al presente trattato di Trigonometria, abbastanza esteso per servire a tutte le applicazioni che possono occorrere nella Geodesia. Non tratteremo appositamente della risoluzione di taluni casi particolari della Trigonometria per mezzo delle serie, e non aggiungeremo neppure una collezione di formole differenziali trigonometriche come fanno alcuni autori, ma le regole e le formole generali saranno da noi convenientemente modificate siccome se ne presenterà il bisogno, affinchè si concepisca meglio l' oggetto di quelle trasformazioni e la loro utilità nella pratica de' calcoli geodetici.

GEOGRAFIA MATEMATICA.

LIBRO SECONDO

PRINCIPII DI ASTRONOMIA.

CAPO PRIMO

Del moto diurno della sfera celeste.

Dell' orizzonte, de' verticali, dell' equatore e de' suoi paralleli.

§. 1. Osservando il cielo da un luogo elevato, o nel mezzo di una vasta pianura, ci appare come una volta semisferica che ha per base un cerchio, e per centro il punto in cui ci troviamo. Questo cerchio, che sembra essere il limite comune della terra e del cielo, si chiama *orizzonte*, ossia terminatore, perchè termina e circoscrive la nostra veduta, e separa la parte visibile del cielo dalla invisibile.

Rivolgiamo la nostra attenzione di giorno al Sole e di notte alle stelle, e scorgeremo ancora che sì l' uno che le altre hanno un movimento circolare ed obliquo rispetto al piano dell' orizzonte, giungono nel mezzo del loro corso ad una massima altezza, e da questa discendono gradatamente sino a toccare l' orizzonte ed occultarsi in un punto più o meno lontano da quello in cui si videro sorgere. Esaminati attentamente ed in molte sere successive i moti apparenti delle stelle, si conchiude che esse descrivono tanti cerchi paralleli fra loro, di diversa grandezza, e così disposti gli

uni rispetto agli altri, che l' insieme di tali movimenti potrebbe essere rappresentato dal moto unico della sfera celeste intorno ad un asse immobile obliquo all' orizzonte, considerando i corpi celesti come infissi nella superficie interna della sfera. Questo asse intorno a cui apparisce girare la sfera celeste dicesi *asse del mondo*, ed i suoi estremi si chiamano *poli*.

§. 2. Rappresentino $OZRN$ [*fig.* 1] la sfera celeste, C il suo centro dove si suppone situato l' osservatore, OR l' orizzonte, PP' l' asse del mondo, rq, mn, EQ, $m'n'$ etc. i cerchi paralleli descritti dagli astri. L' orizzonte OR separerà la parte del cielo OZR visibile per l' osservatore dalla parte ONR invisibile. Se dal centro C si supponga elevata la retta CZ perpendicolare all' orizzonte, essa prolungata sopra e sotto sino alla sfera celeste segnerà nella superficie sferica due punti Z,N, il primo dei quali, che trovasi a piombo sulla testa dell' osservatore, si chiama *zenit*, e l' altro opposto a questo e sotto l' orizzonte, si chiama *nadir;* la linea ZCN dicesi *verticale*.

§. 3. Ogni cerchio massimo ZAN che passa per lo zenit, ed è perpendicolare perciò all' orizzonte, dicesi *verticale*. L' arco AH di questo cerchio interposto fra un astro A, che trovisi sulla circonferenza di esso, e l' orizzonte si chiama *altezza* dell' astro, ed equivale all' angolo ACH formato all' occhio dell' osservatore fra la visuale CA diretta all' astro e la sua projezione CH sull' orizzonte. Secondo questa definizione, l' arco PR, il quale appartiene al verticale $ZPNO$ condotto per il polo, ed è compreso fra questo punto e l' orizzonte, si chiama *altezza del polo*. Se l' astro A' si trova al di sotto dell' orizzonte, l' arco $A'H$ del verticale compreso fra esso e l' orizzonte prende il nome di *depressione*. L' arco AZ del verticale compreso fra l' astro e lo zenit si chiama *distanza* dell' astro *dallo zenit*, ed è il complemento dell' altezza AH, perchè l' arco ZH compreso fra lo zenit e l' orizzonte è un quadrante.

§. 4. Fra i cerchi *paralleli* rq, mn, EQ, $m'n'$ etc. descritti dagli astri alcuni rimangono interi al di sopra dell' orizzonte come rq, ed altri sono intersegati dall' orizzonte. Tutti questi cerchi hanno per poli geometrici i punti P,P', ed i loro piani sono perpendicolari all' asse del mondo PP', nel quale sono allogati i loro centri; quindi di ogni cerchio che ha il suo centro sul raggio CP, elevato sull' orizzonte, cioè di qualunque cerchio compreso fra il cerchio massimo EQ ed il polo superiore P, la parte maggiore deve rimanere di sopra l' orizzonte e la minore di sotto, e dei cerchi compresi fra EQ ed il polo inferiore P' la minor parte rimane sopra l' orizzonte e la maggiore sotto. Il solo cerchio EQ, come massimo, è diviso in parti eguali dall' orizzonte.

§. 5. Il movimento di rotazione della sfera celeste del quale si ragiona, e di cui ogni astro partecipa, si chiama *moto diurno della sfera celeste*, o pure *moto diurno degli astri*, perchè si com-

pie in 24 ore; di modo che ciascun astro ritorna allo stesso punto del cielo, per esempio alla sua massima elevazione, al suo levare, o al suo tramontare, dopo il giro di 24 ore appunto. L'esperienza ha inoltre dimostrato che il moto diurno è *uniforme*, ed in conseguenza di ciò ogni astro che descrive il cerchio massimo EQ, distante dal polo per un quadrante, e diviso in parti eguali dall'orizzonte, rimane 12 ore al di sopra di questo piano ed un egual tempo al di sotto; onde il parallelo EQ da questa sua condizione particolare prende il nome di *equatore*. Per la stessa uniformità del moto diurno, gli astri i cui paralleli sono compresi fra l'equatore ed il polo superiore P, ossia quelli di cui la *distanza polare* è minore di un quadrante, come la mP, rimangono più tempo sopra l'orizzonte e meno sotto: fra questi è chiaro che gli astri i quali hanno una distanza polare, $rP = Pq$, eguale o minore dell'altezza del polo PR, stanno sempre al di sopra dell'orizzonte, cioè non tramontano mai, e che dei rimanenti stanno più lungamente sull'orizzonte quelli la cui distanza polare è più piccola. Gli astri che hanno una distanza polare, $m'P$, maggiore di 90° rimangono maggior tempo sotto l'orizzonte e minor tempo sopra; diminuisce sempre più questo tempo al crescere della distanza dell'astro dal polo superiore, e finalmente quando gli astri hanno una distanza polare maggiore di OP, supplemento dell'altezza PR del polo, non sorgono mai sull'orizzonte, come l'astro che descrive il parallelo $r'q'$. Gli archi di parallelo $gmh, LEM, g'm'h'$ etc. che rimangono al di sopra dell'orizzonte diconsi *archi diurni degli astri* che li descrivono, e gli archi $gnh, LQM, g'n'h'$, etc. che restano sotto l'orizzonte si chiamano *archi notturni*. Queste denominazioni sono improntate dal Sole, il quale come ogni altro astro sorge, per esempio, in un punto g dell'orizzonte, descrive l'arco gmh durante il *giorno*, tramonta nel punto h, e descrive durante la *notte* l'arco hng sotto l'orizzonte. I punti in cui sorge o tramonta un astro sono quelli nei quali la circonferenza del suo parallelo taglia la circonferenza dell'orizzonte; questi punti sono gli estremi L, M, di un diametro comune ai due cerchi, quando il parallelo è l'equatore, ma per ogni altro parallelo sono le estremità di una corda comune.

§. 6. I paralleli descritti dagli astri sono tanto più piccoli quanto l'astro è più vicino ad uno de' poli del mondo P, P'; e poichè ogni astro descrive il suo parallelo in 24 ore, è evidente che diversa è la velocità assoluta con la quale gli astri si muovono, quantunque la velocità angolare sia la stessa, perchè ciascuno in 24 ore compie il suo giro di 360 gradi. Dunque gli astri posti a diverse distanze dal polo, descrivono archi simili in tempi eguali, come gli AE, Br, e per l'uniformità del moto diurno, se ogni astro descrive 360° in 24^h, descriverà 15 gradi in 1 ora, 15 minuti di arco in 1 minuto di tempo, e 15 secondi in 1 se-

condo. Gli astri posti in vicinanza del polo hanno un moto lentissimo, dovendo in 24^h percorrere la circonferenza di un cerchio piccolissimo, e se nel polo stesso vi fosse un astro, esso non cambierebbe di luogo nel cielo.

Del meridiano.

§. 7. Il cerchio massimo $OZPN$ che passa per lo zenit e pel polo è per questa ragione perpendicolare all'equatore ed all'orizzonte; quindi la retta LM comune sezione di questi ultimi due piani è perpendicolare al cerchio $OZPN$ ed a tutte le rette che sono in esso, come le CE,CO. L'angolo ECO misura perciò l'inclinazione de' due piani ECL,OCL cioè l'inclinazione dell'equatore sull'orizzonte. L'arco EO equivalente a quest' angolo si chiama ancora *l'altezza dell' equatore*, ed *è complemento dell' altezza del polo* PR, perchè se dalla semicirconferenza $OEPR$ si toglie l'arco EP eguale ad un quadrante, rimane la somma de' due archi OE,PR anche eguale a 90 gradi.

Il cerchio $OZPN$ passando per l'asse del mondo PP' in cui si trovano i centri di tutti i paralleli, divide per metà questi cerchi, e di più divide per metà anche gli archi diurni e notturni degli astri, dalla quale proprietà prende il nome di *meridiano*. In fatti, la retta gh parallela ad LM è al pari di essa perpendicolare al piano OZR del meridiano, e quindi gli angoli gam, ham; Oag, Oah sono retti; ed essendo le rette mn,OR diametri dei cerchi ai quali appartengono, ne segue che gli archi gm,mh corrispondenti ai primi due angoli sono eguali fra loro, come pure gli archi gO,Oh. Similmente si dimostra l'eguaglianza degli archi gn,nh, e quella degli archi gR,hR. Dunque il meridiano divide per metà gli archi diurni e notturni degli astri, non meno che gli archi dell' orizzonte compresi fra i punti del loro nascere e del loro tramontare; e per l'uniformità del moto diurno, tanto tempo corre dal sorgere degli astri sino al loro giungere al meridiano, quanto dal passaggio per il meridiano al tramontare.

§. 8. Il meridiano ha un'altra importante proprietà, cioè che gli astri acquistano la loro massima altezza quando giungono sulla sua circonferenza. Imperocchè, considerando un astro in un punto qualunque D del suo parallelo, DH sarà la sua altezza, e paragonandola all' altezza mO che l'astro acquista allorchè giunge nel punto m sul meridiano, sarà facile dimostrare $mO > DH$. Nel triangolo sferico ZDP un lato è minore della somma degli altri due, cioè $DP < ZD + ZP$; ma $DP = mP$, per essere P polo del parallelo mn, dunque $mP < ZD + ZP$, e togliendo di comune ZP, rimarrà $Zm < ZD$. Or se dai due archi ZO,ZH eguali, perchè quadranti, si tolgano le parti disuguali Zm,ZD, la relazione fra i residui mO,DH sarà contraria a quella sussistente fra le parti sottratte,

onde si avrà $mO > DH$. Da questa proprietà del meridiano ne segue che la massima altezza di un astro si chiama *altezza meridiana*, e l'astro quando giunge sul meridiano dicesi nella sua *culminazione*. Ma un astro qualunque passa sempre due volte pel meridiano, perchè la circonferenza di questo cerchio incontra quella del parallelo dell'astro in due punti: così l'astro che percorre il parallelo rq ha due passaggi pel meridiano, il *superiore* in r, e l'*inferiore* in q; e per un astro che tramonta il passaggio inferiore accade sotto l'orizzonte, come in n. È chiaro che fra i due passaggi di un astro corre l'intervallo di 12 ore; perciò il passaggio superiore del Sole accade a mezzogiorno e l'inferiore a mezzanotte. Nel passaggio inferiore l'astro ha la sua minima altezza sull'orizzonte: infatti, il triangolo sferico ZPs dà $ZP + Ps > Zs$, ovvero, per essere $Ps = Pq$, $Zq > Zs$, e quindi $qR < sK$.

L'equatore ed il meridiano essendo cerchi massimi, dividono la sfera in parti eguali; il primo divide la sfera in due emisferi $EPQ, EP'Q$ detti rispettivamente *boreale* ed *australe*, o *settentrionale* e *meridionale* dal nome del polo P, o P' che comprendono; ed il secondo divide la sfera in due emisferi $ZONRL, ZONRM$, chiamati *orientale* ed *occidentale*, perchè in essi rispettivamente sorgono e tramontano gli astri.

De' punti cardinali e del modo di riconoscerli. Della posizione degli astri rispetto all' orizzonte.

§. 9. La retta OR comune sezione, del meridiano con l'orizzonte dicesi *linea meridiana*. Perpendicolare ad essa è la retta LM, comune sezione dell'equatore e dell'orizzonte; gli estremi di questi due diametri ortogonali dell'orizzonte si chiamano i *quattro punti cardinali*. Il punto R dalla parte del polo boreale dicesi *nord*, *settentrione*, o *tramontana*; il punto O opposto ad esso si chiama *sud*, o *mezzogiorno*; il punto L dalla parte in cui sorgono gli astri si chiama *est*, *levante* oppure *oriente*, ed il punto ad esso opposto dalla parte in cui gli astri tramontano dicesi *ovest*, *ponente*, oppure *occidente*. Il verticale che passa per questi ultimi due punti, e risulta perpendicolare al meridiano, dicesi *primo verticale*.

Si notano nella circonferenza dell'orizzonte molti altri punti fra i quattro principali. Il punto distante 45° dal *nord* verso l'*est* si chiama *nord-est*; e similmente diconsi *nord-ovest*, *sud-est*, *sud-ovest* quelli compresi tra mezzo agli altri punti cardinali. La circonferenza dell'orizzonte si suddivide in parti anche più piccole di 45°, cioè in 16 ed in 32 parti eguali; ed i punti così determinati prendono i loro nomi da quelli tra i quali sono compresi, nel modo indicato dalla *fig.* 3, che rappresenta la così detta *rosa de' venti*, di cui si fa grande uso nella navigazione. Questi punti

secondarii servono specialmente a nominare i venti che spirano dai luoghi che essi occupano sulla circonferenza dell' orizzonte.

§. 10. La conoscenza dei punti cardinali è importante non solo pel geografo, ma per ogni uomo che vive in società. Riserbandoci di mostrare in seguito come si determina con esattezza la direzione della linea meridiana, indicheremo per ora in qual modo un osservatore può riconoscere con approssimazione i punti cardinali, il che si chiama *orientarsi.*

Essendo i punti cardinali le estremità di due diametri ortogonali dell' orizzonte, è chiaro che basterà riconoscerne uno per riconoscerli tutti. I punti più facili a riconoscersi sono il *nord* ed il *sud*. Havvi in cielo una stella detta *polare*, perchè vicinissima al polo; essa offre quindi l' opportunità di orientarsi di notte, poichè rivolgendosi alla medesima, ed immaginando un piano perpendicolare all' orizzonte condotto per la stella e per l' osservatore, l' intersezione di quel piano con l' orizzonte non può molto allontanarsi dalla linea meridiana. L' osservatore, rivolto alla stella, avrà in faccia il punto cardinale di *nord*, alla sua diritta l' *est*, alla sinistra l' *ovest*, e dietro le spalle il *sud*. Per distinguere in cielo la stella polare bisognerà cercare prima la *costellazione* (riunione di stelle) detta *orsa maggiore* dagli astronomi, e conosciuta dagli agricoltori col nome di *carro*. Questa costellazione è composta di sette stelle principali disposte come nella *fig.* 2; immaginando prolungato dalla parte superiore l' arco che unisce le due stelle α, β, ultime del carro, in modo che l'arco totale $\beta\alpha O$ eguagli presso a poco la distanza delle due stelle β, η, quell' arco passerà poco lontano dalla polare, che non potrà confondersi con alcuna delle stelle vicine, delle quali è molto più grande. Essa è la stella più luminosa della costellazione cui appartiene, chiamata *orsa minore*, e somigliante per la sua forma all' *orsa maggiore*.

Il Sole potrà servire per orientarsi di giorno. Si sa che questo astro perviene al meridiano nel punto preciso di mezzogiorno. Si attenderà dunque un tale istante, e l' ombra gettata da qualunque retta verticale, come un bastone, uno spigolo di muro etc. sarà una linea meridiana. L' estremità di questa retta dalla parte opposta al Sole indicherà il *nord*, e l' altro estremo il *sud;* l' *est* rimarrà alla sinistra dell' osservatore rivolto al Sole, e l' *ovest* alla diritta.

Da ciò che precede si desume che, per orientarsi, convien osservare la polare di notte o il Sole a mezzogiorno. Ma fatta una volta questa esperienza in un dato paese, non sarà più necessario ripeterla per orientarsi di nuovo, poichè basterà prolungare con l' immaginazione la riconosciuta linea meridiana, o la linea *est-ovest* ad essa perpendicolare, e notare gli oggetti terrestri che si trovano su i prolungamenti. Tali oggetti, specialmente se sono molto distanti, faranno le veci di punti cardinali pel dato luogo,

e ad essi potrà rapportarsi l'osservatore allorchè vuole orientarsi in qualunque ora del giorno. Sarà utile anche accrescere il numero di questi oggetti terrestri, notandone, oltre ai quattro corrispondenti a' punti cardinali, degli altri intermedii, in corrispondenza de'venti secondarii, *N.E*, *N.O*, *S.E*, *S.O*, *N.N.E* etc. i quali al pari de' primi potranno servire all' oggetto. Per esempio l' osservazione del Sole o della polare ha fatto conoscere che per la città di NAPOLI, *Capodimonte* trovasi al *nord*, *Capri* al *sud*, il *Vesuvio* all'*est*, e *Posilipo* al *sud-ovest*. Dall' osservazione del Sole a mezzodì si è veduto anche che la strada di *Toledo* è quasi una perfetta linea meridiana. Con questi dati si potrà in qualunque ora del giorno riconoscere l'orientazione di una casa o di una strada; o guardando uno degli oggetti lontani di conosciuta orientazione, o valutando mentalmente, per mezzo della nota disposizione de' luoghi, l' angolo che la facciata della casa o la linea della strada fa con *Toledo*, o con qualche altra strada ad essa parallela o perpendicolare.

§. 11. Ma l'orientazione di una retta orizzontale o di un piano verticale qualunque non si potrà ottenere con esattezza senza conoscere precisamente l' angolo che quella retta o quel piano fa con la linea meridiana. Un tale angolo dicesi *azimut*, e serve insieme con l' *altezza* [§. 3] a determinare la posizione di un oggetto terrestre, o di un astro, rispetto al piano dell' orizzonte. Così se il punto *A* della *fig.* 1 indicasse un oggetto terrestre tanto lontano da non potersi discernere ad occhio nudo, esso si troverebbe per mezzo di un cannocchiale annesso ad uno strumento graduato, quando fossero conosciuti i due angoli *OCH*, *HCA*, cioè l' orientazione del verticale, e l' angolo di elevazione dell' oggetto; perocchè, partendo dalla linea meridiana *OC*, si darebbe al cannocchiale un moto orizzontale *OCH* eguale all' *azimut* conosciuto, ed indi un moto verticale *HCA* eguale alla data altezza, dopo di che l' oggetto dovrebbe trovarsi nel campo del cannocchiale. Con lo stesso procedimento si potrà osservare un astro invisibile ad occhio nudo, o cercare una stella di giorno. L' *azimut*, considerato come un arco dell' orizzonte, si conta dall' estremo *sud* o dall'estremo *nord* della linea meridiana, e si estende d' ordinario sino a 180° verso oriente o verso occidente. Le indicazioni di *N.E*, *N.O*, *S.E*, *S.O* fanno conoscere il modo adottato nel valutare l' azimut; per esempio il punto *A* della *fig.* 1 può avere un azimut *S.E* eguale ad *OH*, o pure un azimut *N.E* eguale ad *HR*. L' angolo allo zenit *AZP* fra il polo ed il verticale equivale all' azimut contato dal *nord* e si adopera spesso in sua vece.

§. 12. Un astro qualunque *D* [*fig.* 1], descrivendo il suo parallelo *gmh* col moto diurno, cambia ad ogni istante di azimut e di altezza: quando sorge nel punto *g* il suo azimut *S.E* è massimo, e l' altezza è nulla; avvicinandosi al meridiano cresce l' altezza e

diminuisce l' azimut; nel meridiano l' azimut è nullo e massima l' altezza, e dopo il passaggio pel meridiano diminuisce l' altezza e cresce l' azimut *S.O*, sino a che nel tramontare dell' astro diviene nuovamente nulla l' altezza e massimo l' azimut. E siccome il meridiano divide in parti eguali l' arco diurno, non meno che l' arco dell' orizzonte compreso fra i punti del levare e del tramontare dell' astro, così l' azimut e l' altezza si estendono nell' emisfero occidentale fra gli stessi limiti che nell' orientale, ed hanno lo stesso progresso di aumento e di diminuzione, ma in ordine inverso.

§. 13. La posizione di un astro rispetto all' orizzonte data per mezzo dell' azimut e dell' altezza, è dunque variabile col tempo, e non può dirsi pienamente determinata se insieme con l'azimut e con l'altezza non si conosce ancora l'istante al quale si riferiscono. Questo istante ha una immediata relazione con l' angolo sferico *ZPD*, detto perciò *angolo orario*, e compreso fra il meridiano ed il cerchio massimo *PDd* condotto per il polo e per l' astro. Infatti, l' angolo *ZPD*, fatto al polo, è misurato dall' arco *Ed* dell' equatore, simile all' arco *mD* del parallelo dell' astro; per cui conoscendosi l' angolo *ZPD*, si conosce il numero di gradi dell' arco *mD* interposto fra l' astro ed il meridiano: e poichè un astro descrive 15 gradi del suo parallelo in un' ora, se l' angolo *ZPD* è di 15°, l' astro *D* dovrà impiegare un' ora a percorrere l' arco *mD*, se è di 30°, impiegherà due ore, e così di seguito. Laonde, supponendo che l' astro si trovi nell' emisfero orientale, l' angolo orario diviso per 15 farà conoscere quanto tempo deve trascorrere perchè l' astro giunga sul meridiano, e nel caso che l' astro si trovasse nell' emisfero occidentale, l' angolo orario indicherà da quanto tempo l' astro è passato pel meridiano.

Il cerchio massimo *PDd* condotto per il polo e per l' astro, dicesi *cerchio orario*, o anche cerchio di *declinazione*. Questa seconda denominazione ha origine da che, essendo l' arco *Pd* perpendicolare all' equatore, serve a misurare la minima distanza *Dd* dell' astro dalla circonferenza dell' equatore medesimo; la quale distanza si chiama *declinazione* dell' astro (allontanamento dall' equatore), ed è complemento della sua distanza polare. La declinazione si distingue in *boreale* ed *australe*, secondo che l'astro cui si riferisce sta nell' emisfero boreale o nell' emisfero australe, ed essa si estende da zero sino a 90 gradi; un astro che stesse precisamente sull' equatore non avrebbe declinazione, e se si trovasse in uno de' poli avrebbe una declinazione di 90°, boreale od australe.

Il meridiano, passando per lo zenit e per il polo, è verticale e cerchio di declinazione ad un tempo, e però serve anche a valutare la declinazione degli astri; anzi quando un astro *D* è giunto sul meridiano nel punto *m*, la sua declinazione *mE* risulta dalla differenza fra la sua altezza meridiana *mO*, e l'altezza *EO* dell'equatore.

§. 14. Il triangolo sferico ZPD, cioè il triangolo *zenit-polo-astro*, i cui lati sono complementi rispettivamente dell'altezza dell'astro, della sua decliuazione e dell'altezza del polo, serve come si vedrà, a risolvere tutti i problemi di Geografia matematica che hanno relazione col moto diurno. Esso ci avverte già, che un astro, il quale nel muoversi della sfera celeste si mantiene sempre alla stessa distanza dal polo, ha due posizioni simmetriche rispetto all'orizzonte, una nell'emisfero orientale e l'altra nell'emisfero occidentale. Imperocchè, siccome ad ogni altezza dell'astro nell'emisfero orientale ne corrisponde una eguale nell'occidentale, eguali sono ancora le distanze dell'astro dallo zenit, $DZ, D'Z$, nelle due posizioni; ed essendo costanti i rimanenti lati *polo-zenit*, *polo-astro* del triangolo sferico, ciascuno degl'infiniti triangoli ZPD, che si formano col movimento dell'astro nell'emisfero orientale, avrà il suo simmetrico ZPD' nell'emisfero occidentale. Quindi ad altezze eguali dell'astro ne' due emisferi corrisponderanno angoli eguali $DZP, D'ZP$, allo zenit, cioè azimuti eguali, ed anche angoli orarii eguali.

È da notare che i punti del levare e del tramontare sono diversi per i diversi astri; e sorgono nel punto cardinale di oriente e tramontano in quello di occidente solo gli astri che percorrono l'equatore. Ora, l'arco dell'orizzonte compreso fra il punto di oriente ed il punto in cui sorge un astro si chiama la sua *amplitudine ortiva;* e l'arco compreso fra il punto di occidente e quello in cui tramonta l'astro dicesi l'*amplitudine occidua*. L'amplitudine eguaglia dunque il complemento del massimo *azimut* dell'astro, ed è boreale od australe, secondochè il parallelo descritto dall'astro si trova compreso nell'emisfero boreale o pure nell'australe.

CAPO SECONDO

Del moto proprio degli astri, dell'eclittica, e del modo di determinare le posizioni degli astri.

Del moto proprio degli astri.

§. 15. Di tutti gli astri, il movimento diurno dei quali può esser rappresentato dal moto unico della sfera celeste intorno ad un asse obliquo all'orizzonte, la massima parte conservano sempre fra loro le stesse distanze e formano in cielo le stesse figure, come se fossero infissi alla superficie interna della sfera, ed obbligati a girare con essa.

Vi sono però alcuni corpi celesti che fanno eccezione a questa

regola. Essi non si levano sempre negli stessi punti dell'orizzonte, nè conservano fra loro e con gli altri astri le stesse distanze ; e però fanno supporre che oltre al moto diurno siano dotati, ciascuno in particolare, di un movimento proprio, col quale cambiano di posizione nel cielo. Tali astri si chiamano *pianeti* (che vuol dire stelle *erranti*) per distinguerli dagli altri corpi celesti, i quali, non avendo alcun moto particolare sensibile, diconsi *stelle fisse*. Gli antichi conoscevano cinque pianeti soltanto cioè, *Mercurio, Venere, Marte, Giove*, e *Saturno*. Nel 1781 ne fu scoperto un altro, che per la sua apparente piccolezza, e per la lentezza del suo movimento particolare era stato sino a quel tempo confuso colle stelle fisse; esso fu chiamato *Urano*, o *Herchel* dal nome del suo scopritore. Una esatta osservazione del cielo ne ha fatto scoprire nel principio di questo secolo altri quattro anche più piccoli ed invisibili ad occhio nudo cioè, *Cerere, Pallade, Giunone* e *Vesta*.

§. 16. Oltre a questi dieci pianeti, il Sole e la Luna hanno anche un sensibilissimo movimento particolare; anzi fra tutti gli astri la Luna è quella che offre l'esempio più notabile di questa seconda specie di movimento, che dicesi *moto proprio;* poichè in ogni mese essa fa il giro del cielo in una direzione contraria a quella del movimento generale, e mentre si leva e tramonta come tutti gli altri astri andando da oriente in occidente, ritarda ogni giorno, e sembra rimanere indietro dalle stelle, o ritirarsi verso l'oriente di circa 13 gradi.

Meno sensibile è il moto proprio del Sole, ma è anche facile osservarlo. È questo il fenomeno più importante che offra il cielo, poichè da esso dipendono la differenza delle stagioni, il caldo della state ed il freddo dell'inverno, come anche la lunghezza de' giorni e delle notti tanto variabile nel corso di un anno. Si osservi una stella fissa dalla parte di occidente dopo il tramontare del Sole, e si consideri attentamente per più giorni consecutivi alla stessa ora; si vedrà di giorno in giorno più vicina al Sole, sino a che scomparirà perdendosi ne' raggi di esso, dai quali era ben lontana ne' giorni precedenti. Sarà facile giudicare che il Sole si è avvicinato alla stella, e non la stella al Sole, poichè durante questo avvicinamento, e rimanendo ancora visibile la stella, si potrà osservare che essa conserva sempre la medesima posizione e le stesse distanze rispetto alle altre stelle. Da un'altra parte si osserverà che il Sole cambia ogni giorno i punti del suo levare e tramontare ; e continuando queste osservazioni per molto tempo, e col confronto di varie stelle, si conchiuderà che il Sole si accosta di giorno in giorno alle stelle che sono più orientali di lui, e si scosta da quelle che sono più occidentali. Questa è la ragione per cui le stelle si levano e tramontano ogni giorno quattro minuti più presto del giorno precedente, rispetto al Sole.

Così, se una stella tramonta in un dato giorno dell'anno otto minuti dopo del Sole, due giorni dopo tramonterà insieme col Sole.

Il moto proprio del Sole, che abbiamo veduto eseguirsi da occidente verso oriente, è poco meno di un grado di cerchio massimo della sfera celeste in un giorno; dimodochè in 365 giorni circa il Sole fa l'intero giro del cielo e riviene alla stessa posizione rispetto alle stelle. Il tempo che impiega a compire questa rivoluzione è quello che si chiama *anno*, ed in conseguenza il moto proprio con cui la eseguc dicesi anche *moto annuale*.

§. 17. Per dare un'idea sensibile del moto proprio degli astri combinato col moto diurno, si supponga che la sfera rappresentata nella *fig*. 1 sia un corpo solido, per esempio una palla, e si aggiri intorno all'asse PP' da L verso E. Situato un oggetto immobile in A o in B, esso descriverà nello spazio, durante il giro della sfera solida, un cerchio massimo EQ o un cerchio minore rq, ritornando dopo un'intera rotazione alla medesima posizione che aveva prima; e fin qui non si ha che l'idea del moto diurno. Ma se, mentre la sfera gira da L verso E, un insetto situato in A o in B si muove lentamente in direzione contraria da A verso L o da B verso q, allora, dopo un'intera rivoluzione della sfera solida, quando i punti A, o B di partenza dell'insetto saranno ritornati alla stessa posizione di prima, l'insetto si troverà in un altro punto della superficie sferica fra A ed L, o fra B e q; ed il suo doppio movimento imiterà il moto del Sole e della Luna che si avanzano a poco a poco verso oriente, mentre sono trasportati ogni giorno con tutto il cielo verso occidente. L'insetto col suo moto proprio potrebbe descrivere sulla sfera solida qualunque curva o qualunque cerchio, deviando dalla direzione del parallelo che descrive nello spazio in forza del moto di rotazione della sfera, al quale esso non prende alcuna parte; ed è questo il caso del Sole, della Luna e de' pianeti.

§. 18. Il moto proprio del Sole e della Luna differisce però da quello de' pianeti per una notabile particolarità; il Sole e la Luna seguono costantemente il loro corso da occidente verso oriente sino a compire l'intero giro del cielo, laddove i pianeti, dopo aver descritto un certo arco in quella direzione, rallentano a poco a poco il loro movimento, compariscono per alcuni giorni stazionarii, ed indi, muovendosi di nuovo, descrivono un arco in direzione contraria alla precedente, cioè da levante verso ponente. Queste apparenze sono dette *stazioni*, e *retrogradazioni* dei pianeti, chiamandosi *retrogrado* il moto da oriente verso occidente, perchè contrario in direzione al moto proprio del Sole. Parlando del sistema del mondo vedremo che il Sole e la Luna, quantunque abbiano un moto proprio, non sono pianeti, e senza altro studio, li vediamo già distinguersi da quelli per l'andamento dello stesso loro moto proprio.

§. 19. I pianeti, cambiando di luogo nel cielo, prendono diverse posizioni rispetto al Sole. Mercurio e Venere non si allontanano dall' astro maggiore se non per una limitata distanza angolare detta *elongazione*, la quale per Mercurio non eccede 28°.48′, e per Venere 47°.12′. Dopo questo massimo allontanamento i due pianeti si accostano di nuovo al Sole da cui si allontanano poi dall' altra parte per un angolo egualmente limitato. Tutti gli altri pianeti non seguono la stessa legge, ma la loro *elongazione* dal Sole può estendersi da 0° sino a 180°, vale a dire che possono esser veduti in un luogo del cielo diametralmente opposto a quello in cui si trova il Sole. Questa posizione de' pianeti dicesi *opposizione*, e si distingue dalla *congiunzione*, che avviene quando la loro elongazione dal Sole è nulla, o sia quando essi sono veduti dalla stessa parte e nella medesima direzione del Sole. Venere e Mercurio avendo un' elongazione limitata, non si veggono mai in *opposizione* col Sole.

§. 20. I pianeti osservati col cannocchiale presentano un disco luminoso più o meno grande quasi senza alcuna irradiazione, ed un medesimo pianeta apparisce in diversi tempi di diversa grandezza; il che dimostra che esso non è sempre alla stessa distanza dalla Terra. Il contrario accade delle stelle fisse, delle quali la luce diviene nel cannocchiale oltre modo viva e brillante, senza che esse presentino un diametro sensibile. Si osservano inoltre in Mercurio ed in Venere le stesse fasi della Luna, nelle varie posizioni che prendono questi pianeti rispetto al Sole. Marte ancora, quando la sua distanza augolare dal Sole è di circa 90°, comparisce di forma ellittica; ma gli altri pianeti per la loro grande distanza non presentano fase sensibile. Queste apparenze fanno conoscere che i pianeti sono corpi opachi, i quali ricevono la loro luce dal Sole e la riflettono a noi, laddove le stelle fisse hanno una luce propria e simile a quella del Sole.

§. 21. I cannocchiali han fatto anche scoprire vicino ad alcuni pianeti certi piccoli corpi celesti che intorno ad essi si aggirano, e sono chiamati *satelliti* o *pianeti secondarii. Galileo* fu il primo ad osservarne quattro intorno a Giove, e ne furono in seguito scoperti sette intorno a Saturno, e sei intorno ad Urano.

L' astronomia moderna annovera fra i corpi celesti anche le *comete*, che gli antichi supponevano essere semplici meteore. Questi astri si distinguono dai pianeti per la loro apparenza, essendo per lo più accompagnati da una nebulosità in forma di chioma o di coda. Il ritorno delle comete, calcolato, e confermato dal fatto per alcune di esse, pone fuori dubbio la loro origine siderea.

Dell' ecclittica.

§. 22. Esaminate attentamente le diverse posizioni che prende il Sole nel cielo col suo moto proprio si è osservato; 1.° che nei soli giorni 21 marzo e 23 settembre l' altezza meridiana del Sole pa-

reggia quella dell'equatore, per cui l' astro si trova allora sulla circonferenza di questo cerchio; 2.° che nei giorni compresi fra il 21 marzo ed il 23 settembre l'altezza meridiana del Sole è maggiore di quella dell'equatore, e n'è minore in tutto il resto dell'anno; 3.° che tanto si allontana il Sole dall'equatore nell'emisfero boreale, quanto se ne allontana nell'emisfero australe; poichè la differenza fra la massima altezza meridiana del Sole e l'altezza dell'equatore è uguale alla differenza fra quest' ultima e la minima altezza del Sole, cioè la massima declinazione boreale del Sole, che si verifica il 21 di giugno, eguaglia in valore la massima declinazione australe, che si verifica il 22 di decembre [§.13], essendo ciascuna di 23°.28'; 4.° che il Sole non perviene per salti ma gradatamente alla sua massima declinazione boreale, nè discende se non per gradi da quella sua posizione sino ad acquistare la massima declinazione australe; 5.° che i due luoghi che occupa il Sole nel cielo in un giorno qualunque dell'anno e sei mesi dopo corrispondono alle estremità di un diametro della sfera celeste. Queste semplicissime osservazioni fecero conoscere che la curva descritta dal Sole col suo moto proprio poteva esser rappresentata da un cerchio massimo della sfera celeste inclinato all'equatore sotto un angolo di 23°.28'. Un tal cerchio si è chiamato *ecclittica* da che la Luna si trova sempre sopra di esso, o ad esso molto vicina quando accadono gli ecclissi di Sole o di Luna.

§. 23. L' ecclittica che può esser rappresentata dal cerchio *HT* [*fig.* 4] divide l' equatore in parti eguali ne' punti opposti *A,A'* i quali si chiamano *punti equinoziali*, perchè quando il Sole si trova in uno di essi descrive in quel giorno sensibilmente l'equatore col moto diurno, ed in conseguenza si trova 12 ore sopra e 12 ore sotto l'orizzonte, cioè il giorno è eguale alla notte. Il punto *A* in cui il Sole attraversa l' equatore passando dall'emisfero australe nel boreale dicesi *punto equinoziale di primavera*, e l' altro *A'* per il quale passa quando dall' emisfero boreale va nell' australe si chiama *punto equinoziale di autunno*. Il passaggio del Sole pel punto *A*, ossia l' *equinozio di primavera*, avviene il 21 marzo, ed il passaggio pel punto *A'*, o l' *equinozio d'autunno*, avviene il 23 settembre.

Abbandonando il Sole i punti *A,A'* si allontana dall'equatore, ed è chiaro che il massimo allontanamento da questo cerchio deve verificarsi quando si trova distante 90° dai punti medesimi, il che accade una volta sopra e l'altra sotto l'equatore. Questi due punti *H,T* di massimo allontanamento si chiamano *solstizi (solis stationes)* non perchè il Sole si fermi in essi, ma perchè nelle loro vicinanze rimane per più giorni quasi alla stessa distanza dall'equatore. Il solstizio situato nell'emisfero boreale è per noi quello di estate, perchè il Sole passa per quel punto nel giorno 21 giugno, e l' altro che trovasi nell' emisfero australe è il *solstizio d' inverno*, ed il Sole vi perviene ai 22 decembre.

Da tutto ciò risulta che il cerchio massimo descritto dal Sole col suo moto proprio ed il tempo impiegato a descriverlo, cioè l'anno, rimangono naturalmente divisi in quattro parti principali che diconsi *le quattro stagioni* dell'anno. La *primavera* comincia il giorno 21 marzo, l'*estate* il 21 giugno, l'*autunno* il 23 settembre, e l'*inverno* il 22 decembre; ed i quattro quadranti dell'ecclittica corrispondenti a questi quattro tempi sono $AT, TA', A'H, HA$.

§. 24. Si chiama *obliquità dell' ecclittica* l'angolo che il piano di questo cerchio fa con l'equatore, il quale si è detto essere $23^{\circ}.28'$. L'obliquità dell' ecclittica non è costante, ma va lentamente diminuendo di $48''$ in ogni secolo. *La Place* ha però dimostrato che questa diminuzione dovrà col volgere de' secoli cambiarsi in aumento, non potendo mai il piano dell' ecclittica combaciare con quello dell'equatore. Gli angoli sferici $TAQ, TA'Q$ rappresentano l'obliquità dell' ecclittica, la quale è anche evidentemente misurata dalla massima declinazione australe o boreale HE, o TQ del Sole, e propriamente da quella che esso acquista nel giorno del solstizio. Il cerchio di declinazione che passa per gli equinozi si chiama *coluro degli equinozi*, e quello che passa per i solstizi dicesi *coluro dei solstizi*. Quest'ultimo è rappresentato dal cerchio $HpPP'$ della *fig.* 4; esso ha per poli geometrici i punti equinoziali, ed essendo perpendicolare all'ecclittica ed all'equatore, passa per i poli p, P di questi due cerchi.

§. 25. Variando giornalmente la declinazione del Sole, e quindi la sua distanza dal polo visibile, varia il parallelo da esso descritto col moto diurno, per cui deve necessariamente variare la durata dei giorni e delle notti, che sono il tempo della presenza e dell'assenza del Sole dall' orizzonte [§. 5]. Più il Sole si avvicina al polo visibile, maggiore è l' arco del parallelo che rimane al di sopra dell'orizzonte, e quindi più lungo è il giorno; e giunto il Sole ad avere la sua massima declinazione boreale nel solstizio di estate, percorrerà allora il parallelo più lontano dall' equatore e più prossimo al polo visibile, e si verificherà perciò il massimo giorno e la minima notte (*). Viceversa nel solstizio d'inverno sarà

(*) Quando si dice che il Sole descrive in un dato giorno un parallelo celeste, si suppone implicitamente che esso rimanga per tutte le 24 ore di quel giorno alla stessa distanza dall' equatore, ma ciò non è vero a rigore, poichè il Sole avanzando continuamente cammino nell' ecclittica, si trova in ogni istante ad una diversa distanza dall'equatore [§. 22], e quindi in un parallelo diverso. Esso descrive, in virtù del moto diurno combinato col moto annuo, piuttosto una spirale che un cerchio, ma per semplicità d'idee, e di espressioni, si suppone ne'primi elementi di astronomia che il moto diurno del Sole si faccia in un cerchio parallelo all' equatore, considerando come insensibile il suo avvicinamento ad uno de' poli nel tempo delle 24 ore. Trattandosi di calcoli astronomici, si ha riguardo a questa differenza.

minimo il giorno e massima la notte per trovarsi il Sole alla sua maggiore distanza dal polo superiore. Dal solstizio di estate al solstizio d'inverno i giorni diminuiranno continuamente, e da quest'ultimo al primo andranno continuamente crescendo. I paralleli descritti dal Sole ne'giorni de'solstizi diconsi *tropici*, e *tropico del cancro* è quello del solstizio di estate, di *capricorno* l'altro del solstizio d'inverno (*).

§. 26. Queste denominazioni hanno relazione con la divisione dell'ecclittica in 12 parti eguali dette *segni*, ognuno dei quali ha la lunghezza di 30 gradi. Gli antichi astronomi distinsero tali segni coi nomi ed i simboli seguenti;

♈	♉	♊	♋	♌	♍
Ariete,	*Toro*,	*Gemelli*,	*Cancro*,	*Leone*,	*Vergine*,
♎	♏	♐	♑	♒	♓
Libra,	*Scorpione*,	*Sagittario*,	*Capricorno*,	*Aquario*,	*Pesci*;

i quali nomi per ajuto della memoria furono poi compresi nei seguenti due versi latini,

Sunt *Aries*, *Taurus*, *Gemini*, *Cancer*, *Leo*, *Virgo*,

*Libra*que, *Scorpius*, *Arcitenens*, *Caper*, *Anphora*, *Pisces*.

In corrispondenza de' segni, furono distribuite ancora in 12 costellazioni tutte le stelle comprese in una zona della sfera celeste larga 18 gradi nel cui mezzo è posta l'ecclittica, indicandosi le costellazioni con gli stessi nomi dei segni. La zona fu detta *zodiaco* dalla parola greca *zoos*, animale, perchè alla maggior parte delle costellazioni in essa contenute si era dato il nome e la figura di un animale, come l'ariete, il toro etc.; ed in conseguenza i *segni* furon detti *dello zodiaco*. Fu assegnata poi allo zodiaco la larghezza di 18 gradi, affinchè avesse potuto in se comprendere tutti i pianeti conosciuti dagli antichi, nessuno de'quali si allontana dal piano dell'ecclittica per un angolo maggiore di 9°. Così si rendeva più agevole il determinare le posizioni de' pianeti col paragone delle stelle zodiacali, che venivano con grande cura osservate. Ma l'astronomia moderna poco può giovarsi dello zodiaco, poichè alcuno dei nuovi pianeti, potendo allontanarsi dall'ecclittica per più di 34°, se si estendesse lo zodiaco sino a 70°, esso abbraccerebbe la maggior parte del cielo.

(*) La parola tropico significa *ritorno*, perchè giunto il Sole sul tropico alla sua massima distanza dall'equatore, torna in certo modo indietro, avvicinandovisi di nuovo.

I sei segni *Ariete*, *Toro*, *Gemelli*, *Cancro*, *Leone* e *Vergine* si chiamano *boreali* perchè appartengono alla metà dell' ecclittica compresa nell' emisfero boreale, ed i rimanenti segni diconsi australi. I segni *Capricorno*, *Aquario*, *Pesci*, *Ariete*, *Toro* e *Gemelli* diconsi *ascendenti*, e gli altri *discendenti*, perchè, come si è veduto di sopra, il Sole dal solstizio d'inverno sino a quello di estate sale sempre accostandosi al polo superiore, ed in seguito sempre discende.

§. 27. I primi astronomi, dopo avere immaginata la divisione dell' ecclittica in 12 segni, per riconoscerli più facilmente nel cielo, credettero potersi servire delle costellazioni che allora occupavano lo stesso luogo, ed alle quali avevano dato lo stesso nome. Ma col volgere dei secoli i segni e le costellazioni corrispondenti non occuparono più il medesimo luogo nel cielo; per esempio, se in origine esisteva una stella precisamente nel punto equinoziale, ossia nella intersezione dell' equatore con l' ecclittica, dopo qualche tempo la stella non si trovò più in quel luogo. In conseguenza di questo fatto si domanda, se sono le costellazioni che si allontanano dai segni, oppure questi che si scostano da quelle. La prima ipotesi è molto improbabile, perchè, conservando le stelle sempre fra loro le stesse distanze e formando in cielo le stesse figure, bisognerebbe supporre che si accordassero tutte nell' allontanarsi dal punto equinoziale con un moto comune e progressivo. La seconda ipotesi in vece è più semplice, ed è sostenuta dalla moderna teòria dell' attrazione universale. La linea degli equinozi non è dunque stabile nel cielo, ma ha un lentissimo movimento angolare retrogrado di $50'',2$ in un anno; e dicesi retrogrado perchè si fa sull' ecclittica in direzione contraria a quella del moto proprio del Sole. In forza di tale movimento retrogrado il punto equinoziale di ariete che nell' anno 417 avanti l' era volgare corrispondeva al principio della costellazione di questo nome, corrisponde ora al principio della costellazione dei pesci, cioè ha retrogradato di 30 gradi.

Si è dato ad un tal fenomeno il nome di *precessione* degli equinozi, perchè per esso l' istante dell' equinozio viene ad essere alquanto anticipato. Di fatti, se il punto γ fosse fisso [*fig.* 4], partendo da esso il Sole dovrebbe descrivere col suo moto annuo l' intera circonferenza $\gamma T{\simeq}H\gamma$ dell' ecclittica per ritornarvi, ma se in un anno, mentre il Sole descrive l' ecclittica da γ verso $T, \simeq, H$ etc., il punto γ passa in γ', il Sole lo incontrerà di nuovo dopo aver descritto soltanto l' arco $\gamma T{\simeq}H\gamma'$ minore della circonferenza. Si distingue perciò l'anno *tropico* dall' anno *sidereo;* il primo è il tempo che impiega il Sole a descrivere l'arco $\gamma T{\simeq}H\gamma'$ dell' ecclittica, ossia a ritornare al punto equinoziale di primavera, ed il secondo è il tempo necessario a descrivere l' intera circonferenza $\gamma T{\simeq}H\gamma$ dell' ecclittica, ossia il ritorno del Sole allo stesso punto del cielo. Cono-

sciuta la durata dell' anno tropico per mezzo dell' osservazione, sarà facile dedurne quella dell' anno sidereo, supponendo gli archi percorsi proporzionali a' tempi impiegati a percorrerli. Le antiche osservazioni paragonate alle moderne hanno dimostrato che la durata dell' anno tropico è di giorni 365,242220, secondo il sig. *Bessel;* quindi la durata dell' anno sidereo si otterrà dalla proporzione, $360^\circ - 50'',224 : 360^\circ :: 365^g,24222 : S = 365^g,256374$; cioè l' anno sidereo è più lungo dell' anno tropico di soli 20',22'',93.

§. 28. La posizione dell' ecclittica rispetto all' equatore non varia col moto diurno della sfera celeste, poichè quantunque i punti equinoziali ed i solstiziali facciano il giro del cielo come una stella, essi conservano però fra loro e con l' equatore le stesse relative posizioni. Non accade così rispetto all' orizzonte; girando la sfera celeste, l' equatore ed i suoi paralleli mantengono sempre la stessa inclinazione con quel piano, perchè il movimento si esegue intorno ad un asse che è ad essi perpendicolare, ma aggirandosi l' ecclittica intorno ad un asse che le è obliquo, la sua inclinazione con un piano anche obliquo all'asse di rotazione, come è l'orizzonte, varia continuamente. In questo movimento dell' ecclittica i suoi poli p, p', i quali distano da quelli dell'equatore per un arco di 23°.28', quanta è l' obliquità dell' ecclittica, descrivono in cielo due cerchi minori paralleli all' equatore che diconsi *cerchi polari*, distinguendosi col nome di *artico* quello dell' emisfero boreale ed *antartico* quello dell' australe. I cerchi polari sono dunque distanti dall' equatore per 66°.32', complemento dell' obliquità dell' ecclittica.

§. 29. Il moto proprio del Sole dà origine ad una differenza essenziale fra il giorno solare ed il giorno *sidereo*. Gli astronomi chiamano *giorno solare astronomico*, o *giorno vero*, il tempo interposto fra due consecutivi passaggi del Sole per il meridiano, e giorno *sidereo* la durata di una intera rotazione della sfera celeste. Or supponendo che il Sole ed una stella partano insieme dal meridiano, la stella essendo priva di ogni movimento particolare, vi ritornerà quando la sfera celeste avrà compito il suo giro di 360°; ma il Sole, che contemporaneamente ha descritto col suo moto proprio un arco di un grado circa da occidente in oriente, o sia in direzione contraria del moto diurno, dovrà rimanere indietro della stella, ed impiegare altri 4 minuti di tempo per raggiungere il meridiano. Il giorno vero è dunque 4 minuti circa più lungo del giorno sidereo, e quindi l'*ora vera* è maggiore dell' *ora siderea* di circa 10''.

I ritorni del Sole al meridiano non accadono però ad intervalli di tempo eguali fra loro come quelli delle stelle, e perciò il giorno vero non è di una costante durata in tutto l'anno. Ciò avviene per due ragioni; 1° perchè gli archetti che il Sole descrive giornalmente sull'ecclittica col suo moto proprio non sono sempre della stessa lunghezza; 2.° perchè essendo inclinati alla direzione del moto diurno,

ossia all' equatore, quando anche tali archetti fossero eguali sull' ecclittica, non potrebbero risultare eguali le loro projezioni sull' equatore, dalle quali dipende il ritardamento del Sole rispetto alle stelle. Ma le variazioni alle quali è sottoposta la durata del giorno vero sono sempre molto piccole, e non maggiori di un secondo fra due giorni consecutivi, per cui non se ne tien conto negli usi civili. Nei calcoli astronomici non potendo trascurarsi tale disuguaglianza, gli astronomi per potersi servire del tempo solare, immaginarono che un sole fittizio con una velocità media di quelle che ha il Sole vero in tutti i giorni dell' anno e con moto uniforme descrivesse l' equatore, in vece dell' ecclittica, obbedendo contemporaneamente, come il Sole vero, al moto diurno della sfera celeste. L' intervallo di tempo fra due consecutivi passaggi di questo Sole fittizio pel meridiano fu detto *giorno medio*. Secondo tale ipotesi è evidente, che se il Sole vero, il quale cammina con moto vario, ed il Sole medio, che si muove uniformemente, partono insieme dal meridiano in un dato giorno dell' anno, non possono tornarvi insieme nei giorni seguenti, ma in alcuni tempi dell' anno il Sole vero precederà il Sole medio ed in altri lo seguirà, secondo che la sua velocità effettiva sarà maggiore o minore della velocità media. Il tempo che si frappone tra il passaggio del Sole vero e quello del Sole medio pel meridiano, o sia fra *mezzogiorno vero* e *mezzogiorno medio*, dicesi *equazione del tempo*. Essa è nulla quattro volte l' anno, cioè in quattro giorni dell' anno il Sole vero ed il Sole medio passano insieme pel meridiano; e sono attualmente il 15 *Aprile*, il 15 *Giugno* il 1.° *Settembre* ed il 24 *Decembre*. E quì deve osservarsi che in astronomia la parola *equazione* significa spesso una differenza fra due movimenti, come quelli cui ha relazione l' equazione del tempo.

Da quanto si è detto si raccoglie che debbono distinguersi tre specie di tempi, *tempo sidereo*, *tempo vero*, e *tempo medio*. I primi due esistono realmente in natura e dipendono dal moto diurno delle stelle fisse e del Sole, ed il terzo è un' invenzione degli astronomi. Il *tempo vero* è quello stesso che si usa nella vita civile, con la sola differenza che gli astronomi contano le ore da zero sino a ventiquattro cominciando da mezzogiorno, e per gli usi civili si divide il giorno in due periodi di dodici ore ciascuno, distinguendosi le ore del *mattino* dalle ore della *sera*; così *le 9 della mattina del giorno 4 Giugno*, sono 21 *ore di tempo vero del giorno 3 Giugno*, secondo gli *astronomi*. Noi ritorneremo più innanzi su questo importante soggetto del tempo.

Posizione degli astri rispetto all' equatore.

§. 30. L' intersezione dell' ecclittica con l' equatore offre due punti notabili nel cielo ai quali poter riferire le posizioni degli astri. L' equinozio di primavera è stato prescelto dagli astronomi

per origine delle coordinate che determinano il luogo dell' astro. Queste coordinate sono due archi di cerchio massimo perpendicolari fra loro, e prendono perciò il nome di *coordinate sferiche*.

Se per i poli del mondo e per un astro di cui si vuol determinare la posizione si faccia passare un cerchio massimo, la circonferenza di questo cerchio sarà perpendicolare a quella dell' equatore e la taglierà in due punti dipendenti dal luogo dell' astro: l' arco dell' equatore compreso fra l' equinozio di primavera ed il punto d' intersezione più vicino all' astro, dicesi *ascensione retta* dell' astro, e *declinazione* dell' astro medesimo si chiama (come è noto) l' arco del cerchio di declinazione interposto fra l' astro e l' equatore. Si è già detto che la declinazione è *boreale* o *australe*, ed essa equivale all' angolo formato dalla visuale diretta all' astro con la sua projezione sul piano dell' equatore; se si considera *positiva* la declinazione boreale, l' australe dovrà valutarsi ne' calcoli col segno *negativo*. L' ascensione retta poi si conta sull' equatore da occidente verso oriente, cioè *nella stessa direzione del moto proprio del Sole,* e si estende, cominciando dall' equinozio, da zero sino a 360 gradi. Così la posizione dell' astro S [*fig.* 4] sarà determinata dalle due coordinate sferiche $\gamma M, MS$, e quella dell' astro S' dalle $\gamma QEM'$, ed $S'M'$; dove è da notare che questo secondo astro ha una declinazione $S'M'$ australe ed un' ascensione retta maggiore di 180°.

§. 31. L' ascensione retta e la declinazione di un astro non cambiano col moto diurno della sfera celeste, perchè il punto equinoziale ed il cerchio di declinazione dell' astro partecipano allo stesso movimento. Quando il punto equinoziale si trova nel meridiano l' ascensione retta è un arco dell' equatore compreso fra il meridiano ed il cerchio di declinazione, ed eguaglia perciò l' angolo orario dell' astro [§. 13]; di modo che, il tempo che corre fra il passaggio del punto equinoziale pel meridiano ed il passaggio dell' astro è eguale all' ascensione retta di questo divisa per 15. Si comprende perciò facilmente, 1.° che *due astri i quali hanno la stessa ascensione retta passano contemporaneamente pel meridiano*, poichè qualunque siano le loro declinazioni, i due astri dovranno trovarsi sempre sullo stesso cerchio di declinazione, come gli S,s della *fig.* 4, ed avranno in conseguenza lo stesso angolo orario; 2.° che incominciando a contare il tempo dal momento in cui il punto equinoziale γ, che ha zero di ascensione retta passa pel meridiano, *fra gli astri che hanno diversa ascensione retta, passano prima per il meridiano quelli che hanno un' ascensione retta minore*, perchè situando il punto γ nel meridiano, l' astro che ha minore ascensione retta ha pure un angolo orario minore.

§. 32. La posizione degli astri rispetto all' equatore si può ottenere direttamente per mezzo di osservazioni astronomiche. È

facile misurare la declinazione di un astro, ma bisogna prima conoscere l' altezza del polo sull' orizzonte del luogo. A questo oggetto si sceglie una di quelle stelle che non tramontano mai, e per la loro vicinanza al polo son dette *circompolari*; si aspeta al suo passaggio superiore pel meridiano, in r per esempio [*fig.* 1], e si misura la sua altezza rR con un cerchio graduato; dopo dodici ore, quando la stella passa di nuovo pel meridiano in q, si misura l' altra altezza meridiana qR. Per l' eguaglianza delle distanze rP,qP della stella dal polo, i tre archi rR,PR,qR, sono in proporzione continua aritmetica, e però si otterrà il valore PR di quello di mezzo, prendendo la semisomma de' due estremi rR,qR, dati dall' osservazione. Determinata così l' altezza del polo, sarà conosciuta anche quella EO dell' equatore che n' è complemento; e per ottenere la declinazione di una stella qualunque D, che percorre il parallelo nm, si attenderà che giunga sul meridiano nel punto m, si misurerà la sua altezza mO, dalla quale tolta l' altezza EO dell' equatore, si avrà per residuo la declinazione cercata mE [§. 13]. Se l' altezza dell' astro fosse minore di quella dell' equatore il residuo sarebbe negativo ed indicherebbe che l' astro ha una declinazione australe.

Riguardo all'ascensione retta, rappresenti SN il meridiano [*fig.* 5], EQ l' equatore, ed $aa'a''$ un suo parallelo; sia γ il punto equinoziale da cui si contano le ascensioni rette $\gamma A,\gamma A',\gamma A'',\ldots$ dei punti $A,A',A''\ldots$ dell' equatore, e degli altri $a,a',a''\ldots$ posti coi primi su gli stessi cerchi di declinazione, ed aventi perciò la stessa ascensione retta. Supponiamo che nel momento in cui il punto γ col moto diurno giunge sul meridiano si ponga in movimento un orologio astronomico, che segna le ore, i minuti ed i secondi, avendo prima situato i suoi indici sopra $0^h.0'.0''$. Girando la sfera celeste in modo da terminare la sua rotazione in 24^{ore}, tutte le volte che l' orologio segnerà $0^h.0'.0''$, l' equinozio γ sarà ritornato sul meridiano. Siccome poi il moto diurno della sfera è uniforme, così in un' ora il punto γ si allontanerà dal meridiano per la 24^{ma} parte di $360°$, cioè per $15°$, e quindi, allorchè l' orologio segnerà $1^h.0'.0''$ saranno nel meridiano tutte le stelle che hanno $15°$ di ascensione retta, per esempio le A,a; quando segnerà $2^h.0'.0''$ passeranno pel meridiano le stelle che hanno $30°$ di ascensione retta, come le A',a', e così di seguito. Laonde il tempo dell'orologio convertito in gradi, a ragione di $15°$ per un' ora, darà l' ascensione retta delle stelle che in quell' istante trovansi nel meridiano. A cagion d' esempio se una stella passa pel meridiano mentre l' orologio segna $5^h.2'.25'',4$, l' ascensione retta della stella sarà $75°.36'.21''$. Dunque per misurare l' ascensione retta di un' astro, si aspetta che giunga al meridiano, e l' ora che segna l' orologio in quell' istante si converte in gradi e dà l' ascensione retta cercata. Tutto ciò suppone però che l' orologio sia regolato in modo da

segnare $0^h.0'.0''$ quando il punto equinoziale passa pel meridiano, e che il tempo delle sue 24 ore sia eguale perfettamente a quello impiegato dalla sfera celeste a compiere una intiera rotazione. Questa seconda condizione potrà facilmente ottenersi paragonando fra loro i tempi di due successivi passaggi di una medesima stella fissa pel meridiano, o per un medesimo punto del cielo, poichè se la differenza di questi tempi è di 24 ore precise, l'orologio sarà ben regolato; altrimenti si correggerà la macchina in modo che l'osservata differenza risulti appunto di 24^h, oppure si terrà conto del suo accelcramento o ritardamento diurno. La prima condizione dipende dal moto proprio del Sole e si ottiene osservando questo astro nelle vicinanze degli equinozi [§. 35].

Non è questo il luogo di descrivere i mezzi meccanici, o siano gli strumenti coi quali si possono misurare le altezze degli astri ed osservare i loro passaggi per il meridiano. Nel Libro V daremo la descrizione degl'istrumenti usati dagl'ingegneri geografi, e per ora ci contenteremo di accennare che per misurare le altezze degli astri, o le loro distanze dallo zenit si adopera un cerchio graduato che si situa nel piano del verticale dell'astro, e si suppone concentrico con esso; e per osservare i passaggi degli astri per il meridiano si fa uso di un cannocchiale che si muove nel piano del meridiano stesso intorno ad un asse situato su due appoggi stabilissimi esistenti nel piano del primo verticale.

§. 33. L'orologio astronomico adattato come quì sopra alla determinazione delle ascensioni rette degli astri dicesi regolato *sul tempo sidereo*. L'origine di questo tempo, o sia il principio del *giorno sidereo* è l'istante in cui il punto equinoziale passa pel meridiano, e quindi un tempo sidereo qualunque non è se non l'arco dell'equatore compreso fra il punto equinoziale ed il meridiano contato da occidente in oriente, e diviso per 15; quest'arco si chiama *ascensione retta dello zenit*, o pure *ascensione retta del mezzo del cielo*. Dopo di ciò è evidente che, se un astro si trova nel meridiano, la sua *AR* (ascensione retta) in quell'istante eguaglia l'*AR* del mezzo del cielo, e divisa per 15 rappresenta il tempo sidereo del passaggio dell'astro pel meridiano; così l'*AR* del Sole a mezzodì vero corrisponde al tempo sidereo del passaggio di quell'astro. In conseguenza, per determinare l'errore di un orologio che deve indicare il tempo siderco, bisogna osservare il passaggio al meridiano di un astro di cui si conosce l'*AR*, e vedere se l'orologio segna in quell'istante un'ora eguale all'*AR* medesima ridotta in tempo; la differenza in più o in meno fra l'ora dell'orologio e l'*AR* dell'astro sarà l'accelerazione o il ritardamento totale dell'orologio, ovvero la sua *deviazione* dal tempo sidereo. Trattandosi di un orologio astronomico, si tien conto di questa deviazione, piuttostochè annullarla movendo gl'indici, di modo che ripetendo l'osservazione del passaggio dell'astro per più

giorni di seguito, si notano sempre le deviazioni corrispondenti. La differenza fra le deviazioni di due giorni successivi esprime la deviazione o la *variazione diurna* dell' orologio, e se questa variazione si conserva la stessa per più tempo, o varia lentamente, si conchiude che l'*andamento* dell' orologio è regolare. Ecco come si formano simili quadri;

Data	*Deviazione dal tempo sidereo*	*Variazione diurna*	*Diff.*
4 *Giugno*	$-3'.57'',35$		
5	3 .56 ,22	$+1'',13$	
6	3 .55 ,00	1 ,22	$0'',09$
7	3 .53 ,91	1 ,09	0 ,13
8	3 .52 ,70	1 ,21	0 ,12

Secondo questo procedimento, per giudicare della bontà di un orologio, sono necessarie almeno tre osservazioni onde poter paragonare tra loro due variazioni diurne ed esaminare se sono eguali o poco differenti: perocchè la *deviazione* dal tempo che serve di modello è un errore d' indice, che si può correggere facilmente; la *variazione diurna* è un errore di *registro*, che anche può togliersi, facendo avanzare o ritardare l' orologio, con accorciare o allungare il pendolo, o con modificare opportunamente la spirale del bilanciere; ed in fine la *differenza* fra le variazioni diurne è il vero errore dell' orologio dipendente da difetto nell' uniformità del movimento.

§. 34. Conoscendo le ascensioni rette e le declinazioni di due astri, si potrà risolvere il seguente problema.

PROBLEMA. *Date le ascensioni rette e le declinazioni di due astri, calcolare la distanza de' loro centri.* Siano S,D [*fig.* 4] i due astri, ed AM,AG le loro ascensioni rette, SM,DG le loro declinazioni conosciute; si cerca la distanza SD dei centri, o sia l' arco di cerchio massimo della sfera celeste interposto fra quelli due punti. Si prendano la differenza MG delle ascensioni rette, ed i complementi SP,DP delle declinazioni; e nel triangolo sferico SPD saranno conosciuti due lati SP,SD e l' angolo compreso P misurato dall' arco MG dell' equatore, e si potrà calcolare il terzo lato SD con le ultime formole dimostrate a pag. 50 della Trigonometria. Può accadere che le declinazioni siano australi, ed allora dovendosi considerare negative, i loro complementi saranno maggiori di 90°: di più, se la differenza delle ascensioni

rette è maggiore di 180°, si dovrà adottare nel calcolo del triangolo il suo supplemento a 360°. Così, per calcolare la distanza de' centri dei due astri S, S', il complemento della declinazione australe $S'M'$ sarà $S'P$, e l'angolo al polo sarà $S'PS$, misurato dall'arco MM' dell'equatore supplemento della differenza $MQEM'$ delle ascensioni rette de' due astri.

Osservazione dell' equinozio.

* §. 35. Ammettendo che un pendolo astronomico sia già regolato in modo che la durata delle sue 24 ore equivalga esattamente al tempo che impiega una stella per ritornare allo stesso punto del cielo, non sarà difficile ottenere anche l'altra condizione che si richiede per poter determinare l' *AR* degli astri, cioè che il pendolo segni esattamente $0^h.0'.0''$ nel momento in cui il punto equinoziale passa pel meridiano.

Supponiamo che siasi osservata la declinazione del Sole ne' giorni 20 e 21 marzo a mezzogiorno preciso, e contemporaneamente siasi notato il tempo che segnava il pendolo nel momento in cui il centro del Sole passava pel meridiano nei due giorni indicati. I risultamenti delle osservazioni siano quali si veggono disposti nella seguente tavoletta.

Marzo	*Declinazioni del Sole*	*Diff.*	*Tempi del pendolo*	*Diff.*
20	$-0°.18'.55'',1A$	$23'.42'',2$	$23^h.59'.\ 7'',95$	$3'.38'',44$
21	$+0\ .\ 4'.47'',1B$		$0\ .\ 2\ .46\ ,39$	

Siccome nel momento in cui il Sole si trova sull' equatore, ossia nell' istante dell' equinozio, deve esser nulla tanto la declinazione che l' *AR* di quell' astro, dalle declinazioni osservate apparisce che l' equinozio è accaduto prima del mezzodì del giorno 21, perchè nell' istante di mezzogiorno il Sole aveva già una declinazione boreale di $4'.47'',1$, dopo aver perduto tutta la sua declinazione australe. E poichè l' aumento della declinazione del Sole dal mezzodì del giorno 20 a quello del giorno 21, cioè nell' intervallo di 24 ore *vere*, è stato di $23'.42'',2$ (somma delle due declinazioni di segno contrario), considerando l' aumento della declinazione proporzionale al tempo, si potrà con la seguente proporzione determinare il tempo trascorso dall' istante in cui il Sole è passato per il punto equinoziale sino al mezzodì del giorno 21.

Se in 24^h *di tempo vero la declinazione del Sole ha ricevuto un aumento di* 23'.42'',2, *in* quanto tempo *la declinazione medesima* da 0°.0'.0'' *si è aumentata a* 4'.47'',1 cioè,

$$24^h : x^h :: 23'.42'',2 : 4'.47'',1$$
$$24^h : x^h :: \ 1422,2 \ : 287,1 ; x = 4^h,84489.$$

Dunque l'equinozio è accaduto 4^h,84489 prima del mezzodì del giorno 21, o sia $19^h,15511 = 19^h.9'.18'',4$ dopo il mezzodì del giorno 20.

Riflettiamo inoltre che, sebbene il nostro pendolo non sia ancora in istato di farci conoscere l'ascensione retta assoluta di un astro, può servire però a determinare la differenza fra le ascensioni rette di due astri che passano successivamente pel meridiano. In fatti se fra due stelle A, A' [*fig.* 5] sia interposto un arco di 15°, il passaggio della stella A' pel meridiano accaderà un'ora dopo del passaggio della stella A, e le 24 ore del pendolo essendo perfettamente eguali a quelle della rotazione della sfera celeste, lo stesso intervallo di tempo si osserverà sul pendolo fra i due passaggi. Quindi inversamente, se i tempi de' passaggi di due stelle pel meridiano differiranno di un'ora del pendolo, le *AR* delle stelle differiranno di 15 gradi.

Ciò premesso, nel giorno 20 il Sole essendo passato pel meridiano ad ore $23^h.59'.7''$,95 del pendolo, sarebbe nel giorno 21 passato allo stesso istante dell'orologio, ossia dopo 24 ore sideree esattamente, se la sua *AR* fosse rimasta costante. Ma non è avvenuto così, ed il Sole avendo ritardato nel giorno 21 il suo passaggio pel meridiano, la sua *AR* ha dovuto crescere nelle 24 ore vere interposte tra i passaggi del giorno 20 e del giorno 21. Le due diverse posizioni che occupava in cielo il Sole nei giorni 20 e 21 potranno paragonarsi a quelle delle stelle A, A', ed in conseguenza la differenza fra i tempi de' due passaggi del Sole cioè 3'.38'',44, equivarrà alla differenza fra le due *AR* del Sole nei giorni suddetti ridotta in tempo.

Ora, ricordandosi che l'*AR* del Sole doveva esser nulla nell'istante dell'equinozio, ossia 4^h,84489 prima di mezzodì del giorno 21, con la seguente proporzione si potrà determinare l'*AR* del Sole nell'istante di mezzogiorno dello stesso dì 21.

Se in 24^h *di tempo vero* l' *AR del Sole ha ricevuto un aumento di* 3'.38'',44, in 4^h,84489 *di tempo vero trascorse fra l'istante dell'equinozio ed il mezzodì del giorno* 21, quale *AR avrà il Sole acquistato?*

$$24^h : 4^h,84489 :: 3'.38'',44 : x$$
$$24 \ : 4^h,84489 :: \ 218,44 \ : x = 44'',10.$$

Dunque a mezzodì del giorno 21 il Sole aveva un'*AR* in tempo eguale a 44'',10, e quindi in quell'istante, dovendo trovarsi il

Sole nel meridiano, il punto equinoziale lo aveva già oltrepassato; ed un orologio astronomico che avesse segnato $0^h.0'.0''$ quando il punto equinoziale era nel meridiano, ossia un orologio ben regolato sul tempo sidereo, avrebbe dovuto segnare $0^h.0'.44'',10$ al passaggio del Sole [§. 33]. Ma il pendolo segnava $0^h.2'.46'',39$ al punto di mezzogiorno, dunque segnava $2'.2'',29$ più del dovere, e corretto di questo errore acquisterebbe la seconda condizione richiesta per poter servire alla determinazione delle *AR* degli astri.

*§. 36. Nel §. precedente, per determinare l'istante dell'equinozio ed in seguito l'*AR* del Sole, abbiamo supposto che le variazioni della declinazione e dell' ascensione retta di quell' astro fossero proporzionali al tempo, ciò che non è vero a rigore; poichè tanto le declinazioni quanto le ascensioni rette del Sole osservate ad intervalli eguali di tempo, come nei successivi suoi passaggi al meridiano, formano una serie di cui le differenze *prime*, non sono costanti, ma tali possono riguardarsi le *seconde* o le *terze*. Or in questo caso, i procedimenti usati qui sopra (i quali sono un' applicazione delle regole da noi esposte nella trigonometria [I. §. 53], nell' ipotesi delle differenze prime costanti) non riescono abbastanza esatti per inserire fra i termini della data serie un termine corrispondente ad un *luogo* dato, o per trovare questo luogo, quando si conosce il termine intermedio. È indispensabile allora l' uso della seguente formola d' *interpolazione*, che si dimostra ne' trattati di Algebra;

$$(i)\ldots y=\beta+\frac{x}{1}\Delta\beta+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2\beta+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3\beta\ldots \text{etc};$$

dove y dinota il termine da *interpolarsi*, x il suo *luogo*, β il primo termine della serie, o sia quello corrispondente al luogo $x=0$, e $\Delta\beta, \Delta^2\beta, \Delta^3\beta\ldots$ la prima delle differenze *prime*, la prima delle differenze *seconde*, la prima delle differenze *terze* etc. (*).

(*) Per la dimostrazione di questa formola si vegga il trattato grande di algebra del chiaris. Prof. *Carlo d' Andrea*. Noi aggiungeremo ancora, per comodo de' lettori, la dimostrazione seguente.

Supponiamo che a dati valori numerici in progressione aritmetica corrispondano altri valori, dipendenti da quelli, e che formano nel loro insieme una serie di cui non si conosce la legge; e siano indicati da

$$0, 1, 2, 3, 4\ldots$$

i valori in progressione aritmetica, e da

$$\beta, \beta', \beta'', \beta''', \beta^{iv}\ldots$$

i valori corrispondenti.

Se voglia determinarsi un valore compreso fra due termini della seconda serie, corrispondente ad un dato numero intermedio ai termini della prima (per esempio 2,23), è chiaro che dovrà esser nota la dipendenza che

Riprendiamo la determinazione dell' equinozio, supponendo che siensi fatte almeno quattro osservazioni giorni prima e giorni dopo

---

hanno i numeri dell' una da quelli dell' altra serie. Per conoscere questa legge di dipendenza, suppongasi che un termine qualunque y della seconda serie sia rappresentato dall' espressione

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots$$

dove x indica il termine corrispondente della prima serie, o il *luogo* di y, ed $A,B,C\ldots$ sono coefficienti numerici da determinarsi.

Se, come si suppone, un qualunque termine della seconda serie deve essere espresso per mezzo del corrispondente termine della prima nel modo indicato dal polinomio $A+Bx+Cx^2\ldots$; dovranno, per le diverse coppie di termini di cui si compongono le due serie, verificarsi le seguenti equazioni:

$$(M)\begin{cases} \text{per } x=0\ ,\ \beta\ \ =A \\ \quad\ \ x=1\ ,\ \beta'\ =A+\ B+\ C+D\ldots \\ \quad\ \ x=2\ ,\ \beta''\ =A+2B+4C+8D\ldots \\ \quad\ \ x=3\ ,\ \beta'''=A+3B+9C+27D\ldots \end{cases}$$

le quali si ottengono sostituendo successivamente ad x,y i loro valori $0,1,2,3\ldots\ \beta,\beta',\beta'',\beta'''\ldots$ nella supposta equazione generale,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots$$

Le equazioni *(M)* potrebbero servire a determinare, nei diversi casi particolari, i coefficienti $A,B,C\ldots$ per mezzo delle quantità date $\beta,\beta',\beta'',\beta'''\ldots$, coi metodi ordinarii di eliminazione; ma i valori di quelli coefficienti procedono con una legge che è necessario porre in evidenza, per trovare una formola generale più utile nelle applicazioni.

Sottraendo le equazioni *(M)* una dall' altra per ordine, si ha

$$(N)\begin{cases} \beta'\ -\beta\ \ =B+\ C+D\ldots \\ \beta''\ -\beta'\ =B+3C+7D\ldots \\ \beta'''-\beta''=B+5C+19D\ldots \end{cases}$$

Si pongano per brevità le differenze $\beta'-\beta=\Delta\beta$, $\beta''-\beta'=\Delta\beta'$, $\beta'''-\beta''=\Delta\beta''\ldots$, e sottraendo di nuovo le equazioni *(N)* una dall'altra, si avranno le altre,

$$(P)\begin{cases} \Delta\beta'-\Delta\beta\ =2C+6D \\ \Delta\beta''-\Delta\beta'=2C+12D; \end{cases}$$

dalle quali, ponendo $\Delta\beta'-\Delta\beta=\Delta^2\beta$, e $\Delta\beta''-\Delta\beta'=\Delta^2\beta'$, si ottiene finalmente:

$$(Q)\ldots\Delta^2\beta'-\Delta^2\beta=6D,\ \text{e}\ D=\tfrac{1}{6}(\Delta^2\beta'-\Delta^2\beta)$$

Da questo valore di D, che indicheremo con $\frac{1}{6}\Delta^3\beta$, si può risalire a quelli di C,B espressi anche per mezzo delle differenze. Sarà,

$$\Delta\beta'-\Delta\beta=\Delta^2\beta=2C+\Delta^3\beta,\ \text{e}\ C=\tfrac{1}{2}(\Delta^2\beta-\Delta^3\beta);$$

$$\beta'-\beta=\Delta\beta=\ B+\tfrac{1}{2}(\Delta^2\beta-\Delta^3\beta)+\tfrac{1}{6}\Delta^3\beta,\ \text{e}$$

$$B=\Delta\beta-\tfrac{1}{2}\Delta^2\beta+\tfrac{1}{3}\Delta^3\beta$$

E sostituendo nell' equazione $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots$ ad $A,B,C,D\ldots$

il 21 Marzo a mezzodì vero, e che la serie delle declinazioni ottenute sia stata la seguente;

Mezzodi vero	*Declinazioni del Sole*	*Diff.* 1.	*Diff.* 2.	*Diff.* 3.	
19 *Marzo*	$-0°.42'.37'',8$ *A*				
		$+23'.42'',7$			
20	$0.18.55,1$		$-0'',5$		
		$23.42,2$		$-0'',5$	(*D*)
21	$+0.4.47,1$ *B*		$-1'',0$		
		$23.41,2$			
22	$0.28.28,3$				

I tempi osservati contemporaneamente all'orologio astronomico, dai quali si desumono le differenze di ascensione retta del Sole

---

le loro espressioni equivalenti si avrà,

$$y=\beta+\Delta\beta\,.\,x-\tfrac{1}{2}\Delta^2\beta\,.\,x+\tfrac{1}{3}\Delta^3\beta\,.\,x$$
$$+\tfrac{1}{2}\Delta^2\beta\,.\,x^2-\tfrac{1}{2}\Delta^3\beta\,.\,x^2$$
$$+\tfrac{1}{6}\Delta^3\beta\,.\,x^3\ldots$$

$$y=\beta+\Delta\beta x+\Delta^2\beta\frac{x(x-1)}{2}+\Delta^3\beta\frac{x(x^2-3x+2)}{2.3}\ldots$$

$$(i)\ldots\ y=\beta+\Delta\beta x+\Delta^2\beta\frac{x(x-1)}{2}+\Delta^3\beta\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\ldots$$

La quale formola, di cui è manifesta la legge, serve ad inserire, o come suol dirsi, *interpolare* fra i termini della data serie $\beta,\beta',\beta'',\beta'''\ldots$ un termine qualunque y corrispondente al *luogo* dato x. Le differenze, $\Delta\beta,\Delta^2\beta,\Delta^3\beta$ si ottengono dai valori dati $\beta,\beta',\beta''\ldots$ nel modo indicato dal seguente quadro;

Valori	*Diff.* 1.	*Diff.* 2.	*Diff.* 3.
β			
	$\beta'-\beta=\Delta\beta$		
β'		$\Delta\beta'-\Delta\beta=\Delta^2\beta$	
	$\beta''-\beta'=\Delta\beta'$		$\Delta^2\beta'-\Delta^2\beta=\Delta^3\beta$
β''		$\Delta\beta''-\Delta\beta'=\Delta^2\beta'$	
	$\beta'''-\beta''=\Delta\beta''$		
β'''			

Avremo occasione di applicare più volte la formola (i).

per gli stessi giorni, siano inoltre quelli contenuti nell' altra serie qui appresso;

Mezzodì vero	Tempi dell' orologio	Diff. 1.	Diff. 2.	
19 *Marzo*	$23^h.55'.29'',36$			
20	$23.59.7,95$	$+3'.38'',59$		
21	$0.2.46,39$	$3.38,44$	$-0'',15$	(A)
22	$0.6.24,70$	$3.38,31$	$-0,13$	

Le differenze 1°, 2°, e 3° si sono prese nelle due serie come richiede la formola *(i)*, sottraendo sempre il termine precedente dal seguente della stessa colonna, e secondo questa convenzione sono stati regolati i segni di tali differenze.

La serie *(D)* servirà primamente a determinare l'istante dell'equinozio in *tempo vero*. Applicandovi la formola *(i)*, ogni termine della seconda colonna, cioè ogni declinazione, potrà essere espressa dal *luogo* che occupa, dal primo termine della serie, e dalle differenze de' diversi ordini. Questo termine generale sarà dunque,

$$y = -0''.42'.37'',8 + x.23'.42'',7 - \frac{x(x-1)}{2}.0'',5 - \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}.0'',5,$$

ovvero

$$y = -2557,8 + 1422,7x - 0,25\,x(x-1) - 0,0833x(x-1)(x-2);$$

dove il *luogo* x del termine y è un numero di giorni veri contato dal mezzodì del giorno 19 in poi.

Nel momento dell'equinozio, il termine generale y, che esprime la declinazione del Sole, è eguale a *zero*, e però si avrà, per determinare il luogo x, l'equazione,

$$0 = -2557,8 + 1422,7x - 0,25x(x-1) - 0,0833x(x-1)(x-2);$$

la quale è di terzo grado, ma avendo gli ultimi due termini piccolissimi, potrà risolversi col metodo delle approssimazioni successive, cioè si trascureranno quelli due termini in una prima approssimazione, e si avrà,

$$x = \frac{2557,8}{1422,7} = 1,79785.$$

Introdotto questo valore negli indicati due termini, l'equazione si cambierà in,

$$0 = -2557,8 + 1422,7x - 0,35860 + 0,02415$$

da cui si caverà l' esatto valore di $x=1,798084$. E dovendo questo tempo contarsi da mezzodì del giorno 19 Marzo, l' equinozio sarà accaduto dopo il mezzodì del giorno 20 ad ore vere $0,798084\times24$, cioè ad ore vere $19^h.9'.14'',5$. L'istante dell' equinozio ottenuto nel §. precedente dalla sola proporzione, conteneva dunque un errore di $4''$.

Determinato così il tempo dell'equinozio, la seconda serie *(A)* servirà a trovare l'*AR* del Sole a mezzodì vero del giorno 19. Da quanto si è detto nel §. precedente risulta, che i tempi siderei notati nella 2ª colonna della serie *(A)*, i quali dovrebbero rappresentare le *AR* del Sole a mezzodì vero [§. 33] sono erronei, e le loro differenze soltanto sono esatte; e però, supposte incognite quelle ascensioni rette, ed indicata con K la prima di esse relativa al giorno 19, il loro termine generale sarà, dalla formola *(i)*,

$$y=K+3'.38'',59.x-0'',14\frac{x(x-1)}{2};$$

dove si è adottata come costante la differenza seconda $-0'',14$ media delle due notate nella quarta colonna, pochissimo differenti fra loro. Applichiamo questa equazione al caso dell'equinozio, in cui l'ascensione retta y del Sole è conosciuta ed eguale a zero, ed il suo luogo x, o sia l' istante dell' equinozio, si è trovato essere $1,798084$; sarà,

$$0=K+218'',59\times1,798084-0,07\times1,798084\times0,798084,$$

e quindi,

$$0=K+393'',04-0,10, \text{ ed infine}$$
$$K=-392'',94=-6'.32'',94.$$

Si conchiude da ciò, che il Sole aveva a mezzodì del 19 Marzo una ascensione retta negativa, o sia contata da oriente in occidente, di $6'.32'',94$; il che equivale a dire che la sua *AR* contata da occidente in oriente era di $23^h.53'.27'',06$. Ma un orologio ben regolato sul tempo sidereo deve, al passaggio di un astro pel meridiano, segnare un' ora eguale all' *AR* che ha l' astro in quell' istante; dunque l' orologio astronomico, che si sta esaminando, doveva a mezzodì del 19 Marzo indicare $23^h.53'.27'',06$; e poichè segnava in vece $23^h.55'.29'',36$, esso avanzava $2'.2'',3$. La stessa accelerazione si è trovata di sopra con un procedimento meno esatto, ma in generale è da preferirsi il metodo esatto all' approssimato, il quale può dare qualche volta errori notabili, specialmente se si tratta di posizioni della Luna.

Della posizione degli astri rispetto all'ecclittica e della trasformazione delle coordinate sferiche.

§. 37. La posizione degli astri rispetto all' ecclittica, analogamente a quella già considerata rispetto all'equatore, si determina con due coordinate sferiche che hanno per origine il punto equi-

noziale di primavera. Se per l'astro S e pel polo p dell'ecclittica [*fig.* 4] si conduce un arco di cerchio massimo pS, questo prolungato incontrerà ad angolo retto la circonferenza dell'ecclittica nel punto N, e la posizione dell'astro rimarrà determinata dalle due coordinate sferiche $\gamma N, NS$, delle quali la prima dicesi *longitudine*, e la seconda *latitudine* dell'astro: il cerchio massimo pS si chiama cerchio di latitudine. La longitudine, come l'ascensione retta, si conta da occidente in oriente a cominciare da 0° sino a 360°, e la latitudine, al pari della declinazione, si conta da zero sino a 90°, e può essere *boreale* od *australe* secondo che si estende verso il polo boreale o verso il polo australe dell'ecclittica.

Da questa definizione si scorge facilmente che la latitudine di un astro equivale all'angolo che la visuale diretta al medesimo fa con la projezione di essa sul piano dell'ecclittica; ed è chiaro ancora che la posizione di un astro rispetto all'ecclittica, come si è detto di quella rispetto all'equatore, non cambia col moto diurno della sfera celeste. Gli astri compresi fra l'ecclittica e l'equatore hanno la declinazione di nome contrario a quello della latitudine; così l'astro S' ha una declinazione australe ed una latitudine boreale. Vi sono anche alcuni astri i quali hanno una AR molto piccola ed una longitudine grandissima, o viceversa; ed in questo caso sono tutti gli astri compresi per posizione nell'aja de' triangoli sferici formati dal punto equinoziale di primavera e dai poli dell'equatore e dell'ecclittica.

La posizione di un astro rispetto all'ecclittica non può essere data dall'osservazione, ma si deduce per mezzo del calcolo dalla posizione ottenuta rispetto all'equatore. Rappresentino γQ l'equatore, e γT l'ecclittica [*fig.* 6]; la posizione di un astro qualunque A riferita a questi due cerchi sarà data rispetto all'equatore dall'ascensione retta γB e dalla declinazione AB, e rispetto all'ecclittica, dalla longitudine γC, e dalla latitudine AC. Or unendo i punti γ, A per mezzo di un arco di cerchio massimo, si formeranno due triangoli rettangoli sferici $\gamma AB, \gamma AC$ aventi l'ipotenusa comune γA, e quando uno dei due triangoli sarà determinato, potrà facilmente determinarsi l'altro. In fatti, supponganusi conosciute l'ascensione retta γB e la declinazione AB dell'astro; il triangolo rettangolo γAB sarà pienamente determinato, e per mezzo delle formole trigonometriche potranno calcolarsi facilmente l'angolo $A\gamma B$ e l'ipotenusa γA. Dall'angolo $A\gamma B$ così conosciuto, tolto l'angolo $C\gamma B$, che rappresenta l'obliquità dell'ecclittica, il rimanente angolo $A\gamma C$ sarà pure noto, e nel triangolo $A\gamma C$, essendo dato quest'angolo e l'ipotenusa γA, potranno immediatamente calcolarsi i cateti $\gamma C, AC$, cioè la longitudine e la latitudine dell'astro. Viceversa se fossero date queste due ultime si potrebbero con lo stesso procedimento calcolare l'ascensione retta e la declinazione. Il triangolo sferico SpP, [*fig.* 4] formato dall'astro e dai due poli dell'equatore e dell'ecclittica, può servire anche meglio per

passare dall' equatore all' ecclittica o viceversa, il che dicesi *trasformare le coordinate sferiche;* tanto più che in questa trasformazione occorre qualche volta di calcolare l'angolo S detto *di posizione*, che ha per vertice l'astro ed è compreso fra il cerchio di latitudine e quello di declinazione.

Il calcolo delle longitudini del Sole per mezzo delle ascensioni rette e delle declinazioni osservate, dimostra una verità che noi avevamo già ammessa nel §. 22. Nel triangolo rettangolo γSM [*fig.* 6] sono date dall' esperienza l'ascensione retta γM e la declinazione MS, e possono con questi dati calcolarsi la longitudine γS e l'obliquità dell'ecclittica $S\gamma M$. Dopo alcuni giorni si osservano di nuovo l'ascensione retta $\gamma M'$ e la declinazione $S'M'$ del Sole, e si calcolano la longitudine $\gamma S'$ e l'obliquità $S'\gamma M'$. Così pure si ottengono la longitudine $\gamma M''$ e l'obliquità $S''\gamma M''$ etc. Paragonate tutte le obliquità calcolate $S\gamma M, S'\gamma M', S''\gamma M''...$, nel corso di un anno si trovano eguali fra loro, ciò che non potrebbe accadere se la curva $\gamma SS'S''$ etc., non fosse una curva piana, e perciò resta dimostrato che *la curva descritta in cielo dal Sole col suo moto proprio è una curva piana.* Il Sole, dunque, non ha latitudine, e la sua AR eguaglia la longitudine negli equinozi e nei solstizi.

§. 38. La posizione degli astri rispetto all' orizzonte è data pure, come si è veduto, da due coordinate sferiche, che sono l'*azimut* e l' *altezza*. Essa si può calcolare conoscendo la posizione dell' astro rispetto all' equatore, ma siccome l' azimut e l' altezza variano ad ogni istante [§. 12], sarà necessario indicare di più a quale ora dell' orologio astronomico si vogliono far corrispondere. Sia data per esempio l' ascensione retta γEd e la declinazione dD dell' astro D, [*fig.* 1] e si vogliano conoscere l' azimut e l' altezza corrispondenti all' ora h. Si sa che l' ascensione retta divisa per 15 dinota l' ora siderea del passaggio dell' astro pel meridiano; dunque l' astro D dovrà passare pel meridiano all' ora $\frac{\gamma d}{15}$ dell' orologio astronomico, e se l'ora data h è minore di $\frac{\gamma d}{15}$, l'astro si troverà nell' emisfero orientale, e per giungere al meridiano dovrà impiegare un tempo espresso da $\frac{\gamma d}{15} - h$. Questo tempo moltiplicato per 15 darà l' angolo orario ZPD dell' astro, e quindi nel triangolo ZPD si conosceranno ZP complemento dell' altezza del polo, PD complemento della declinazione dD dell' astro, e l'angolo compreso ZPD; e si potranno calcolare ZD e l' angolo DZP. Preso il complemento di ZD si avrà DH altezza dell' astro, e preso il supplemento dell' angolo DZP si avrà mZD equivalente all' arco OH dell' orizzonte, ossia l' azimut. Se l' ora data h sarà maggiore di $\frac{\gamma d}{15}$, allora l' astro si troverà nell' emisfero occiden-

tale e l'angolo orario sarà $h - \frac{\gamma d}{15}$: nel resto il calcolo dell'azimut e dell'altezza procederà allo stesso modo.

Volendo calcolare la posizione del Sole rispetto all'orizzonte non è necessaria l'ascensione retta dell'astro, perchè in questo caso l'ora data h, contandosi in *tempo vero*, fa conoscere immediatamente l'angolo orario. Per esempio l'angolo orario del Sole alle nove della mattina è di 3 ore, ossiano 45 gradi, ed alle tre pomeridiane è pure di 45 gradi, ma nel primo caso il Sole è nell'emisfero orientale, e nel secondo trovasi nell'emisfero occidentale.

La posizione degli astri rispetto all'orizzonte può anche ottenersi per mezzo dell'osservazione, onde si potrà risolvere il problema inverso cioè, *dati l'azimut e l'altezza dell'astro osservato, e data l'ora corrispondente all'orologio astronomico, calcolare la posizione dell'astro rispetto all'equatore*. Nello stesso triangolo ZPD saranno conosciuti ZP complemento dell'altezza del polo, ZD complemento dell'altezza dell'astro, e DZP supplemento dell'azimut; e si calcoleranno DP e l'angolo orario ZPD. Prendendo il complemento di DP si avrà la declinazione; e l'angolo orario ZPD ridotto in tempo si aggiungerà all'ora osservata all'orologio astronomico, se l'astro si trova nell'emisfero orientale, e si toglierà da quell'ora, se trovasi nell'emisfero occidentale, e la somma o il resto rappresenterà l'ascensione retta dell'astro in tempo. Nel risolvere il triangolo ZPD occorre qualche volta di calcolare anche l'angolo all'astro fra il verticale ed il cerchio di declinazione che si chiama *angolo parallatico*.

*§. 39. Il cenno dato qui sopra intorno alla trasformazione delle coordinate sferiche non basta per eseguire il calcolo in tutti i casi con facilità e sicurezza; anche perchè l'AR e la longitudine degli astri, potendo oltrepassare i limiti assegnati nella trigonometria ai lati di un triangolo sferico, rendono indispensabili alcune avvertenze sulla scelta del quadrante che loro compete. Riprendiamo da capo il problema, e consideriamo il triangolo pPS fra l'astro e i due poli dell'eclittica e dell'equatore [*fig.* 4]. Pongasi l'ascensione retta AM dell'astro S eguale ad α, la declinazione $MS = \delta$, la longitudine $AN = l$, la latitudine $SN = \lambda$; e l'arco pP fra i due poli, che eguaglia l'obliquità dell'eclittica, sia indicato da ε. Si avrà,

$$PS = 90^\circ - \delta, \quad pS = 90^\circ - \lambda, \quad Pp = \varepsilon$$
$$pPS = EM = EA + AM = 90^\circ + \alpha$$
$$SpP = NT = AT - AN = 90^\circ - l.$$

Volendo passare dall'equatore all'eclittica, nel triangolo pPS saranno conosciuti i due lati PS, pP, e l'angolo compreso P; e per applicarvi le formole della Trigonometria si supporrà $pP = b$,

$PS=a, pPS=C$, e si avranno per determinare A, c le due relazioni,

$$\cos C \cos b = \cot a \,\text{sen}\, b - \cot A \,\text{sen}\, C$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen}\, a \,\text{sen}\, b}.$$

Sostituiamo in queste uguaglianze ad

$$a \quad , b , \quad C \quad , \quad A \quad , \quad c$$

le quantità del problema che sono,

$90^\circ - \delta$, ε, $90^\circ + \alpha$, $90^\circ - l$, $90^\circ - \lambda$, ed avremo

$$-\,\text{sen}\,\alpha \cos\varepsilon = \tan\delta \,\text{sen}\,\varepsilon - \tan l \cos\alpha$$

$$-\,\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\lambda - \text{sen}\,\delta \cos\varepsilon}{\cos\delta \,\text{sen}\,\varepsilon};$$

dalle quali equazioni, prendendo i valori di l, e λ, si otterranno;

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{l}\tan l = \dfrac{\tan\delta \,\text{sen}\,\varepsilon + \text{sen}\,\alpha \cos\varepsilon}{\cos\alpha} = \tan\alpha \cos\varepsilon + \dfrac{\tan\delta \,\text{sen}\,\varepsilon}{\cos\alpha}. \\ \text{sen}\,\lambda = \text{sen}\,\delta \cos\varepsilon - \text{sen}\,\alpha \cos\delta \,\text{sen}\,\varepsilon.\end{array}\right.$$

Queste formole danno la longitudine e la latitudine espresse per l'*AR*, la declinazione e l'obliquità dell'ecclittica, ma per applicarvi con vantaggio i logaritmi dovranno essere modificate introducendovi un angolo ausiliare, come si è praticato nella Trigonometria (I, §. 46). Si faccia nella prima $\tan\delta = \text{sen}\,\alpha \cot\varphi$, e si avrà;

$$\tan l = \frac{\text{sen}\,\alpha (\cot\varphi \,\text{sen}\,\varepsilon + \cos\varepsilon)}{\cos\alpha},$$

$$(2)\ldots \tan l = \tan\alpha \frac{\text{sen}\,(\varepsilon + \varphi)}{\text{sen}\,\varphi}$$

Per introdurre l'angolo φ nella seconda delle formole (1), si divida la medesima per $\cos\delta$, e sarà;

$$\frac{\text{sen}\,\lambda}{\cos\delta} = \tan\delta \cos\varepsilon - \text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\varepsilon$$

$$= \text{sen}\,\alpha \cot\varphi \cos\varepsilon - \text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\varepsilon$$

$$= \text{sen}\,\alpha \frac{\cos(\varepsilon + \varphi)}{\text{sen}\,\varphi}, \text{ onde}$$

$$\text{sen}\,\lambda = \frac{\cos\delta \,\text{sen}\,\alpha \cos(\varepsilon + \varphi)}{\text{sen}\,\varphi}.$$

Ma si può avere un'espressione più semplice della latitudine λ

facendola dipendere da l. Dividiamo l'ultima eguaglianza per la (2), ed avremo

$$\frac{\text{sen}\,\lambda}{\tan l} = \cos\delta\cos\alpha\cot(\varepsilon+\varphi).$$

Ora, il principio de' seni degli angoli proporzionali ai seni dei lati opposti, applicato al triangolo PpS dà

$$\text{sen}\,P : \text{sen}\,p :: \text{sen}\,pS : \text{sen}\,PS, \text{ ovvero}$$
$$\cos\alpha : \cos l :: \cos\lambda : \cos\delta, \text{ da cui}$$
$$(3) \ldots \cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda\cos l.$$

Sostituendo dunque, nella precedente uguaglianza, a $\cos\delta\cos\alpha$ il prodotto equivalente, si avrà,

$$\text{sen}\,\lambda = \tan l\cos l\cos\lambda\cot(\varepsilon+\varphi), \text{ e}$$
$$\tan\lambda = \text{sen}\,l\cot(\varepsilon+\varphi).$$

Riassumendo, le formole che risolvono il problema sono;

$$(4)\ldots\left\{\begin{array}{l}\tan\varphi = \text{sen}\,\alpha\cot\delta\\ \tan l = \tan\alpha\dfrac{\text{sen}(\varepsilon+\varphi)}{\text{sen}\,\varphi}\\ \tan\lambda = \text{sen}\,l\cot(\varepsilon+\varphi)\\ \cos\alpha\cos\delta = \cos l\cos\lambda.\end{array}\right.$$

Quest' ultima eguaglianza serve per verificare il calcolo della formole precedenti, ed offre anche il criterio da osservarsi nella scelta del quadrante in cui si deve prendere la longitudine l; la quale, potendo oltrepassare 180°, non è interamente determinata dalle sole regole de' segni delle linee trigonometriche. In fatti, poichè la declinazione e la latitudine di un astro non superano mai 90 gradi positivi o negativi, nei prodotti equivalenti $\cos\delta\cos\alpha$, e $\cos\lambda\cos l$, i coseni di δ e di λ saranno sempre positivi, e quindi perchè possa sussistere l'uguaglianza, dovranno $\cos\alpha$, $\cos l$ avere lo stesso segno. Questa avvertenza unita alle regole ordinarie dei segni basterà sempre per dare alla longitudine l'estensione necessaria; per esempio, se l' *AR* data è minore di 90°, e $\tan l$ risulta negativa, la longitudine dovrà prendersi nel quarto quadrante, perchè ivi il suo coseno è positivo, come quello dell'ascensione retta, e la tangente negativa; e se l' *AR* fosse compresa nel secondo quadrante, e $\tan l$ risultasse positiva dal calcolo, la longitudine dovrebbe prendersi nel terzo quadrante, dove i coseni sono negativi e le tangenti positive.

* §. 40. Supposta data la posizione dell' astro rispetto all'ecclittica, si potrà calcolare quella rispetto all'equatore risolvendo lo stesso triangolo pPS in cui allora sarebbero conosciuti i lati pP, pS e l'angolo compreso p: ed un procedimento interamente

simile al procedimento usato per passare dall'equatore all'eclittica, ci condurrà alle formole analoghe che risolvono il problema inverso. Eccole;

$$(1)' \ldots \begin{cases} \tan \alpha = \tan l \cos \varepsilon - \dfrac{\tan \lambda \operatorname{sen} \varepsilon}{\cos l} \\ \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \varepsilon \cos \lambda + \cos \varepsilon \operatorname{sen} \lambda\,; \end{cases}$$

ovvero adoperando l'angolo ausiliare,

$$(4)' \ldots \begin{cases} \cot \theta = \operatorname{sen} l \cot \lambda \quad (*) \\ \tan \alpha = \dfrac{\tan l \cos(\varepsilon + \theta)}{\cos \theta} \\ \tan \delta = \operatorname{sen} \alpha \tan(\varepsilon + \theta) \\ \cos l \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta. \end{cases}$$

* §. 41. Qualche volta accade che nel triangolo pPS, dopo aver calcolata la longitudine e la latitudine per mezzo dell' AR, e della declinazione, o viceversa, debba determinarsi anche l'angolo di posizione S. Allora sarebbero preferibili le formole di Nepero per ottenere tutti tre gli elementi incogniti, stando a ciò che abbiamo detto nella Trigonometria [I, pag. 50]; ma nel caso attuale avendo calcolata l'eguaglianza di verificazione $\cos \alpha \cos \delta = \cos l \cos \lambda$, converrà meglio servirsi della formola dei quattro seni per trovare l'angolo S, e si avrà,

$$\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon \cos \alpha}{\cos \lambda} = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon \cos l}{\cos \delta}.$$

Questa formola però non basta a determinare compiutamente l'angolo S, e per la scelta del quadrante in cui quest' angolo deve esser preso, si potrà calcolare grossolanamente l'altra formola,

$$\cos S = \frac{\cos \varepsilon - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \lambda}{\cos \delta \cos \lambda} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta \cos \lambda} - \tan \delta \tan \lambda,$$

a solo oggetto di conoscere il segno di $\cos S$. Essendo in tal modo determinati, per mezzo delle due formole, i segni del seno e del coseno dell' angolo di posizione, si potrà scegliere il quadrante in cui deve prendersi quest' angolo; il quale, come le AR e le longitudini, si considera esteso, nelle formole, da 0° sino a 360°, e si conta da occidente in oriente, partendo dal cerchio di latitu-

(*) Per regolarsi intorno al modo di stabilire l'equazione determinante l'angolo ausiliare in questa trasformazione delle coordinate sferiche basterà applicare la regola data a pag. 58 della trigonometria, con la sola differenza che nella presente teorica *si adopera la* tangente *dell' angolo ausiliare quando il binomio è una* differenza, *e la* cotangente *quando è una* somma.

dine ed andando verso il cerchio di declinazione. È da notare che il calcolo abbreviato di $\cos S$ richiede pochissima fatica, anche perchè si sono già trovati i logaritmi di $\cos\delta, \cos\lambda, \tan\delta, \cot\lambda$.

Per esercizio de' lettori, proponiamo il seguente esempio. Si conoscono,

$$\alpha = 128^\circ.7'.57'',9 \,;\, \delta = +3^\circ.23'.33'',3 \,;\, \varepsilon = 23^\circ.27'.42'',6 \,;$$

e si cercano l, λ ed S. Fatto il calcolo con le formole e le avvertenze sopra indicate, si trovano,

$$= 129^\circ.38'.50'',9 \,;\, \lambda = -14^\circ.58'.16'',6 \,;\, S = 345^\circ.15'.25'',6.$$

* §. 42. Porremo termine a questo argomento con determinare le variazioni che soffrono l' *AR* e la declinazione di un astro, variando di una piccola quantità la sua longitudine e rimanendo costante la latitudine. A tal fine differenziamo le formole $(1)'$ trovate di sopra nella supposizione di α, δ, l variabili e λ, ε costanti, ed avremo;

$$1.^\circ \quad \cos l \tan\alpha = \operatorname{sen} l \cos\varepsilon - \tan\lambda \operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$-\operatorname{sen} l \tan\alpha\, dl + \cos l \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \cos l \cos\varepsilon\, dl,$$

$$d\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\cos l}\left\{\cos l \cos\varepsilon + \operatorname{sen} l \tan\alpha\right\} dl$$

$$= \cos^2\alpha \left\{\cos\varepsilon + \tan l \tan\alpha\right\} dl.$$

Ma, per le formole (1), $\tan l = \cos\varepsilon \tan\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon \tan\delta}{\cos\alpha}$, dunque sostituendo sarà,

$$d\alpha = \cos^2\alpha \left\{\cos\varepsilon\,(1 + \tan^2\alpha) + \frac{\operatorname{sen}\varepsilon \tan\delta \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}\right\} dl$$

$$d\alpha = (\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\varepsilon \tan\delta \operatorname{sen}\alpha)\, dl$$

$$2.^\circ \quad \operatorname{sen}\delta = \cos\lambda \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen} l + \operatorname{sen}\lambda \cos\varepsilon$$

$$\cos\delta\, d\delta = \cos\lambda \operatorname{sen}\varepsilon \cos l\, dl;$$

ma $\cos l \cos\lambda = \cos\alpha \cos\delta$, dunque

$$d\delta \cos\delta = dl \cos\delta \cos\alpha \operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$d\delta = dl \cos\alpha \operatorname{sen}\varepsilon.$$

Le due equazioni,

$$(1)'' \quad \begin{cases} d\alpha = dl \left\{\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\varepsilon \tan\delta \operatorname{sen}\alpha\right\} \\ d\delta = dl \cos\alpha \operatorname{sen}\varepsilon \end{cases}$$

danno le variazioni richieste.

CAPO TERZO

Dei cerchi terrestri, e dell'atmosfera terrestre.

De' cerchi terrestri.

§. 43. Finora abbiamo considerata la sfera celeste supponendo che centro di essa fosse il punto della Terra in cui ci troviamo. Ma è spontanea la domanda; se da un luogo della superficie terrestre passiamo ad un altro, le apparenze celesti rimarranno le stesse? Quando ciò non avvenga, quali cambiamenti di aspetto ci presenterà il cielo? La risposta a questi dubbi dipende dall' esame della figura della Terra.

§. 44. Molti fatti ed osservazioni hanno da lungo tempo dimostrato che la superficie della Terra non può esser piana, ma deve esser curva, e convessa. Trovandosi al lido del mare ad osservare un bastimento che si avvicina, ed è ancora molto lontano, si vedrà soltanto la sua alberatura, e con i migliori cannocchiali non si potrebbe mai vedere il corpo della nave, qualunque fosse la sua mole; ma esso comincerà a comparire a poco a poco secondo che il legno più si accosta, e sembrerà in certo modo staccarsi dall' orizzonte, ed uscire dalle onde. Dal vedersi dunque da lontano la sola parte superiore del bastimento, deve conchiudersi che la inferiore era nascosta dalla convessità del mare interposto fra essa e lo spettatore.

L' altro fenomeno che dimostra la curvità della superficie terrestre è il diverso aspetto che presenta il cielo ad un osservatore, qualora si rechi da un punto della Terra in un altro molto discosto, camminando nella direzione di settentrione a mezzogiorno, o viceversa. Alcune stelle che egli vedeva nella prima stazione saranno per lui invisibili nella seconda, ed in vece ne scoprirà delle altre non vedute nella prima, il che non potrebbe accadere se la Terra fosse piana. Misurando l' altezza del polo nell' una e nell' altra stazione, troverà pure due risultamenti diversi, ed osserverà inoltre che gli spazi percorsi sulla superficie terrestre nella direzione del meridiano, sono proporzionali all' abbassamento, o all' innalzamento del polo in gradi. Camminando per esempio dal nord verso il sud, e misurando sulla superficie terrestre lo spazio che corrisponde ad un abbassamento del polo eguale ad 1.°, troverà che dopo aver percorso presso a poco un eguale spazio, il polo si sarà abbassato di un altro grado. Questo fatto, che è una conseguenza delle misure geodetiche eseguite in varii punti del globo,

ha determinato la specie di curvità della superficie terrestre, dimostrando che la figura della Terra è poco diversa da quella di una sfera, e che essa può assomigliarsi ad uno sferoide di rivoluzione in cui gli assi dell'ellisse generatrice siano fra loro nella ragione di 308:309. La periferia dell'ellisse è della lunghezza di 40,000,000 di metri, equivalenti a 21600 miglia italiane.

§. 45. Premesse queste idee sulla figura e grandezza della Terra, rappresenti Hpp' [*fig.* 7] la sfera terrestre, (prescindendo per ora dallo schiacciamento), ed EPQ la sfera celeste, che si può supporre ad essa concentrica. Sia H il punto della superficie terrestre dal quale abbiamo nei due CAPI precedenti osservato il cielo; sarà $O'R'$ l'orizzonte, che potrà considerarsi come un piano tangente la Terra nel punto H, ZHC la verticale, HP l'asse di rotazione della sfera celeste, P il polo, $E'Q'$, l'equatore, ZPQ il meridiano.

Ma le distanze CP, CE, che sono raggi della sfera celeste, dovendo considerarsi infinite rispetto al raggio HC della Terra, ne segue che tanto il punto H quanto il punto C possono prendersi per centro della sfera celeste, onde in vece de' cerchi che hanno per centro il punto H, si potranno senza inconveniente adottare quelli che passano parallelamente ai medesimi per il punto C, e riferire ad essi le posizioni degli astri. Quindi in vece dell'equatore $E'Q'$ potrà prendersi l'altro EQ che passa pel centro, ed in vece dell'orizzonte $O'R'$, il cerchio OR ad esso parallelo. L'asse HP si confonderà con l'asse CP, ed il meridiano ZPQ potrà supporsi avere per centro il punto C in vece del punto H. Le osservazioni astronomiche, da cui si argomenta l'immensa distanza delle stelle fisse, giustificano questo modo di procedere, che offre il vantaggio di poter rapportare ad un centro comune le posizioni di tutti gli astri osservati ne' varii punti della superficie terrestre.

L'asse PP' attraversando la sfera terrestre, segnerà nella superficie di essa i poli p,p' corrispondenti ai poli celesti P,P'; ed i cerchi massimi EQ,ZPQ,OR, della sfera celeste intersegando la superficie terrestre segneranno pure sopra di essa i corrispondenti cerchi massimi terrestri, cioè l'equatore, il meridiano, e l'orizzonte terrestre del luogo H. Inoltre, se immaginiamo un cono che abbia per base un cerchio minore della sfera celeste, e per vertice il centro della Terra, la superficie di un tal cono intersegherà la superficie terrestre, e segnerà su di essa la circonferenza di un cerchio minore parallelo e corrispondente per posizione a quello della sfera celeste. In tal modo dai cerchi polari e dai tropici celesti si desumono i corrispondenti cerchi minori della sfera terrestre, che hanno lo stesso nome.

Fra tutti i cerchi della sfera celeste ed i correlativi cerchi terrestri, è facile osservare che alcuni variano al variare del punto della Terra in cui si trova l'osservatore ed altri no. La posizione

dell' equatore celeste EQ e de' suoi paralleli, essendo indipendente dalla verticale ZHC, questi cerchi rimangono gli stessi, qualunque sia il punto della superficie terrestre da cui si osserva il cielo; lo stesso avviene dell' equatore e de' paralleli terrestri. Ma la posizione del meridiano e dell' orizzonte celeste dipendendo dallo zenit dell' osservatore, ne segue che questi cerchi variano per ogni luogo della Terra; il meridiano però rimane lo stesso per tutti i punti situati sulla circonferenza di un meridiano terrestre Hpq. Similmente l' orizzonte ed il meridiano terrestre sono diversi per ogni luogo della Terra, e compete soltanto lo stesso meridiano terrestre a tutti i punti della circonferenza di un cerchio massimo che passa per i poli del globo.

§. 46. Quanto si è detto nel §. precedente sull' uso di riferire ai cerchi che passano pel centro della Terra la posizione de' corpi celesti, vale per quelli astri che sono ad una distanza tale da noi che possa considerarsi infinita rispetto al raggio terrestre, come avviene delle stelle fisse; ma il Sole, la Luna, ed i pianeti, che abbiamo veduto distinguersi fra tutti gli astri col loro moto proprio, sono anche in ciò differenti dalle stelle fisse. Essi sono molto più vicini a noi, e la loro distanza non può supporsi infinita in confronto del raggio della Terra. Nondimeno le posizioni di questi astri dovranno, come quelle di tutti gli altri, essere riferite ai cerchi della sfera che hanno per centro il punto C, e saranno soltanto necessarie alcune correzioni per rapportare al centro della Terra le posizioni degli astri osservate alla superficie.

Sia, per esempio, M la Terra, [*fig.* 8], e COZ il meridiano celeste che passa per la verticale CZ del punto H della superficie terrestre. Sia S un astro molto più vicino a noi della sfera stellata, che supponiamo descritta con un raggio quasi infinito CZ; e per la verticale CHZ, e per il punto S facciamo passare un piano. Questo piano segnerà sulla sfera celeste un cerchio massimo ZV che sarà il verticale dell' astro. Condotta dal punto H al punto S una linea retta, sarà questa la visuale diretta all' astro per un osservatore che si trova in H, e similmente la retta SC sarebbe la visuale dell' astro per un osservatore che si trovasse in C; quindi l' angolo SHZ sarà la distanza dallo zenit dell' astro veduto da H, e la distanza dallo zenit dello stesso astro veduto da C sarà SCZ. Ma siccome la posizione dell' astro è sempre da noi riferita alla sfera stellata sulla quale ci comparisce projettato, così l' osservatore che è in H, vedrà l' astro sul prolungamento della visuale SH nel punto n del verticale ZV, e l' osservatore che è in C, lo vedrà sul prolungamento della visuale SC nel punto m dello stesso verticale. Ora, dal triangolo SHC si ha, $ZCS=ZHS-HSC$, dunque se dalla distanza dell' astro dallo zenit osservata nel punto H della superficie terrestre, si tolga l' angolo HSC, si avrà la distanza dallo zenit riferita al centro della Terra. Gli astronomi chia-

mano l' angolo *ZHS distanza apparente* dell' astro dello zenit, l' angolo *ZCS distanza vera*, e l' angolo *HSC* all' astro fra il punto *H* ed il centro *C*, *parallasse* dell' astro. Vi sono varii metodi per determinare la parallasse del Sole, della Luna, e de' pianeti, onde si potrà sempre dalla loro distanza apparente dallo zenit dedurre la distanza vera. Similmente le ascensioni rette, e le declinazioni degli astri osservate sulla superficie terrestre possono correggersi convenientemente per essere rapportate al centro, e rimane perciò fermo il principio generale stabilito nel §. 45, che le posizioni degli astri osservate sulla superficie della Terra possono senza inconveniente riferirsi al centro di essa, considerando questo punto come centro anche della sfera celeste.

Le distanze di un astro dallo zenit essendo diverse pei punti *H*,*C*, differiranno della stessa quantità anche le altezze dell' astro che ne sono i complementi. Quindi l' altezza dell' astro sull' orizzonte *O'R'* [*fig.* 7] è diversa da quella sull' orizzonte *OR* e le altezze medesime prendono i nomi di altezza *apparente*, e di altezza *vera*. Questi due orizzonti si distinguono, il primo col nome di *orizzonte sensibile*, ed il secondo col nome di *orizzonte razionale*, o *astronomico*.

§. 47. Nel considerare l' orizzonte sensibile *O'R'* si è supposto che l' occhio dell' osservatore, che ne è il centro, si trovasse sulla superficie levigata di una sfera alla quale l' orizzonte stesso era tangente. Ma tale a rigore non è la superficie della Terra; essa ha molte scabrosità ed ineguaglianze, piccolissime, se si vuole, in confronto del suo diametro, ma bastanti per far variare l' estensione della veduta. Ora, dall' osservazione comunissima che le acque cercano sempre il livello più basso, e che quelle de' fiumi scendono al mare, si desume che il livello del mare è fra tutti il più basso; esso si considera costante per tutta la terra, e però gli si riferiscono come a termine di paragone, o *zero* della scala, le altezze de' varii punti della superficie terrestre. Supposto dunque che la superficie del mare rappresenti quella del nucleo sferico della Terra privo di scabrosità, sia *H* [*fig.* 7] un punto della stessa superficie, ed *h* un altro punto elevato sul livello del mare. Condotte dal punto *h* due tangenti alla superficie terrestre, e prolungate sino al cielo stellato, se queste tangenti si fanno girare intorno alla verticale *hZ* sino a compiere una superficie conica, è chiaro che la circonferenza del cerchio *O''R''*, base del cono, limiterà all' osservatore *h* la veduta del cielo, come la circonferenza che nel supposto movimento descrive il punto *a* di contatto della retta *hR''* con la superficie terrestre, limita la veduta della Terra. La superficie conica sulla quale sono segnate le due circonferenze celeste e terrestre che limitano la veduta, costituisce una terza specie di orizzonte detto *inclinato*. L' angolo fra la verticale ed uno de' lati dell' orizzonte inclinato è maggiore del quadrante, ma non lo supera di molto. In fatti la più alta montagna del globo finora conosciuta è il *Tchhamoulari*

appartenente alla catena de' monti *Himalaya* nell'Asia, il quale si eleva circa $4\frac{1}{2}$ miglia sul livello del mare, ed il raggio della Terra è 3438 miglia [I, §. 54]; onde facendo $Hh=4\frac{1}{2}$, $CH=3438$, sarà $Ch=3442,5$, e quindi, $sen\ Cha=\frac{Ca}{Ch}=\frac{3438}{3442,5}$ da cui si deduce $Cha=87^{\circ}.4'.10''$, e $ZhR''=92^{\circ}.55'.50''$.

Competeranno dunque al punto h tre orizzonti, cioè l'orizzonte razionale OR, l'orizzonte inclinato $O''hR''$, e l'orizzonte sensibile $O'''hR'''$, che è sempre un cerchio perpendicolare alla verticale ZhH, la quale si suppone normale alla superficie terrestre, e identica alla direzione della gravità.

Dell' atmosfera terrestre, della refrazione astronomica, e del crepuscolo.

§. 48. Un fluido sottilissimo, trasparente ed elastico chiamato *aria* circonda il globo terrestre da ogni parte, ed elevandosi a grande altezza, forma l' *atmosfera*. Il suo peso fa equilibrio ad una colonna di mercurio di 28 pollici nel barometro, e la sua densità in ogni strato varia secondo i diversi gradi di temperatura indicati dal termometro. Nelle alte regioni dell' atmosfera l' aria diviene di grado in grado meno densa, poichè, in forza della sua compressibilità, i suoi strati inferiori sono più densi de' superiori de' quali sopportano il peso.

Noi vediamo dunque gli astri a traverso di un fluido, e la deviazione che soffrono i loro raggi luminosi nel passare per l'atmosfera, ce li fa vedere quasi sempre in un luogo diverso da quello che occupano realmente. In fatti, sappiamo dall'ottica che la luce passando obliquamente da un mezzo in un altro di maggior densità, cambia direzione accostandosi alla perpendicolare condotta alla superficie del mezzo più denso nel punto in cui il raggio luminoso lo incontra. Questo effetto, che dicesi *refrazione*, cresce sempre più secondo che i raggi divengono più obliqui rispetto alla superficie refringente.

Siccome la densità degli strati dell'atmosfera va crescendo progressivamente dal più alto limite di essa sino alla superficie della Terra, così un raggio luminoso Am [*fig.* 8] il quale attraversa obliquamente tutti quelli strati, dc,cb,ba,aH, supposti sferici, concentrici, e di spessezza infinitesima, non segue un cammino rettilineo, ma passando da uno strato all'altro si accosta sempre più alle rette mC,nC,oC,rC perpendicolari alle superficie degli strati ne'punti d'incidenza m,n,o,r. Il raggio luminoso giunge perciò all'occhio descrivendo una curva $mnor$ concava verso la superficie terrestre, e l'astro è veduto nella direzione dell'ultimo elemento Hr della curva o trajettoria che termina all'occhio, ossia nella direzione della tangente HA' alla curva stessa. La refrazione è dunque l'an-

golo $A'HA$ che questa tangente fa colla retta HA condotta al luogo vero dell' astro.

§. 49. Dalla spiegazione succinta di questo fenomeno si comprende che la refrazione *astronomica* è massima quando gli astri sono all' orizzonte, diminuisce secondo che essi si elevano, ed è nulla quando passano per lo zenit, poichè l'angolo che il raggio luminoso Am fa col prolungamento $A'm$ della perpendicolare condotta al punto d'incidenza, è massimo all'orizzonte, e va gradatamente diminuendo sino allo zenit in cui è nullo. Questa obliquità del raggio visuale diretto all' astro, rispetto all' atmosfera, non si verificherebbe per un osservatore posto al centro C della Terra, il quale vedrebbe sempre gli astri nella direzione immutabile di un raggio terrestre prolungato.

L'effetto della refrazione è di far comparire gli astri più elevati che realmente non sono nel loro verticale, e quindi l'altezza dell'astro osservata sulla superficie della Terra, cioè l'altezza *apparente*, dovrà esser diminuita della refrazione per aversi l' altezza vera. Questa correzione è la sola di cui hanno bisogno le altezze apparenti delle stelle per esser ridotte ad altezze vere; ma le altezze del Sole, della Luna e de' pianeti debbono anche aumentarsi della parallasse come si è accennato nel §. 46.

La refrazione diminuendo al crescere dell' altezza apparente, il suo valore dipende principalmente da quest' altezza, o sia è funzione di essa. La refrazione varia ancora secondo lo stato del barometro e del termometro nel luogo di osservazione, e ad un' altezza maggiore di 10°, non vi sono altre cause che possano contribuire ad alterarla sensibilmente. I geometri ne hanno assegnate le leggi, ed essa è stata anche ridotta in tavole di un uso comodissimo, come vedremo in seguito. Ma al di sotto di 10°, e specialmente vicino all' orizzonte, le variazioni della refrazione sono irregolarissime ed incapaci di esser sottoposte a regole fisse. Per dare un' idea della quantità della refrazione, osserveremo che all' orizzonte essa è un angolo di $33'\frac{3}{4}$ circa, per cui eguaglia quasi il *diametro apparente*, o sia l' angolo visuale sotto il quale apparisce il Sole o la Luna; dimodochè quando si vedono il Sole o la Luna interamente al di sopra dell' orizzonte ed a contatto con esso, quelli astri sono realmente sotto l' orizzonte, e lo toccano col loro lembo superiore.

Del crepuscolo.

§. 50. L' atmosfera presenta anche un altro fenomeno. I suoi strati superiori sono illuminati dal Sole quando l' astro si trova sotto l' orizzonte, e facendo da specchi concavi, riflettono a noi la luce solare, e danno origine al *crepuscolo*, il quale è quel lume che precede il nascere del Sole dalla parte di oriente, e segue il suo tramontare verso occidente. Il crepuscolo può considerarsi come un prolungamento del giorno, ed in fatti negli usi civili si

è convenuto che il giorno incominci mezz' ora prima del levare del Sole, e finisca mezz' ora dopo il suo tramontare. La durata del crepuscolo non è costante ma varia per i diversi luoghi della Terra, come sarà detto in appresso; possiamo intanto risolvere il seguente problema.

§. 51. PROBLEMA. *Determinare la depressione del Sole quando comincia il crepuscolo, e con questo dato calcolare l' altezza dell' atmosfera.*

In una notte serena, volgasi attentamente lo sguardo a quella parte del cielo verso la quale è tramontato il Sole, per notare il momento in cui cessa interamente di vedersi la luce del crepuscolo, il che in alcune particolari condizioni di climi e di stagioni si può osservare con sufficiente distinzione. Sia t l' ora che segna un buono orologio in quell' istante, ed S il luogo che occupa il Sole sotto l'orizzonte [*fig.* 9]. Supponendo contato il tempo t da mezzogiorno, sarà t il tempo trascorso dopo il passaggio del Sole pel meridiano, e quindi l'angolo orario ZPS sarà espresso da $15t$. Nel triangolo sferico ZPS si potranno dunque supporre conosciuti tre elementi cioè, il lato ZP complemento dell' altezza del polo, il lato PS complemento della declinazione SA del Sole [§. 32], e l' angolo compreso ZPS; e si calcolerà la distanza ZS del Sole dallo zenit. Fatta l' esperienza ed eseguito il calcolo da diversi osservatori si è generalmente convenuto che il valore di ZS eguaglia 108 gradi circa, cioè che quando termina il crepuscolo, il Sole ha una depressione bS di 18 gradi.

Ciò premesso, sia DHC la terra, ed FBE [*fig.* 10] l' ultimo fra gli strati dell' atmosfera che ha sufficiente densità per riflettere verso l' osservatore H la luce che riceve dal Sole. Trovandosi questo astro in S sotto l' orizzonte OR, illumina il punto B di quello strato, posto sull' orizzonte, ed il raggio SB è riflesso secondo BH, per essere l' angolo d' incidenza SBC eguale a quello di riflessione CBH, nei due triangoli rettangoli eguali CDB, CHB. Ma si è detto che quando l' osservatore H vede l' ultimo lume in occidente, la depressione del Sole è di 18° gradi, dunque l' angolo OHS avrà questo valore; e siccome la distanza BH si può considerare piccolissima rispetto alla distanza SH del Sole dalla terra, le due rette BS, SH saranno sensibilmente parallele, ed anche l' angolo OBS si potrà supporre di 18°. Il suo supplemento DBH sarà perciò eguale a 162°, e la metà di quest' ultimo, cioè l' angolo DBC sarà di 81°. Per conseguenza nel triangolo rettangolo CDB, si conosce l' angolo DBC ed il lato CD, che rappresenta il raggio terrestre, ed eguaglia 3437,747 miglia [I, §. 54]; e si potrà calcolare l' ipotenusa BC per mezzo della formola:

$$BC = \frac{DC}{\operatorname{sen} DBC} = \frac{3437,747}{\operatorname{sen} 81^\circ}.$$

Eseguito il calcolo, si ottiene $BC=3480,6$, da cui tolta $NC=3437,7$, si ha per residuo l'altezza dell'atmosfera BN di 43 miglia. Lo strato d'aria FBE, che è l'ultimo capace di riflettere all'occhio la luce del Sole, non è certamente l'ultimo limite dell'atmosfera, per cui la precedente altezza dovrebbe esser minore della vera; ma in uno studio più profondo di questo fenomeno bisognerebbe tener conto della deviazione che, per effetto della refrazione, soffrono i raggi solari entrando nell'atmosfera; ed altronde il celebre *Lambert* osservò che il primo albore in oriente, o l'ultima luce in occidente, non dovevano considerarsi come riflessioni immediate degli ultimi strati atmosferici direttamente illuminati dal Sole, e vi era anzi ogni probabilità di credere che quel primo o ultimo lume crepuscolare fosse prodotto dalla riflessione degli strati d'aria contigui a quelli direttamente illuminati, e quindi da una seconda riflessione. Il sig. *Biot* nella 3.ª edizione della sua Astronomia fisica espone la teoria di *Lambert*, sulla guida della quale quest'ultimo calcolò che l'altezza delle più lontane particelle d'aria capaci per la loro densità di riflettere la luce del Sole non era forse maggiore di 16 miglia.

CAPO QUARTO

Delle latitudini e delle longitudini geografiche, delle tre posizioni della sfera, delle zone terrestri, e dei climi.

Delle latitudini e delle longitudini geografiche.

§. 52. Volendo riferire le posizioni de' varii punti della sfera terrestre a due cerchi massimi, analogamente a ciò che si è detto per gli astri sulla sfera celeste, bisognerà prima di tutto cercare un punto sulla Terra che possa prendersi per origine delle coordinate sferiche. I punti equinoziali la cui posizione (prescindendo dal piccolo movimento di precessione) è stabile relativamente a quella delle stelle, partecipano però al moto diurno della sfera celeste, percorrendo la circonferenza dell'equatore in 24^h sideree [§. 31]. E supposto unito per mezzo di linee rette il centro della terra coi punti dell'equatore celeste in cui si trova successivamente l'equinozio γ di primavera nel suo movimento, queste rette segneranno sull'equatore terrestre altrettanti punti corrispondenti a quelle posizioni

del punto γ, il quale non avrà perciò sulla superficie terrestre una posizione costante e determinata (*) L'origine delle coordinate sferiche terrestri non potrà dunque esser naturale, ma dovrà essere convenzionale.

Sia pp' l'asse terrestre [*fig.* 11] di cui gli estremi p,p' sono i poli nord, e sud della Terra, erq l'equatore, B un punto qualunque della superficie terrestre del quale si vuol determinare la posizione. Il cerchio massimo pBp' che passa per i poli e pel punto B, sarà il meridiano di questo punto.

Se fosse data la distanza Br del punto B dall'equatore, contata sul meridiano pBp', non perciò sarebbe data la posizione del punto B sulla sfera, poichè infiniti altri punti della superficie terrestre potrebbero trovarsi alla stessa distanza dall'equatore, e propriamente tutti quelli della circonferenza del cerchio minore descritto col polo p, e con l'intervallo Bp. Ma se oltre alla distanza Br del punto B dall'equatore, fosse anche dato l'arco er dell'equatore medesimo, compreso fra il piede r dell'arco perpendicolare ed un punto e scelto ad arbitrio, sarebbe allora completamente conosciuta la posizione del punto B, purchè fosse convenuto che la posizione di tutti i punti della superficie terrestre dovesse riferirsi alla stessa origine e.

L'arco er dell'equatore compreso fra il punto e ed il meridiano del punto B si chiama la *longitudine geografica* di B, e l'arco rB del meridiano compreso fra l'equatore ed il punto B, dicesi la *latitudine geografica* del punto medesimo. Ambedue questi archi s'intendono espressi in gradi del cerchio massimo cui appartengono.

§. 53. La longitudine geografica di un punto B equivale anche all'angolo al polo epr compreso fra il meridiano di B ed il meridiano che passa per l'origine e. Non sarà perciò necessario per fissare l'origine delle longitudini di ricorrere ad un punto preso sull'equatore, ma basterà adottare un meridiano che passi per un dato luogo, A per esempio, al quale si riferiranno tutti gli altri meridiani. Questo meridiano di convenzione da cui si parte per valutare le longitudini di tutti i punti della superficie terrestre, si chiama *primo meridiano*. Esso divide la Terra in due emisferi, orientale ed occidentale, come l'equatore la divide ne' due, boreale ed australe. Supponendo che il moto diurno della sfera celeste si

(*) Ciò suppone che la Terra sia immobile. La medesima supposizione, sebbene non espressa è sottintesa in tutto il ragionamento che abbiamo fatto sulla sfera celeste e terrestre. La realità è che la Terra gira intorno al suo asse in 24 ore, ed il Cielo sta fisso; essa compie inoltre in un anno il suo giro intorno al Sole, il quale sembra in vece muoversi intorno a lei. Ma è uso degli astronomi di valersi delle *apparenze* celesti, nella esposizione de' primi elementi di astronomia, riserbandosi di esaminare a suo luogo le posizioni effettive degli astri nello spazio, ed i loro effettivi movimenti.

esegua relativamente alla Terra da q verso r, e che $pAep'q$ sia il primo meridiano, sarà $perp'q$ l'emisfero orientale e $peop'q$ l'emisfero occidentale.

Le latitudini geografiche possono essere boreali, od australi, partendo dall'equatore ed andando verso il polo nord, o verso il polo sud; e le longitudini possono essere orientali oppure occidentali, partendo dal primo meridiano ed andando verso l'est, o verso l'ovest. Competeranno le latitudini *nord* ai punti della Terra compresi nell'emisfero boreale, e le latitudini *sud*, a quelli dell'emisfero australe. E rispetto alle longitudini, i punti della Terra compresi nell'emisfero orientale avranno una longitudine *est*, e quelli dell'emisfero occidentale, una longitudine *ovest*. Per esempio, il punto K avrà l'arco oK per latitudine sud, e l'arco eo, ovvero l'angolo epo per longitudine ovest. Secondo questa maniera di contare le latitudini e le longitudini, è chiaro che le latitudini sud si devono considerare come negative, relativamente alle latitudini nord, e così le longitudini ovest rispetto alle longitudini est.

§. 54. I luoghi della Terra che hanno eguali latitudini e dello stesso nome, sono evidentemente situati sulla circonferenza di un cerchio minore della sfera parallelo all'equatore, siccome Ht [*fig.*7]. Questi cerchi minori prendono il nome di *paralleli terrestri*, o *paralleli di latitudine*, dalla loro posizione, e spesso sono distinti col nome di un luogo per il quale passano, come il parallelo di *Napoli*, il parallelo di *Parigi* etc. I raggi di tali cerchi, assumendo per unità il raggio della sfera, sono i *coseni delle rispettive latitudini;* così il raggio del parallelo Ht è Hg, coseno di He. E poichè le circonferenze de' cerchi sono proporzionali ai raggi, e gli archi simili sono proporzionali alle circonferenze, ne segue che la *lunghezza di un grado di cerchio massimo della sfera*, di un meridiano per esempio, *sta alla lunghezza di un grado di parallelo*, *come il raggio delle tavole sta al coseno della latitudine del parallelo*. Questo rapporto fra i gradi di meridiano e di parallelo è la più importante condizione che bisogna conservare nelle projezioni delle carte geografiche. I luoghi della terra che hanno longitudini dello stesso nome ed eguali, o di diverso nome, e tali che sommate insieme formano 180°, sono posti sullo stesso meridiano terrestre, come i luoghi B,F, o gli altri B,K [*fig.* 11].

§. 55. Relativamente alla scelta del primo meridiano, per molto tempo i geografi considerarono come tale il meridiano che passa per l'*isola del Ferro*, la più occidentale delle *Canarie;* e questo uso aveva il vantaggio che tutta l'Europa rimaneva all'oriente del primo meridiano, onde non vi erano per essa longitudini di diverso nome. Attualmente però i francesi e gl'inglesi si servono rispettivamente de' meridiani che passano per gli osservatorii astronomici di *Parigi* e di *Greenwich*, e tutte le altre nazioni di Europa fanno uso per lo più dell'uno o dell'altro. Questa di-

versità di meridiani non induce alcuna incertezza sulle longitudini, purchè si conosca l'arco dell'equatore compreso fra i meridiani generalmente adottati, per poter passare facilmente dall'uno all'altro, quando bisogna. Conoscendo, per esempio, la longitudine del luogo D [*fig.* 11] riferita ad uno dei due meridiani pBp', pAp' si otterrà subito la longitudine rispetto all' altro, aggiungendo o togliendo dalla longitudine data l'arco er dell'equatore interposto fra quelli meridiani, il quale arco, per maniera abbreviata di esprimersi, si chiama *differenza dei meridiani.*

§. 56. Date le latitudini e le longitudini di due luoghi, si potrà calcolare la loro minima distanza in un modo analogo a quello adoperato per trovare la distanza de' centri di due astri [§.34]; se non che, quando le longitudini sono di diverso nome, debbono sommarsi in vece di prenderne la differenza, e se la somma sorpassa 180°, si deve adottare il suo supplemento a 360° nel calcolo del triangolo sferico. Dalla risoluzione di questo triangolo si ottiene l'arco di cerchio massimo, o sia la minima distanza fra i due luoghi, sulla superficie terrestre; ma essendo quell' arco espresso in gradi, per avere la distanza in misure itinerarie basterà ridurlo in minuti, o sia in *miglia geografiche italiane* (*).

Relazione della latitudine geografica con l'altezza del polo, e della longitudine col tempo.

§. 57. *La latitudine geografica di un luogo qualunque H [fig. 7] eguaglia l'altezza del polo sull'orizzonte astronomico del luogo medesimo.* In fatti gli angoli ECP, ZCR sono eguali, perchè retti, e togliendo di comune l'angolo ZCP rimane l'angolo PCR ossia l'altezza del polo sull'orizzonte OR, eguale all'angolo ECZ, che è misurato dall'arco EZ, o dal suo simile eH, cioè dalla latitudine del luogo H. L'arco EZ, che equivale all'altezza del polo, o alla latitudine, si chiama *declinazione dello zenit.*

La latitudine si determina misurando l'altezza del polo nel modo accennato di sopra [§. 32]; e poichè dall'osservazione si ottiene l'arco PR [*fig.* 7], o sia l'angolo fra l'asse del mondo e l'orizzonte, che eguaglia l'altro fra la verticale ZC e l'equatore, ne segue che, qualunque sia la forma della superficie terrestre, *per latitudine geografica di un luogo deve sempre intendersi l'angolo formato dalla verticale col piano dell'equatore terrestre,* che è il medesimo di quello dell'equatore celeste. Considerando la terra

(*) L'immediata riduzione in miglia italiane della distanza trigonometrica fra due luoghi, dimostra quanto il *miglio* sia da preferirsi ad ogni altra unità itineraria. Il *chilometro* avrebbe lo stesso pregio del miglio se le latitudini e longitudini geografiche fossero espresse in gradi decimali, ma quest' uso non si è potuto introdurre, e ne abbiamo assegnata la ragione nella nostra *Aritmetica.*

come un' ellissoide generata dalla rotazione dell' ellisse intorno al suo asse minore, la verticale non passa per il centro, ma è una *normale* alla superficie, e si confonde con la direzione del filo a piombo, o sia della gravità terrestre.

§. 58. Rispetto alla longitudine, sia $epqp'$ la sfera terrestre [*fig.* 11] ed $EPQP'$ la celeste concentrica. Rappresentino B,D due luoghi della terra, e siano $Aep'q$ il primo meridiano, e $pBrp'$ il meridiano del luogo B; sarà er la longitudine di questo luogo. Il meridiano celeste di B sarà $PSLP'$, e quello di A sarà $PMEP'$, e supponendo che il Sole in un dato giorno dell' anno percorra il parallelo NSM, sarà mezzogiorno pel luogo B quando il Sole si trova nel punto S del suo corso, e sarà mezzogiorno pel luogo A quando il Sole giunge nel punto M. Dunque nel luogo B accade mezzogiorno prima che avvenga nel luogo A, cioè mentre nel luogo B si contano 12 ore, nel luogo A si contano, per esempio, $11^h. 18'$. Riflettiamo ancora che il Sole nel passare dal meridiano del luogo B su quello del luogo A percorre l' arco MS, e perciò il mezzogiorno del luogo A accade dopo quello del luogo B per un tempo eguale al tempo che impiega il Sole a percorrere l' arco MS. Quest' arco contiene lo stesso numero di gradi dell' arco EL dell' equatore celeste, e l' arco EL essendo concentrico con l' arco er dell' equatore terrestre contiene pure un numero di gradi eguale a quello della longitudine del luogo B. Ora, il moto diurno del Sole compiendosi in 24^h vere, 15 gradi sono percorsi in un' ora, onde il tempo che impiega l' astro a passare da S in M sarà uguale ad $\frac{MS}{15}=\frac{er}{15}$. Nel momento, dunque, in cui il Sole si trova in S, nel luogo B si contano 12 ore, e nel luogo A, cioè sul primo meridiano, si contano 12 ore meno $\frac{er}{15}$; e similmente quando in B si conta un' ora dopo mezzogiorno, in A si conta $1^h-\frac{er}{15}$, e così di seguito, dimodochè quando in B si contano $\frac{er}{15}$ ore, sul primo meridiano si contano 0^h, cioè è mezzogiorno. Quindi, *la differenza delle ore che in uno stesso istante fisico si contano sul primo meridiano e sul meridiano di un altro luogo della terra è eguale alla longitudine geografica di questo luogo ridotta in tempo alla ragione di 15° per 1 ora; la quale longitudine è rappresentata ancora dall' ora che si conta sul meridiano del luogo, quando sul primo meridiano si conta un' ora zero.*

Allo stesso modo quando il Sole si trova in R passa pel meridiano del luogo D e deve impiegare ancora un tempo eguale ad $\frac{SR}{15}=\frac{LT}{15}=\frac{rm}{15}$ per passare al meridiano del luogo B, onde nel

luogo B si conta sempre un minor numero di ore che nel luogo D allo stesso istante fisico, e la differenza fra le ore de' due luoghi è uguale alla differenza rm delle loro longitudini ridotta in tempo. Perciò in generale, *la differenza di longitudine di due luoghi è uguale alla differenza delle ore che in uno stesso istante fisico si contano nei luoghi medesimi convertita in arco, con moltiplicarla per* 15; *e dei due luoghi è all' oriente quello in cui si conta un' ora maggiore.*

§. 59. Il precedente ragionamento, essendo fondato sul moto diurno del Sole, si potrebbe obiettare che questo astro a rigore non percorre un parallelo, e non si muove equabilmente [§§. 25, 29]; ma nel breve giro di 24 ore il moto del Sole si può considerare uniforme, e ad un arco di parallelo MS, che il Sole non descrive esattamente, si può sostituire l' angolo al polo EPL, supponendo che l' astro in 24 ore vere compia con moto equabile un angolo orario di 360 gradi. Del resto, il moto diurno di una stella può servire, come quello del Sole, a far conoscere la relazione che la longitudine geografica ha col tempo, e non si è prescelto il moto del Sole se non per adattarsi alla intelligenza de' principianti, ai quali è più familiare il tempo vero che il tempo sidereo. È da notare, che una differenza di longitudine può essere indifferentemente rappresentata da un numero di ore solari, o da un numero eguale di ore sideree, quantunque questi due tempi, assolutamente considerati, siano di diversa durata; e ciò perchè una longitudine non è che il rapporto di un arco dell' equatore all' intera circonferenza, il quale può essere espresso tanto dal rapporto di un numero di ore solari a 24 ore solari, quanto dal rapporto dello stesso numero di ore sideree a 24 ore sideree.

§. 60. Si è veduto che *la longitudine non è altra cosa che l' ora solare o siderea che si conta in un dato luogo, quando sul primo meridiano si conta un' ora* ZERO *solare o siderea.* Secondo questa relazione della longitudine col tempo, ad una longitudine maggiore dovrebbe sempre corrispondere un' ora maggiore; e poichè ne' paesi orientali si conta necessariamente un tempo maggiore che negli occidentali in uno stesso istante fisico, le longitudini dovrebbero avere nei calcoli una sola denominazione, cioè essere sempre *orientali,* estendendosi da zero sino a 360°. Quindi si conosce l' improprietà dell' uso quasi generale di contare le differenze di longitudine da oriente verso occidente ne' calcoli geodetici, siccome sarà detto a suo luogo.

È chiaro che la longitudine, contata da occidente in oriente ed estesa sino a 360°, indica ancora il tempo che deve impiegare il Sole, una stella, o il punto equinoziale per passare dal meridiano celeste del luogo che si considera al primo meridiano, e rappresenta perciò un angolo orario. Il cerchio di declinazione che accompagna un astro nel suo moto diurno, coincide succes-

sivamente con tutti i meridiani celesti de' diversi luoghi della Terra, ciascuno de' quali può riguardarsi come cerchio di declinazione rispetto al primo meridiano, o ad un altro qualunque. Da qui si scorge la stretta analogia che le latitudini e le longitudini geografiche hanno con le ascensioni rette e le declinazioni degli astri; e dopo aver fatto notare che lo zenit, il quale rappresenta in cielo il luogo dell' osservatore, ha una declinazione eguale alla latitudine geografica, ed una ascensione retta variabile, [§§. 33, 57] possiamo ora aggiungere che quella ascensione retta dello zenit, se si considera nell' istante in cui il punto equinoziale passa per il primo meridiano, rappresenta la longitudine geografica. Per contrario deve avvertirsi che le latitudini e longitudini geografiche non sono da confondersi con le latitudini e longitudini degli astri, con le quali hanno di comune soltanto il nome, il che è senza dubbio una imperfezione nel linguaggio della scienza.

§. 61. La relazione che la longitudine geografica ha col tempo è il fondamento di tutti i metodi finora immaginati per determinare quell' elemento; perocchè se un fenomeno istantaneo qualunque si vede contemporaneamente da due luoghi molto distanti fra loro, notando in ciascun luogo il momento del fenomeno ad un orologio astronomico, la differenza dei due tempi darà la differenza di longitudine de' due luoghi. Vedremo in seguito come si applica questo principio.

Delle tre posizioni della sfera.

§. 62. Si è già veduto che l' orizzonte cambia per ogni luogo della superficie terrestre: supponiamo dunque che l' osservatore, partendo dal punto H [*fig.* 7], cammini sulla superficie della Terra lungo il meridiano terrestre $Hep'p$. Ad ogni sua nuova posizione avrà egli un nuovo orizzonte, e se si supponga che il suo movimento si esegua da H verso il polo p della Terra, è chiaro che l' angolo che l' orizzonte fa con l' asse del mondo, andrà sempre ingrandendosi, e quindi il polo celeste comparirà sempre più elevato sull' orizzonte, e quando l' osservatore sarà giunto in p, l' angolo diventerà retto, e si confonderà il polo con lo zenit, e l' equatore con l' orizzonte. Oltrepassato il punto p, l' orizzonte s' inclinerà di nuovo sotto un angolo acuto con l' asse del mondo, la verticale che accompagna l' osservatore si allontanerà sempre più dall' asse medesimo, ed il polo comparirà sempre più basso. Giunto l' osservatore in q sull' equatore terrestre, avrà per zenit il punto Q dell' equatore celeste, e vedrà i due poli P, P' in due punti opposti del suo orizzonte; l' equatore si confonderà col primo verticale. Proseguendo l' osservatore il suo cammino al di là del punto q verso p', scomparirà per lui il polo boreale P, ed egli non vedrà più altro che il polo australe P'. L'angolo fra la verticale

e l'asse del mondo che nel punto q era retto andrà a poco a poco diminuendo, ed il polo P' comparirà sempre più elevato sull'orizzonte. Giunto in p', l'osservatore si troverà rispetto al polo australe nella stessa posizione in cui era nel punto p rispetto al polo boreale. Tra il punto p' ed il punto e, la sua posizione sarà la stessa che fra il punto q ed il punto p', e nel punto e dell'equatore terrestre, egli ritornerà a vedere i due poli sul suo orizzonte. Oltrepassato finalmente il punto e, scomparirà per lui il polo australe, ed il polo boreale comparirà a poco a poco più elevato sull' orizzonte.

Fra tutte le posizioni che, come abbiamo veduto, può avere l'osservatore ne' diversi punti del meridiano terrestre $Hpqp'e$, è evidente che tre soltanto sono essenzialmente diverse fra loro. 1° Quando l'osservatore si trova in un punto dell'equatore terrestre; 2.° quando si trova fra l'equatore ed uno de' due poli; 3.° quando si trova in uno de' due poli. La posizione della sfera celeste rispetto all'orizzonte dell' osservatore in questi tre casi si chiama *retta*, *obliqua*, o *parallela*, prendendosi norma dalla posizione dell' equatore relativamente all' orizzonte. E siccome ciò che si è detto del movimento di un osservatore sul meridiano terrestre del punto H può applicarsi identicamente a qualunque altro meridiano, le posizioni della sfera celeste rispetto all' orizzonte di un luogo qualunque della Terra, non potranno essere diverse da quelle ora accennate.

§. 63. La sfera *retta* si verifica per tutti i luoghi della Terra situati sull' equatore terrestre. Gli abitanti di quelle regioni vedono la sfera celeste come nella figura 12; in cui C è il luogo dell'osservatore, e l' equatore EQ ed i suoi paralleli rq, mT, Hn... sono perpendicolari all' orizzonte, che li divide tutti in parti eguali. L' arco diurno di tutti gli astri è quindi eguale all'arco notturno, e ciò verificandosi anche del Sole, i giorni sono eguali alle notti in tutto l' anno. Il Sole passa per lo zenit due volte l' anno nei giorni degli equinozi, ed i paralleli da esso descritti negli altri giorni dell' anno, sono tutti compresi nella zona sferica $HnTm$, essendo HT l' ecclittica ed Hn, mT i due tropici egualmente distanti dal primo verticale. L' asse PP', intorno al quale si aggira la sfera celeste giacendo sull' orizzonte, si eleveranno successivamente su questo piano tutti gli astri del cielo nel corso di 24^h sideree, e giungeranno sul meridiano con un' altezza massima eguale al complemento della loro declinazione.

La durata del crepuscolo in questa posizione della sfera è assai breve. In fatti il crepuscolo comincia o finisce quando il Sole perviene sulla circonferenza del cerchio gh parallelo all' orizzonte, che dicesi *cerchio crepuscolare* ed è depresso per un arco gO di 18° [§. 51]. Ora, il Sole movendosi in direzione perpendicolare all' orizzonte, che in questo caso è un cerchio di declinazione,

percorrerà nella sfera retta la minima distanza fra il cerchio gh e l'orizzonte medesimo, tanto nel crepuscolo mattutino che nel vespertino. Però la durata del crepuscolo non sarà la stessa in tutti i giorni dell'anno, poichè ne' soli due giorni degli equinozi l'arco aC percorso dal Sole fra il cerchio gh e l'orizzonte sarà un arco di cerchio massimo, ed in qualunque altro giorno sarà un arco bD di cerchio minore; onde, se si conduca pel punto a un cerchio di declinazione aeP, è evidente che i tempi in cui il Sole percorre gli archi simili eD, aC sono eguali, e maggiore deve essere il tempo che impiega a percorrere tutto l'arco bD; per la qual cosa la durata del crepuscolo nel giorno dell'equinozio è minore di qualunque altra, ed eguaglia l'arco aC di 18° ridotto in tempo, cioè $1^h.12'$.

§. 64. La posizione della sfera *obliqua* si verifica per tutti i paesi della Terra compresi fra l'equatore ed i poli, tanto nell'emisfero boreale quanto nell' australe. Le apparenze celesti della sfera obliqua sono state a lungo descritte ne' Capi I e II; ma non debbono ommettersi alcuni confronti.

Ne' paesi settentrionali, come l'Europa, si hanno i giorni più lunghi quando il Sole si trova ne' primi sei segni Ariete, Toro, Gemelli, Cancro, Leone, e Vergine, perchè allora la sua declinazione è boreale, e quindi le sue distanze polari sono minori di 90° e gli archi diurni sono maggiori degli archi notturni [§. 5]; si hanno poi i giorni più corti quando il Sole si trova ne' rimanenti sei segni. Tutto ciò si osserva nella *fig.* 9, in cui P è il polo boreale, HT l'ecclittica, ed mT, nH, sono i tropici. Il contrario precisamente accade ne' paesi meridionali come si può vedere facilmente capovolgendo la figura 9, in modo da rendere superiore il polo sud. Ne' paesi settentrionali il giorno più lungo dell'anno è quello in cui il Sole descrive il tropico del Cancro, e ne' paesi meridionali è questo il giorno più corto: il contrario accade per il tropico di Capricorno. L'estate dell'emisfero boreale è dunque contemporanea all' inverno dell' emisfero australe e viceversa; ed in quanto alle stagioni intermedie è anche facile persuadersi che sono opposte nei due emisferi, riflettendo che la primavera è il passaggio dell'inverno all'estate, e l'autunno è il passaggio dall'estate all' inverno.

§. 65. Oltre alla indicata opposizione di stagioni ne' due emisferi boreale ed australe, sono anche da notare alcune singolarità, che si verificano per luoghi del globo situati in particolar modo uno rispetto all' altro.

Due paesi situati alle estremità di un diametro della sfera terrestre, diconsi *antipodi* uno dell' altro. Essi hanno lo stesso orizzonte, ma uno ne vede la faccia superiore, l'altro la faccia inferiore; onde lo zenit dell' uno è il nadir dell'altro. Essi hanno la stessa latitudine, ma di diverso nome, e le loro longitudini differiscono di 180°. Un astro si leva per l' uno quando tramonta per l'altro;

uno ha il giorno quando l'altro ha la notte; è mezzogiorno per l'uno quando è mezzanotte per l'altro, e finalmente le stelle che non tramontano mai sull'orizzonte dell'uno non si levano mai sull'orizzonte dell'altro, e viceversa. È stata lungamente posta in dubbio l'esistenza degli antipodi, non potendo immaginarsi come due uomini potessero trovarsi posti coi piedi contro ai piedi. Ma la legge di attrazione al centro della Terra, che spiega il fenomeno, ed in forza della quale quella sola posizione è naturale, fu convalidata dal fatto, essendosi scoperte da' viaggiatori molte terre australi, che hanno i loro antipodi nell'emisfero boreale.

Due paesi situati ad eguali distanze dall'equatore, uno nell'emisfero boreale, e l'altro nell'emisfero australe, e che si trovino sullo stesso meridiano terrestre ed abbiano la stessa longitudine geografica, si chiamano *anteciani* uno dell'altro. Essi hanno il mezzogiorno e la mezzanotte nello stesso tempo, ma la durata del giorno per l'uno è eguale a quella della notte per l'altro; le stelle che non tramontano mai sull'orizzonte dell'uno, non si levano mai sull'orizzonte dell'altro.

I paesi che sono sullo stesso parallelo all'equatore ma in due punti opposti si chiamano *periciani*. L'inclinazione del polo, la durata de' giorni, le stagioni, le stelle, tutto è identico per questi due luoghi, ed essi differiscono soltanto nelle ore del giorno, perchè le loro longitudini differiscono di 180°. Quando è mezzogiorno per l'uno è mezzanotte per l'altro, il Sole nel giorno dell'equinozio si leva per l'uno quando tramonta per l'altro, ed allorchè i giorni sono maggiori di 12^h, i periciani vedono contemporaneamente il Sole per qualche tempo, come hanno di comune una porzione della notte, quando i giorni sono minori di 12 ore.

La durata del crepuscolo nella sfera obliqua, è maggiore che nella sfera retta, poichè i paralleli descritti dal Sole essendo inclinati all'orizzonte sotto un angolo acuto, la loro porzione Ca' [*fig.* 9] compresa fra il cerchio crepuscolare gh e l'orizzonte è maggiore che nella sfera retta dove corrisponde alla perpendicolare Ca. È anche evidente che ne' paesi più vicini ai poli terrestri, crescendo la latitudine geografica, e con essa l'altezza del polo, diminuisce l'angolo fra i paralleli descritti dal Sole e l'orizzonte, onde cresce la loro porzione racchiusa fra il cerchio crepuscolare e l'orizzonte, e la durata del crepuscolo diviene maggiore.

Si può calcolare facilmente la durata del crepuscolo per un dato orizzonte, in un determinato giorno dell'anno. In fatti, presa nelle tavole la declinazione del Sole per quel giorno, sarà conosciuto il suo complemento SP, o IP [*fig.* 9], e si potranno risolvere i due triangoli sferici ZIP,ZSP, di cui sono dati i tre lati; la differenza IPS degli angoli orarii calcolati ZPS,ZPI, ridotta in tempo, indicherà la durata del crepuscolo.

§. 66. La sfera *parallela* si verifica per due soli punti della

superficie terrestre, che sono i poli. Essa è rappresentata dalla *fig.* 13, dove si vede il polo confuso con lo zenit, e l'equatore con l'orizzonte. Per tutto il tempo che il Sole si trova ne' segni settentrionali, il polo boreale è illuminato senza interruzione, essendo tutti i paralleli che il Sole descrive in 24 ore dall'equatore EQ sino al tropico del cancro mT, superiori all'orizzonte; il Sole compie dunque ogni giorno il giro del cielo con rimanere sensibilmente alla stessa altezza durante le 24^h. Dopo l'equinozio di autunno, passando il Sole ne' segni meridionali, scomparisce dall'orizzonte del polo boreale e va ad illuminare il polo australe. Ciascuno de' due poli avrà perciò un giorno di sei mesi, ed una notte eguale. La sfera parallela non ha meridiano o per meglio dire ne ha infiniti, perchè ogni verticale è un meridiano; dimodochè per contare le ore, bisognerebbe scegliere uno ad arbitrio, al quale poter riferire i passaggi degli astri. Le stelle non tramontano mai, e girano in cerchi paralleli all'orizzonte con un'altezza eguale alla loro declinazione; ed il polo boreale non vede mai le stelle dell'emisfero australe, come il polo australe non vede mai quelle dell'emisfero boreale.

La durata del crepuscolo nella sfera parallela è evidentemente il tempo che impiega il Sole a descrivere col suo moto *proprio* un arco aC dell'ecclittica compreso fra il cerchio crepuscolare e l'orizzonte. Conducendo pel punto a il verticale Pa, nel triangolo rettangolo aCD si avrà $\text{sen}\,aC = \frac{\text{sen}\,aD}{\text{sen}\,aCD} = \frac{\text{sen}\,18^\circ}{\text{sen}\,23^\circ.28'}$, onde $aC = 50^\circ.53'.50''$, il quale arco dell'ecclittica è percorso dal Sole col suo moto proprio in giorni $51\frac{1}{2}$. Dunque, riuniti i due crepuscoli della mattina e della sera, la lunga notte di sei mesi deve considerarsi composta di 103 giorni di luce crepuscolare e di 80 giorni di perfetta oscurità.

Divisione della superficie terrestre in cinque zone e caratteri che le distinguono.

§. 67. Abbiamo veduto [§. 45] come dai tropici e dai polari celesti derivano sulla terra i cerchi minori dello stesso nome, i quali hanno rispetto all'equatore terrestre la stessa posizione che serbano i corrispondenti cerchi minori celesti rispetto all'equatore celeste. I tropici terrestri sono dunque due paralleli di latitudine distanti $23^\circ.28'$ dall'equatore, ed i polari sono alla medesima distanza dai poli, e quindi lontani dall'equatore per $66^\circ.32'$. Questi quattro cerchi dividono la superficie terrestre in cinque grandi zone: la prima compresa fra i due tropici contiene nel mezzo l'equatore terrestre e dicesi *zona torrida;* le due altre zone comprese fra i tropici ed i polari si chiamano *zone temperate*, e le due ultime racchiuse fra i cerchi polari ed i poli diconsi *zone glaciali*. Siffatte

denominazioni hanno relazione con la temperatura che si verifica in quelle diverse parti della superficie terrestre, dipendentemente dalla loro posizione geografica; ma prima di darne conto, è necessario far osservare che le variazioni di temperatura in uno stesso luogo della terra dipendono da due cagioni principali; 1.° *dalla presenza del Sole o dalla sua assenza dall'orizzonte;* 2.° *dalla sua maggiore o minore altezza meridiana.* La presenza del Sole sull'orizzonte è la cagione principale del calore, il quale si sviluppa per mezzo de' suoi raggi benefici, ed i raggi stessi hanno poi maggior vigore quando giungono a noi meno obliqui. In questo modo si spiega la differenza grande di temperatura fra l'està e l'inverno ne'paesi della sfera obliqua. Ma rispetto alle medie stagioni, potrebbe dirsi che nella primavera la durata de' giorni, non meno che le altezze meridiane del Sole, sono le stesse che nella state, e ciò non ostante questa stagione è più calda dell' altra; e v' ha pure la medesima corrispondenza fra l'autunno e l' inverno, malgrado che siano molto differenti le temperature di quelle due stagioni. Per la spiegazione di questo fatto è necessaria una terza considerazione. I cambiamenti di temperatura sulla massa terrestre non possono operarsi istantaneamente, ma si eseguono per gradi, onde avviene che sebbene la terra si trovi sotto l' influenza di nuove cause produttrici un aumento o una diminuzione di calore, ritiene ancora in parte e per qualche tempo la sua precedente temperatura. Perciò la primavera che segue l' inverno è meno calda della state; e l' autunno che vien dopo la state, è meno freddo dell' inverno.

§. 68. Ciò posto, nella zona torrida è grande il calore delle stagioni; 1.° perchè le altezze meridiane del Sole sono molto grandi di modo che questo astro passa due volte per lo zenit di ogni luogo della zona; 2.° perchè i giorni e le notti sono poco disuguali, onde il Sole non è mai lungamente assente dall' orizzonte. In fatti rappresentino, $EPQP'$ la sfera celeste [*fig.* 14], EQ l'equatore celeste, HK l'ecclittica, MH, KN, i tropici, sarà *abcd* la zona torrida. Il Sole co' suoi due movimenti, diurno ed annuo, percorrerà successivamente tutti i paralleli celesti $MH, SR', EQ, O'S'$, KN... dal tropico del cancro MH sino al tropico di capricorno KN, ed indi risalirà da questo tropico al tropico del cancro passando di nuovo per i medesimi paralleli. In questo movimento il Sole sarà sempre poco distante dallo zenit V di un punto qualunque r della zona torrida, poichè la sua distanza da quello zenit non può oltrepassare VK; passerà poi per lo stesso zenit V allorchè percorre il parallelo VF, scendendo dal tropico del cancro verso quello di capricorno, e tornerà a passare pel medesimo punto V quando tornerà a percorrere il parallelo VF salendo dal tropico di capricorno a quello di cancro. Ora, siccome qualunque punto della zona torrida deve avere il suo zenit compreso nella zona celeste racchiusa fra i due tropici MH, KN, così il Sole passerà due volte

all'anno per lo zenit di qualunque luogo della zona torrida, all'infuori dei luoghi posti su i tropici terrestri *ab,cd* che l'avranno una sola volta al loro zenit: ed essendo poi il Sole sempre a poca distanza dallo zenit quando passa pel meridiano dei diversi punti della zona torrida, esso sarà molto alto sull'orizzonte, i suoi raggi giungeranno poco obliqui sulla terra, ed ecciteranno un forte calore.

Rispetto alla durata dei giorni, siccome le latitudini dei varii luoghi della zona torrida sono molto piccole, perchè non eccedono 23°.28′, egualmente piccole saranno le altezze del polo sull'orizzonte, e grandi le altezze dell'equatore; perciò i paralleli descritti dal Sole essendo poco obliqui all'orizzonte, saranno divisi in parti non molto disuguali, e non vi saranno giorni e notti molto lunghi, o molto brevi.

I caratteri delle zone temperate sono, 1.° che il Sole non passa mai per lo zenit di nessun luogo di quelle zone, 2.° che i giorni e le notti sono sempre minori di 24 ore.

Primo. Ogni punto *n* delle zone temperate essendo fuori della zona torrida *abcd*, lo zenit corrispondente *Z* sarà pure fuori della zona celeste *MHKN*, ed il Sole che non può allontanarsi da questa zona, non potrà mai passare per lo zenit *Z*. *Secondo*. Un punto *l* del cerchio polare terrestre *lm* avrà il suo zenit *X* posto sul cerchio polare celeste *XY*, e l'orizzonte del punto *l* dovrà passare per i punti *K,H*, essendo $XH=90°$. Perciò il punto *l* avrà un giorno di 24 ore quando il Sole percorre il tropico del cancro *MH* che tocca superiormente l'orizzonte *HK*, ed avrà una notte di 24 ore quando il Sole percorre il tropico di capricorno *KN* che tocca l'orizzonte *HK* dalla parte di sotto. Quindi qualunque punto *n* della zona temperata, avendo il suo zenit al di sotto del cerchio polare *XY*, avrà il suo orizzonte *OR* al di sopra del punto *H*, onde questo orizzonte dovrà intersegare i due tropici *MH*, e *KN*: vi sarà dunque sempre una piccola notte *TH*, e un piccolo giorno *T′K*. La temperatura media delle zone temperate nasce appunto dal non essere le altezze del Sole nè molto grandi nè molto piccole, e dall'essere i giorni e le notti sempre minori di 24 ore.

I caratteri delle zone glaciali sono, 1.° le altezze meridiane del Sole molto piccole, per cui vi è poco sviluppo di calore attesa l'obbliquità dei raggi, 2.° le notti ed i giorni maggiori di 24 ore in certe stagioni dell'anno.

Primo. Le altezze meridiane del Sole sono molto piccole nella zona glaciale perchè le altezze del polo sull'orizzonte sono molto grandi, onde piccole sono quelle dell'equatore dalle quali dipendono le altezze del Sole. In fatti l'altezza *mO* del Sole sopra un orizzonte qualunque *OR* [*fig*. 9] è la somma dell'altezza *EO* dell'equatore e della declinazione *mE*, per cui quanto più piccola è l'altezza dell'equatore, più piccola sarà pure l'altezza meridiana

del Sole. *Secondo*. Un punto *l* del cerchio polare terrestre [*fig*. 14] ha un giorno ed una notte di 24 ore, ed il suo orizzonte passa a contatto dei tropici celesti: ma se si prenda un punto *o* della zona glaciale, lo zenit Z' di questo punto passando sopra il punto X, l'orizzonte corrispondente $O'R'$ passerà sotto il tropico MH, il quale rimarrà elevato sull'orizzonte stesso. Perciò comincerà il giorno per il luogo *o* quando il Sole percorrerà il parallelo SR' che ha una declinazione $R'Q$ complemento dell'altezza PR', del polo sull'orizzonte $O'R'$; continuerà il giorno sino a che il Sole salirà sul tropico MH e discenderà di nuovo verso l'orizzonte, e terminerà quando percorrerà un'altra volta il parallelo SR'. Similmente accaderà della notte: comincerà la notte quando il Sole percorrerà un parallelo $O'S'$ avente una declinazione australe EO' complemento dell'altezza del polo PR', il quale parallelo è il primo a rimanere tutto sotto l'orizzonte; continuerà sino a che il Sole discenda sul tropico KN e risalga di nuovo verso l'orizzonte, e terminerà quando il Sole percorrerà nuovamente il parallelo $O'S'$. Il giorno e la notte ora indicati possono essere di più mesi, ma dopo terminato l'uno e l'altra il punto *o* avrà dei giorni e delle notti minori di 24 ore, i quali si verificheranno allorchè il Sole percorre i paralleli compresi fra SR' ed $O'S'$, che sono tutti intersegati dall'orizzonte $O'R'$. Intanto è da notare che in questa zona l'abbassamento di temperatura prodotto dalla lunga assenza del Sole non è compensato dalla lunga presenza di questo astro nella stagione opposta, e ciò per l'obliquità con la quale i suoi raggi giungono sull'orizzonte.

De' climi.

§. 69. Per **clima** di un paese s'intende comunemente l'insieme delle condizioni geografiche e fisiche favorevoli o pur no alla vita degli animali ed alla vegetazione. E siccome fra quelle condizioni, prima è la durata de' giorni e delle notti, cui va congiunta l'altezza meridiana del Sole, cagione principale del calore, così la superficie terrestre è stata divisa in piccole zone chiamate ***climi***, ognuna delle quali è lo spazio compreso fra due paralleli all'equatore tanto lontani fra loro che il più lungo giorno dell'uno avanzi quello dell'altro di mezz'ora. Queste zone o ***climi geografici***, non possono, come è chiaro, oltrepassare i cerchi polari su i quali il più lungo giorno dell'anno è di 24 ore; laonde la rimanente zona sferica che si estende da que' cerchi insino ai poli è stata divisa in ***climi di mese***, intendendosi allora per clima l'estensione racchiusa da due paralleli tanto lontani fra loro che il più lungo giorno dell'uno avanzi di un mese quello dell'altro.

* È facile calcolare le latitudini geografiche de' paralleli che sulla superficie terrestre limitano i climi di giorno ed i climi di mese. Il

problema si riduce a calcolare la latitudine geografica di un luogo nel quale il massimo giorno dell' anno ha una durata determinata. Una tale quistione è inversa dall'altra; *data la latitudine di un luogo, calcolare la durata del massimo giorno dell' anno*; la soluzione della quale serve a render manifeste le condizioni geografiche del clima di un paese; e però incominceremo da quest' ultima, come più utile, e ci occuperemo poi anche della prima, per dare un' applicazione delle teoriche precedenti.

* §. 70. Sia OR l' orizzonte del luogo di cui la latitudine è $PR=L$ [*fig.* 9]; e rappresentino EQ l'equatore, ed mT il tropico di estate. Si sa che il massimo giorno dell' anno si verifica quando il Sole si trova su questo ultimo cerchio; supponiamolo dunque nell' incontro I del tropico con l'orizzonte, al momento del suo sorgere. Nel triangolo ZPI (zenit-polo-astro) si avrà $ZI=90°$, $ZP=90°-L$, e $PI=90°-23°.28'$; e con questi dati si potrà calcolare l'angolo orario ZPI, che ridotto in tempo e raddoppiato farà conoscere la durata del massimo giorno, che si cercava.

Si avrà dunque dalla trigonometria,

$$\cos P = \frac{\cos ZI - \cos ZP \cos PI}{\operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} PI},$$

e per essere, in questo caso, $\cos ZI = \cos 90° = 0$, sarà,

$$\cos P = -\cot ZP \cot PI = -\tan L \tan 23°.28'.$$

Calcolato l'angolo P, la durata del giorno risulterà eguale a $\frac{2P}{15}$.

Se nel calcolare la durata del giorno si volesse tener conto dell'effetto della refrazione, la quale si sa che innalza il Sole quando sorge di $33'.46''$ circa nel suo verticale, allora si dovrebbe considerare il triangolo ZPS, e porre $ZS=90°.33'.46''$, $ZP=90°-L$, $PS=90°-23°.28'=66°.32'$, e la formola più comoda per calcolare l'angolo orario sarebbe,

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2} ZPS = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\Sigma - ZP)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\Sigma - PS)}{\operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} PS}},$$

dove $\Sigma = ZS + ZP + PS$.

Nel caso in cui la latitudine del luogo è maggiore di $66°.32'$, cioè della latitudine del cerchio polare, la durata del massimo giorno dell' anno non dipende più dal moto diurno del Sole, ma dal suo moto proprio, siccome apparisce anche dalle formole precedenti, le quali divengono assurde per quel valore di L; e si sa che per un luogo della zona glaciale il giorno comincia quando il Sole acquista una declinazione eguale al complemento dell' altezza del polo, e termina allorchè ritorna ad avere la stessa declinazione, dopo esser passato per il tropico [§. 68]. Indicando con $\gamma Q \simeq$ l'equatore e

con γM♎ l'ecclittica [*fig.* 15], il massimo giorno dell'anno per un orizzonte della zona glaciale deve dunque durare tutto il tempo che il Sole impiega a descrivere l'arco aMa' dell'ecclittica, partendo da una declinazione ab eguale al complemento della latitudine, avanti il solstizio, e giungendo ad una eguale declinazione $a'b'$ dopo il solstizio. Laonde, data la latitudine del luogo, (75° per esempio), si conoscerà il suo complemento $ab = 15°$, e nel triangolo rettangolo γab, essendo anche conosciuto l'angolo $a\gamma b$, indicante l'obliquità dell'ecclittica, sarà,

$$\text{sen}\,\gamma a = \frac{\text{sen}\,ab}{\text{sen}\,a\gamma b} = \frac{\text{sen}\,15°}{\text{sen}\,23°.28'},$$

da cui si ottiene,

$$\gamma a = 40°.32'.15'', \gamma Ma' = 139°.27'.45'',$$

e quindi,

$$aMa' = \gamma Ma' - \gamma a = 98°.55'.30''.$$

Il massimo giorno dell'anno alla latitudine di 75° dovrà dunque durare tutto il tempo che il Sole impiega a descrivere col suo moto proprio l'arco 98°.55'.30'' dell'ecclittica. Ora, si sa che il moto proprio del Sole non è uniforme, ed il suo moto diurno è diverso nei diversi punti dell'ecclittica; il *moto diurno medio* di tutto l'anno è però 59'.8'',33, e adottandolo in questo calcolo, si conoscerà in quanti giorni il Sole percorre i suddetti 98°.55'.30'' dell'ecclittica con dividere un tale arco per 59'.8'',33. Il quoziente 100 giorni ed ore 8,8 indicherà il tempo che il Sole rimane senza interruzione sull'orizzonte di un luogo che ha 75° di latitudine nella stagione d'estate. Ma questo risultamento non è molto esatto, perchè il moto medio diurno del Sole, adottato in mancanza di altri dati per ridurre in tempo l'arco 98°.55'.30'' dell'ecclittica, è sicuramente troppo grande. L'attuale problema si risolve con maggiore esattezza per mezzo delle *Effemeridi astronomiche,* come quelle di MILANO, o di BERLINO, la *Conoscenza de' tempi* di PARIGI, o l'*Almanacco nautico* di LONDRA, dove giorno per giorno sono notate le declinazioni del Sole. Per la proposta latitudine di 75° si cercherebbe in una di quelle tavole il giorno e l'ora in cui il Sole ha 15° di declinazione, prima di giungere al solstizio, ed indi il giorno e l'ora nel quale ritorna ad avere la stessa declinazione dopo il solstizio, e l'intervallo di tempo trascorso fra le due date indicherebbe il massimo giorno dell'anno alla latitudine di 75°.

* §. 71. Tutto ciò premesso, riuscirà facilissima la soluzione del problema inverso di sopra enunciato cioè; *calcolare la latitudine geografica di un luogo nel quale il massimo giorno dell'anno ha una durata conosciuta.*

Se il dato giorno è minore di 24 ore, nel triangolo sferico ZPI, considerato di sopra [*fig.* 9], si conosceranno $ZI = 90°$, $PS = 66°.32'$, e l'angolo orario ZPI, che si otterrà prendendo la

metà del tempo dinotante la durata del giorno, e riducendola in arco con la moltiplicazione per 15. Laonde, indicando con g il dato giorno, l'angolo orario ZPI sarà $\frac{15}{2}g$; e dall'eguaglianza, $\cos P = -\tan L \tan 23^\circ.28'$, si dedurrà nel nostro caso,

$$\tan L = -\cos P \cot 23^\circ.28', \text{ ovvero}$$

$$\tan L = -\cos \frac{15}{2} g \cot 23^\circ.28'.$$

Volendo tener conto della refrazione, la formola,

$$\cos P = \frac{\cos ZS - \cos ZP \cos SP}{\operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} SP},$$

si muterà nel caso attuale in

$$\cos \frac{15}{2} g = \frac{\cos 90^\circ.33'.46'' - \operatorname{sen} L \operatorname{sen} 23^\circ.28'}{\cos L \cos 23^\circ.28'},$$

la quale darà,

$$\cos \frac{15}{2} g \cos L \cos 23^\circ.28' + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} 23^\circ.28' = -\operatorname{sen} 33'.46''.$$

Si ponga, $\cos \frac{15}{2} g \cos 23^\circ.28' = \operatorname{sen} 23^\circ.28' \tan \varphi$, e si avrà,

$$\operatorname{sen} 23^\circ.28' \tan \varphi \cos L + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} 23^\circ.28' = -\operatorname{sen} 33'.46''.$$

$$\frac{\operatorname{sen}(L+\varphi)}{\cos \varphi} \operatorname{sen} 23^\circ.28' = -\operatorname{sen} 33'.46''$$

$$\operatorname{sen}(L+\varphi) = -\operatorname{sen} 33'.46'' \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} 23^\circ.28'}.$$

Il problema sarà dunque risoluto dalle formole,

$$\tan \varphi = \cos \frac{15}{2} g \cot 23^\circ.28'$$

$$\operatorname{sen}(L+\varphi) = -\operatorname{sen} 33'.46'' \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} 23^\circ.28'};$$

dove è da osservare che φ indica il supplemento della cercata latitudine, quando si calcola senza tener conto della refrazione; e che $L+\varphi$ è sempre maggiore di 90°.

Se il dato giorno è maggiore di 24 ore, sarà anche facile invertire la soluzione esposta di sopra del problema diretto, e calcolare la latitudine geografica richiesta. Supponiamo che la durata conosciuta del massimo giorno dell'anno sia $100^g.8^h,8$; si prenderà la metà di questo tempo, $50^g.4^h,4$, e si ridurrà in arco dell'ecclittica, moltiplicandola per $59'.8'',33$, moto medio diurno del Sole; si avrà $49^\circ.27'.45''$. Quest'arco, corrispondente ad Ma sulla figura 15, tolto da 90° darà, $\gamma a = 40^\circ.32'.15''$; e nel triangolo rettangolo γab in cui l'angolo $\gamma ab = 23^\circ.28'$ si avrà,

$$\operatorname{sen} ab = \operatorname{sen} \gamma a \operatorname{sen} 23^\circ.28' = \operatorname{sen} 40^\circ.32'.15'' \operatorname{sen} 23^\circ.28',$$

da cui si ottiene, $ab = 15^{\circ}.0'$; e quindi la latitudine geografica cercata sarà 75°.

L'uso delle *effemeridi* è anche preferibile in quest'ultima quistione.

Per formare la *Tavola de' climi* di giorno e di mese, ossia per determinare le latitudini geografiche dei paralleli che li racchiudono, non si dovrà far altro se non supporre il massimo giorno dell'anno eguale successivamente a $12^{h}.30'$, $13^{h}.0'$, $13^{h}.30'$ etc, ed indi ad 1 mese, 2 mesi, 3 mesi etc; e calcolare con questi dati le latitudini geografiche corrispondenti, applicando il procedimento indicato qui sopra.

§. 72. In quanto alle condizioni fisiche che modificano la temperatura del clima geografico, la prima è l'altezza del suolo sul livello del mare. La temperatura diminuisce rapidamente con l'accrescersi della elevazione, dimodochè partendo dal livello del mare all'equatore, e salendo una montagna alta quanto uno de' vertici dell'*Himalaya*, si sperimenterebbero, senza cambiar latitudine, l'ardore della zona torrida, la dolcezza della zona temperata ed il rigore della zona glaciale. Alcuni fisici, fra i quali il celebre *Humbolt,* hanno paragonato la temperatura e la vegetazione de' climi geografici, a quelle che s' incontrano successivamente nel salire un' alta montagna, ed hanno chiamato *climi ascensionali* le regioni nelle quali, cominciando dal livello del mare, si può dividere una montagna in relazione dei climi geografici.

La natura del suolo contribuisce ancora a modificare la temperatura del clima geografico. Ne' luoghi arenosi e deserti dell'Affrica si soffre un caldo più eccessivo che nei paesi dell' Egitto posti alla medesima latitudine, perchè bagnati dalle acque del Nilo; ed il Canadà è più freddo della Francia, sebbene ad eguale latitudine, per essere il paese più coperto di boschi, meno coltivato, e più abbondante di acque.

CAPO QUINTO

Del Sistema del mondo.

Del Sistema del mondo in generale.

§. 73. Abbiamo fatto osservare le apparenze ed i fenomeni che presentano gli astri dipendentemente dal moto diurno comune a tutti, e dal moto proprio di alcuni di essi. La spiegazione di queste apparenze e di questi fenomeni è stata sempre nobilissimo oggetto delle meditazioni de' filosofi. Ma la difficoltà dell' argomento fece spesso aberrare dal sentiero che conduceva allo scoprimento del vero, ed alcune opinioni erronee prevalsero per molti secoli, e

ritardarono lungamente il perfezionamento di un *sistema* che fu tra i primi ad essere immaginato, e che ora può dirsi con fiducia essersi elevato al grado di teorica.

Si chiama *sistema del mondo*, una ipotesi intorno al luogo ed agli effettivi movimenti degli astri nello spazio, la quale valga a spiegare con facilità ed esattezza tutte le apparenze ed i fenomeni celesti già conosciuti, ed a predire quelli che dalle ideate posizioni e movimenti hanno origine, senza che il fatto li smentisca.

§. 74. Il sistema del mondo riguarda solamente il Sole ed i pianeti, perchè le stelle fisse sono astri così lontani da noi che tutti gli astronomi hanno sempre convenuto essere estranee al nostro sistema; per la qual cosa il sistema del mondo si potrebbe con maggior proprietà chiamare sistema planetario. Il punto principale da stabilirsi in questa ricerca, è se il Sole o pure la Terra debba considerarsi come centro immobile intorno a cui girano i pianeti. La scuola di *Pitagora*, 400 anni prima di GESÙ CRISTO, sosteneva il moto della Terra; quel grande geometra diceva *che la Terra girava intorno al centro del mondo in cui era il fuoco, ossia il Sole, che ogni stella era un mondo, e che questi mondi erano dispersi in uno spazio etereo infinito*, dottrine tutte de' nostri giorni. *Filolao*, fra i pitagorici, stabilì con maggior precisione il movimento della Terra intorno al Sole, e *Niceta* sostenne anche il moto diurno della Terra, o di rotazione intorno all' asse. Ma la scienza essendo ancora nascente, queste sane opinioni non furono appoggiate dalle osservazioni e dal calcolo, onde fu facile deviarne, e prevalse poi generalmente fra gli antichi egiziani e greci l' opinione contraria, che stabiliva la Terra immobile nel centro, intorno alla quale si facevano girare il Sole ed i pianeti. L' adesione d' *Ipparco*, il più grande astronomo dell' antichità, a questa ipotesi, ed il celebre trattato di astronomia di *Tolomeo* intitolato l' *Almagesto* che la sanzionò, fecero al tutto dimenticare le prime dottrine della scuola italiana, onde il sistema detto tolemaico ebbe vigore anche dopo il risorgimento delle scienze in Europa.

Nicola Copernico, nato a Thorn nella Prussia l'anno 1472, trovando gravi difficoltà nella spiegazione delle stazioni e retrogradazioni de' pianeti col sistema di Tolomeo, lo abbandonò, e sulla guida delle opinioni pitagoriche immaginò un compinto sistema planetario, che espose nella sua opera *de revolutionibus orbium*. Il sistema di Copernico incontrò, come è noto, molti oppositori, fra i quali il più formidabile fu il celebre *Tico Brahe* astronomo danese, che non dissimulando le difficoltà incontrate da Copernico nella spiegazione de' fenomeni celesti col sistema di Tolomeo, nè volendo ammettere l' ipotesi copernicana, fece un miscuglio de' due sistemi proponendo come nuova una terza ipotesi che ha ritenuto il suo nome. Malgrado questi ostacoli, il sistema di Copernico, sostenuto con proprio danno dal gran *Ga-*

lileo, fece dimenticare tutte le contrarie opinioni antiche e moderne, e divenne il cardine principale della scienza. Era poi riservato all'immortale *Newton* di dare l'ultima conferma all'ipotesi copernicana, e farne quasi dircmmo la dimostrazione, col principio della gravitazione universale. Passiamo ad esporre brevemente i tre menzionati sistemi.

Sistemi di Tolomeo e di Tico.

§. 75. Tolomeo situa nel centro del sistema la Terra immobile intorno alla quale girano i pianeti come segue, per ordine di distanze; la Luna, Mercurio, Venere, il Sole, Marte, Giove e Saturno. A ciascun pianeta assegna una sfera solida su cui poter eseguire il suo movimento, e non dovendo le sfere inferiori impedire la vista dei pianeti più lontani dalla Terra, era necessario ancora che tutte quelle sfere, o piuttosto involucri sferici, fossero trasparenti. A grande distanza dalle sfere planetarie concentriche fu posto il *firmamento* o Cielo stellato; che aveva pure per centro la Terra, ed a maggior distanza fu situato l'ultimo involucro sferico detto *primo mobile*, al quale fu affidato l'ufficio del moto diurno, supponendosi che compisse in 24 ore sideree il suo giro da levante a ponente, ed imprimesse lo stesso movimento alle sfere inferiori.

§. 76. Il primo difetto di questo sistema è di non essere atto a spiegare con semplicità ed esattezza i fenomeni celesti; perocchè tutte le orbite essendo concentriche ed avendo per centro la Terra, non v'ha alcuna distinzione fra i pianeti Mercurio e Venere e gli altri, per cui non si può spiegare perchè quei due pianeti non si allontanano dal Sole più di 29 o di 47 gradi, laddove l'elongazione degli altri è illimitata; nè può immaginarsi ancora perchè Venere e Mercurio non siano mai in opposizione col Sole come gli altri pianeti. Le stazioni e retrogradazioni, che vedremo essere una semplice apparenza, dovrebbero in questo sistema considerarsi come una realità, poichè l'occhio situato nel centro di un cerchio non può ingannarsi sul movimento di un punto che ne percorre la circonferenza; e strano sarebbe che i pianeti andassero effettivamente avanti e indietro come per diporto. Nulladimeno, gli antichi procurarono di superare queste difficoltà, immaginando una quantità di cerchi secondarii chiamati *epicicli*, *eccentrici*, e *deferenti* che complicavano immensamente la macchina semplicissima ed ammirabile del sistema solare, di modo che la loro esistenza poteva dirsi più assurda dell'ipotesi a sostegno della quale erano stati immaginati.

§. 77. Ma il moto diurno nel sistema di Tolomeo presenta anche più gravi obbiezioni. Non si comprende come il moto del primo mobile poteva comunicarsi alle sfere inferiori concentriche, e per concepirlo bisognerebbe supporre che le sfere fossero connesse fra loro per mezzo di assi o cunei materiali. Le sfere solide

sono però un' assurdità manifesta, specialmente dopo che si sono vedute le comete avvicinarsi alla Terra sino a trovarsi a brevissima distanza da essa e poi allontanarsene, e disperdersi negli spazi immensi de' cieli; ai quali movimenti opporrebbe un ostacolo insormontabile la solidità delle sfere. Escludendo poi questa opinione, se il moto diurno degli astri fosse reale e non apparente, posta la loro grande distanza dalla Terra, essi dovrebbero in sole 24 ore descrivere cerchi di raggi sterminati, ed avere perciò una velocità inconcepibile; le stelle fisse specialmente, la cui distanza dalla Terra, anche secondo gli antichi, deve considerarsi quasi infinita, descriverebbero in 24 ore circonferenze di raggi quasi infiniti. Altronde è noto dalla meccanica che un corpo, girando intorno ad un asse, acquista una forza detta *centrifuga* che tende ad allontanarlo dall' asse di rotazione; e siccome questa forza, quando il moto è circolare ed uniforme, è proporzionale al raggio del cerchio descritto dal mobile, essa risulterebbe grandissima pei corpi celesti, ed eserciterebbe su i medesimi un immenso sforzo per farli uscire dai loro paralleli. Sarebbe quindi necessaria una forza eguale e contraria per ritenerveli, la quale dovrebbe esser diversa per ciascun astro; o si dovrebbe supporre distrutta la forza centrifuga dalla solidità delle sfere. Che se per bilanciare la forza centrifuga si volesse supporre nella Terra una virtù attraente, questa dovrebbe crescere in ragion diretta delle distanze, il che è assurdo.

Tutto ciò dà luogo ad una complicazione di cose affatto improbabile, e diremo anche impossibile, in confronto della semplicità con la quale si spiega il moto diurno, considerandolo come un' apparenza prodotta dalla rotazione della Terra intorno al suo asse.

§. 78. Tico Brahe cercò di evitare gl' inconvenienti dell' ipotesi tolemaica relativi al moto proprio de' pianeti. Egli suppose la Terra nel centro, intorno alla quale giravano la Luna ed il Sole, ma immaginò che i pianeti si movessero intorno al Sole, con la distinzione che la Terra fosse situata fuori delle orbite di Mercurio e di Venere, e dentro quelle di Marte, di Giove e di Saturno. In tal modo non era difficile spiegare le elongazioni limitate dei primi due pianeti, e la loro doppia congiunzione; e le stazioni e retrogradazioni erano anche con sufficiente semplicità rappresentate; se non che, applicando il calcolo a tutti questi fenomeni, i risultamenti non riescono così esatti come nella ipotesi copernicana.

Per ciò che riguarda il moto diurno degli astri, volendo nel sistema di Tico negare alla Terra ogni movimento, bisogna adottare l'opinione di Tolomeo con tutti gl' inconvenienti che ne conseguono.

Sistema di Copernico.

§. 79. Copernico, e dopo di lui tutti gli astronomi, situano, come Pitagora, il Sole nel centro del sistema, ed intorno ad esso fanno girare i pianeti nell' ordine seguente; *Mercurio*, *Venere*, la

Terra, *Marte*, *Vesta*, *Giunone*, *Cerere*, *Pallade*, *Giove*, *Saturno*, ed *Urano*: la Luna non è un pianeta ma un satellite della Terra. Le orbite de'pianeti sono ellittiche, e diversamente inclinate all'orbita terrestre; il Sole si trova in un fuoco comune a tutte, ed esse incontrano il piano dell'orbita terrestre, ossia l'ecclittica, in tante linee rette variamente situate in quel piano, dimodochè tutte le orbite non hanno di comune fra loro e con l'ecclittica che il solo punto in cui è posto il Sole. I punti estremi dell'asse maggiore dell'orbita di un pianeta diconsi *apsidi*, e si chiama *afelio* il punto più lontano dal Sole, *perielio* il punto più vicino al Sole; vale lo stesso per l'orbita terrestre, ma quando si considera l'apparente moto proprio del Sole intorno alla Terra, quei due punti prendono il nome di *apogeo e perigeo*. I punti estremi della comune sezione dell'orbita di un pianeta con l'ecclittica diconsi *nodi*, onde quella comune sezione si chiama *linea de' nodi*, e *nodo ascendente* è quello in cui si trova il pianeta quando dalla parte del cielo situata al sud dell'ecclittica passa alla parte del cielo situata al nord, *nodo discendente* l'altro.

Ciascun pianeta ha due movimenti, uno di rotazione intorno al proprio asse, e l'altro di traslazione intorno al Sole, ambedue nella direzione di occidente verso oriente; questi movimenti sono stati verificati con l'osservazione per tutti i pianeti, e rispetto alla Terra, non potendo cadere sotto i sensi, basterebbe la sola analogia per ammetterli. In ciò, come si è detto da principio, consiste tutta la difficoltà di un sistema planetario, e Copernico assegnò alla Terra il moto intorno all'asse in 24 ore sideree, che supplisce al moto diurno o del primo mobile di Tolomeo, ed il moto annuo intorno al Sole, che si compie in $365^{gior}\frac{1}{4}$ circa, o sia in un anno. L'asse intorno a cui gira la Terra è inclinato al piano dell'orbita sotto un angolo di $66°.32'$, ed essendo l'equatore terrestre perpendicolare all'asse di rotazione, ne risulta che l'angolo fra il piano dell'orbita e quello dell'equatore è di $23°.28'$, e corrisponde all'obliquità dell'ecclittica. L'asse terrestre non cambia la sua inclinazione al piano dell'ecclittica col muoversi della Terra nell'orbita, ma si mantiene sempre parallelo a se stesso, e da questo parallelismo dipende, come vedremo, la spiegazione delle stagioni.

§. 80. Nel sistema di Copernico i pianeti si distinguono in *inferiori e superiori*, e diconsi inferiori quelli le cui distanze dal Sole sono minori della distanza di questo astro dalla Terra, e superiori gli altri le cui distanze sono maggiori; Mercurio, e Venere sono inferiori, e Marte, Vesta, Giunone, Cerere, Pallade, Giove, Saturno, Urano sono superiori. Le distanze de' pianeti dal Sole crescono con un certo ordine, di modo che ai tempi di *Keplero*, non conoscendosi i pianeti Vesta, Giunone, Cerere e Pallade, quel grande astronomo avvertì la mancanza di un termine nella serie di tali distanze, e ne conchiuse che doveva esistere

un pianeta fra Marte e Giove. In appresso, meditando gli astronomi sulla osservazione di Keplero, resero più evidente la mancanza del termine della serie con sottoporre le distanze de' pianeti dal Sole ad una legge, detta di *Bode*, che può rappresentarle con approssimazione, come segue;

Pianeti	Distanze
Mercurio	$4 = 4$
Venere	$4+3.2^0 = 7$
Terra	$4+3.2^1 = 10$
Marte	$4+3.2^2 = 16$
⋆	$4+3.2^3 = 28$
Giove	$4+3.2^4 = 52$
Saturno	$4+3.2^5 = 100$
Urano	$4+3.2^6 = 196$

Mancava dunque un pianeta alla distanza 28, supposta 10 quella della Terra dal Sole, e gli astronomi verso la fine del secolo passato si studiavano di cercarlo, allorchè nel primo giorno del secolo attuale venne fatto al celebre *P. Piazzi* di scoprire *Cerere*. La distanza di questo nuovo pianeta dal Sole, calcolata sulle osservazioni del Piazzi, risultò appunto eguale a 28, ed era così riempito il vuoto di Keplero. Ma in seguito l'astronomo *Olbers* scoprì un nuovo pianeta la cui orbita aveva quasi la stessa grandezza di quella di Cerere, e lo chiamò Pallade; e poi un terzo ne fu trovato da *Harding*, e fu detto Giunone, ed un quarto dallo stesso Olbers e fu chiamato Vesta. Tutti questi pianeti sono piccolissimi, invisibili ad occhio nudo, e posti quasi alla medesima distanza dal Sole; per modo che si suppose da Olbers che fossero frantumi di un antico pianeta molto più grande, il quale, per cagione non facile ad assegnarsi, si fosse rotto in pezzi. Il più piccolo di essi è Pallade, ma è quello che splende di luce più viva; il suo diametro si valuta di 200 miglia circa, onde la sua superficie, supposta sferica, è minore di quella della Spagna.

Mentre scriviamo è annunziata dai giornali la scoperta fatta dal sig. *Hencke* di Germania (diverso dal ch. astronomo *Encke* di Berlino) di un nuovo pianeta della medesima famiglia. La sua distanza dal Sole e la sua orbita lo assomigliano molto a Giunone, ed è stato chiamato *Astrea* dagl'illustri astronomi tedeschi.

Il pianeta Urano, quantunque quasi invisibile ad occhio nudo per la sua grande distanza dalla Terra, è uno de' maggiori pianeti del sistema solare, e propriamente il terzo per grandezza, essendo Giove il primo, e Saturno il secondo. Il diametro apparente di quest'ultimo pianeta è accresciuto notabilmente dall'anello che lo circonda, che può considerarsi come un gran satellite, ed è uno de' più meravigliosi fenomeni del cielo.

§. 81. Nel sistema di Copernico le comete sono corpi celesti che differiscono dai pianeti principalmente per la grande eccentricità delle orbite ellittiche che descrivono intorno al Sole, e per la loro pochissima densità, potendo esse considerarsi come grandi ammassi di vapori intorno ad un nucleo solido piccolissimo. Questa opinione è sostenuta; 1.° dalla variabilità della loro apparenza; 2.° dall'essersi vedute le stelle a traverso della loro coda, ed anche del loro corpo principale; 3.° dall'essere il loro cammino *perturbato* grandemente dall'attrazione dei pianeti, laddove il moto di questi non soffre per la loro vicinanza alcuna sensibile alterazione; il che prova la tenuità della massa delle comete in confronto di quella de' pianeti, secondo il principio della gravitazione universale, che stabilisce le attrazioni proporzionali alle masse. Le comete differiscono anche spesso dai pianeti per la direzione del loro moto proprio, il quale non di rado si esegue da oriente verso occidente.

È grande il numero delle comete apparse in diversi tempi, e registrate negli annali dell'Astronomia; ma di tre sole il periodo è stato calcolato, e verificato dai successivi loro ritorni, cioè della cometa di *Halley*, di quella di *Encke*, e dell' altra di *Biela*; la prima compie il suo giro in 76 anni, la seconda in 1207 giorni, e la terza in 6 anni e $\frac{2}{3}$. Queste due ultime formano in certo modo una classe di comete a parte, dette *di breve periodo;* fra le quali vuol essere annoverata anche un'altra cometa recentemente scoperta dal sig. *Faye,* ed una quarta dal ch. *P. de Vico,* che si è trovata essere la stessa di quella osservata innanzi dal celebre *Tico Brahe.*

§. 82. Oltre ai pianeti, ai loro satelliti ed alle comete, gli astronomi moderni considerano nel sistema solare un'altra classe di corpi piccolissimi, che in numero prodigiosamente grande si aggirano intorno al Sole. Le *stelle cadenti o filanti,* tenute sino a pochi anni indietro per fenomeni atmosferici, si crede ora più generalmente che siano miriadi di effettivi corpicciuoli che girano intorno al Sole, ed entrando nell' atmosfera terrestre con una grandissima velocità s' infiammano, e presentano nel loro passaggio quella striscia luminosa che osserviamo. Questa opinione è fondata sulla direzione del moto delle stelle filanti, spesso comune a tutte, e sulla periodicità di tali apparizioni, le quali si verificano in gran numero specialmente intorno al 10 di Agosto ed al 13 di Novembre. Per verità questo secondo periodo ha sofferto molte eccezioni, ma il primo si è sempre sostenuto. Non mancano però di quelli che negano alle stelle filanti una origine siderea, specialmente dopo che si è creduto osservare una coincidenza fra la loro apparizione e quella delle aurore polari.

§. 83. La distanza delle stelle fisse dalla Terra deve supporsi prodigiosamente grande secondo il sistema di Copernico; perocchè osservata una stella da uno stesso luogo della Terra in tutto il corso dell' anno, la sua altezza meridiana non si è veduta sensi-

bilmente variare, il che dimostra che le visuali dirette alla stella da tutti i punti dell' orbita terrestre, ed anche da due punti opposti, possono considerarsi quasi parallele. Per conseguenza, se un osservatore potesse trasportarsi in una stella, anche la più vicina, vedrebbe l' orbita terrestre sotto un angolo di qualche secondo o di qualche frazione di secondo. Or l'angolo sotto il quale sarebbe da una stella veduto il raggio dell' orbita terrestre dicesi *parallasse annua* della stella, ed essa è così piccola, che si è fra gli astronomi disputato intorno alla sua esistenza. Supponendola di $1''$, la stella dovrebbe esser distante dalla Terra circa 200000 volte più del Sole. In fatti, indicando l' orbita terrestre col cerchio M della *fig.* 8, e con C,H,S i luoghi del Sole, della Terra e di nna stella situata nel piano dell'orbita, il triangolo SHC, supposto rettangolo in H, darà,

$$SH = \frac{CH}{\tan CSH}, \text{ ovvero } SH = \frac{CH}{\tan 1''} = 206265\, CH.$$

Sono pochi anni che il ch. astronomo **Bessel** annunziò di aver misurata con un nuovo metodo la parallasse della piccola stella doppia detta la 61^{esima} del *Cigno*, ed averla trovata $0'',348$. Secondo questa misura, la stella risulta distante dalla Terra 600000 volte più del Sole, e la stessa luce, con la sua velocità di 166000 miglia in un secondo, dovrebbe impiegare 10 anni per giungere da quell' astro sino a noi.

§. 84. Il sistema di Copernico fu attaccato in mille modi dai suoi contemporanei, ed anche da astronomi di gran valore che vissero molto tempo dopo di lui, ma la sola obbiezione che meriti esser ricordata è la seguente.

Si dice che un grave abbandonato a se stesso dall'alto di una torre non dovrebbe cadere al piede di essa; poichè la torre essendo trasportata da occidente in oriente nel tempo che impiega il grave a discendere, quest'ultimo alla fine del suo moto non troverebbe più il piede della torre in quella stessa posizione che aveva prima della sua caduta, e toccherebbe il suolo in un punto più occidentale del piede medesimo: per la stessa ragione la palla lanciata da un cannone in posizione verticale non dovrebbe ritornare nella bocca del cannone come dimostra l'esperienza. Ma si risponde, che il grave prima di cadere dall'alto della torre, e la palla prima di uscire dalla bocca del cannone, sono insieme con la torre e col cannone animati dalla medesima velocità dipendente dal moto della Terra, onde possono supporsi spinti da due forze, una di gravità e l' altra parallela a quella con la quale si muovono la torre ed il cannone, e descrivendo la diagonale curva che risulta dalle forze medesime, devono raggiungere alla fine del moto il piede della torre ed il caunone. Il fatto conferma la verità di questa maniera di spiegare il fenomeno, poichè un grave lasciato cadere

dall' alto dell' albero di un bastimento che cammina a gonfie vele tocca il suolo al piede dell' albero stesso, come se la nave fosse in riposo, ed un' esperienza simile a quella del cannone si fa con una macchinetta inventata da *Steitz*, che si trova in tutti i gabinetti di Fisica.

Leggi di Keplero, ed elementi delle orbite planetarie.

§. 85. *Keplero* fu il primo a determinare mediante l' osservazione la vera forma delle orbite planetarie. Intorno a ciò si era ingannato Copernico, il quale, senza la guida dell' esperienza, aveva assegnato ai pianeti un cammino circolare solo perchè, seguendo l' opinione degli antichi, considerava il cerchio come la più perfetta fra le curve. Ma il genio di Keplero non si fermò a quel primo risultamento, ed egli studiando attentamente i movimenti de' pianeti, per loro stessi e nel loro confronto, giunse a stabilire altre due leggi, che insieme alla prima, delle orbite ellittiche, hanno ritenuto il suo nome; eccone l' enunciazione.

I. *I pianeti si muovono intorno al Sole in orbite ellittiche, per modo che il centro del Sole è un fuoco comune a tutte.*

II. *In una stessa orbita ellittica, le aje descritte dal raggio vettore, che va dal centro del Sole al pianeta, e si muove insieme con questo, sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.*

III. *I quadrati de' tempi delle rivoluzioni siderali dei pianeti intorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite.*

Poste queste leggi, si può determinare con i principii della meccanica la natura della forza acceleratrice che ritiene i pianeti nelle loro orbite, ed il suo modo di agire. (*) A ciò pervenne il sommo *Newton*, e fu condotto poi a stabilire per principio regolatore del moto dei corpi celesti quello della *gravitazione universale* cioè, che tali corpi *gravitano uno sull' altro, ovvero si attraggono reciprocamente, in ragione inversa de' quadrati delle loro distanze, ed in ragion diretta delle loro masse.* Viceversa, ammesso questo principio, le leggi di Keplero ne sono una immediata conseguenza; se non che le attrazioni reciproche de' pianeti fanno che essi nel percorrere le loro orbite non osservino esattamente quelle leggi nè descrivano perfette ellissi. Questa medesima aberrazione è una luminosa conferma del principio della gravitazione universale, con la guida del quale, tenendo conto di tutte le azioni scambievoli de' corpi celesti, si può determinare con grande esattezza il loro cammino nello spazio, per modo che i risultamenti del calcolo

(*) Veggasi l'Astronomia del chiaris. prof. *Santini* di Padova 2.° Tom. pag. 49.

si accordano meravigliosamente con le osservazioni. L'astronomia moderna è giunta a regolare anche il cammino delle comete tanto variabile, e si sono vedute, specialmente le comete di *Halley* e di *Encke*, obbedire, per dir così, alla penna dei loro calcolatori, e presentarsi, nelle loro riapparizioni, appunto dove e quando era stato da essi preveduto. Le *pertubazioni* prodotte dalle attrazioni reciproche sono per altro molto piccole, onde la cognizione di un pianeta ha sempre per fondamento la sua posizione ed il suo movimento nell'orbita ellittica, che dipendono da sette quantità dette *elementi del moto ellittico*. I primi cinque determinano la posizione dell' orbita rispetto all' ecclittica, e la sua grandezza, e sono; 1.° la longitudine del *nodo ascendente*, che stabilisce la posizione della comune sezione dell' orbita del pianeta col piano dell' ecclittica, 2.° *l' inclinazione* dell' orbita a questo piano, 3.° *la longitudine del perielio*, che determina la posizione dell' asse maggiore dell' orbita, 4.° *l' asse maggiore* dell' orbita; 5.° *l' eccentricità* di essa. Gli altri due elementi relativi al moto del pianeta sono, 6.° *la longitudine media del pianeta* in un dato tempo, detta anche *l' epoca*, e 7.° *la rivoluzione siderea* del pianeta, o sia il tempo che esso impiega a compiere il suo giro intorno al Sole.

La teoria dell' attrazione universale, e l'osservazione dimostrano che di questi sette elementi sono invariabili soltanto gli *assi maggiori* delle orbite, e le *rivoluzioni sideree*, la cui durata sia un medio di quelle osservate in un lungo periodo di tempo. Tutti gli altri elementi sono soggetti a lente variazioni, e noi ne abbiamo già avuto un esempio nella diminuzione dell' obliquità dell' ecclittica. È dimostrato però che le variazioni delle inclinazioni e delle eccentricità sono ristrette fra dati limiti, dimodochè le inclinazioni non possono crescere o diminuire se non di pochi gradi, e le eccentricità non possono aumentarsi indefinitamente; e questi due importanti teoremi ai quali è pervenuta l' analisi moderna assicurano l'esistenza della razza umana sulla superficie della Terra, sino a che non piaccia di disporre altrimenti all' ETERNO regolatore dell' Universo, con un nuovo atto della sua volontà.

Le attrazioni scambievoli, non solo modificano la posizione e la forma delle orbite, ma le trasformano in curve a doppia curvatura, facendo oscillare leggermente ciascun pianeta sopra e sotto il piano medio della sua orbita ellittica. Ciò accade anche della Terra, e poichè il suo moto nell' orbita è attribuito al Sole, secondo l' apparenza, ne segue che il teorema enunciato a pag. 31 non è rigorosamente esatto, cioè il Sole non descrive nel Cielo una curva perfettamente piana col suo moto proprio, e può avere una latitudine di qualche secondo.

Trascriviamo nel seguente quadro gli elementi ellittici del sistema solare quali si veggono notati alla fine del trattato di Astronomia del ch. sig. *Herschel*.

QUADRO DEGLI ELEMENTI DEL SISTEMA SOLARE.

Nomi de' pianeti	*Longit. del nodo ascendente*	*Inclinazione all' ecclittica*	*Longitudine del perielio*
Mercurio	45°.57'.30'',9	7°. 0'. 9'',1	74°.21'.46'',9
Venere	74°.54'.12'',9	3°.23'.28'',5	128°.43'.53'',1
La Terra			99°.30'. 5'',0
Marte	48°. 0'. 3'',5	1°.51'. 6'',2	332°.23'.56'',6
Vesta	103°.13'.18'',2	7°. 8'. 9'',0	249°.33'.24'',4
Giunone	171°. 7'.40'',4	13°. 4'. 9'',7	53°.33'.46'',0
Cerere	80°.41'.24'',0	10°.37'.26'',2	147°. 7'.31'',5
Pallade	172°.39'.26'',8	34°.34'.55'',0	121°. 7'. 4'',3
Giove	98°.26'.18'',9	1°.18'.51'',3	11°. 8'.34'',6
Saturno	111°.56'.37'',4	2°.29'.35'',7	89°. 9'.29'',8
Urano	72°.59'.35'',3	0°.46'.28'',4	167°.31'.16'',1

Nomi de' pianeti	*Semiasse maggiore*	*Eccentricità in parti del semiasse maggiore*	*Longitudine media, o epoca*
Mercurio	0,3870981	0,2055149	166°. 0'.48'',6
Venere	0,7233316	0,0068607	11°.33'. 3'',0
La Terra	1,0000000	0,0167836	100°.39'.10'',2
Marte	1,5236923	0,0933070	64°.22'.55'',5
Vesta	2,3678700	0,0891300	278°.30'. 0'',4
Giunone	2,6690090	0,2578480	200°.16'.19'',1
Cerere	2,7672450	0,0784390	123°.16'.11'',9
Pallade	2,7728860	0,2416480	108°.24'.57'',9
Giove	5,2027760	0,0481621	112°.15'.23'',0
Saturno	9,5387861	0,0561505	135°.20'. 6'',5
Urano	19,1823900	0,0466794	177°.48'.23'',0

Nomi dei pianeti	*Rivoluz. siderea in giorni solari medii*	*Semi-diametro*	*Volume*	*Massa*	*Densità*
Mercurio	87,9692580	0,398	0,063	0,1753	2,782
Venere	224,7007869	0,975	0,927	0,8745	0,943
La Terra	365,2563612	1,000	1,000	1,0000	1,000
Marte	686,9796458	0,517	0,139	0,1394	0,129
Vesta	1325,7431				
Giunone	1592,6608				
Cerere	1681,3931				
Pallade	1686,5388				
Giove	4332,5848212	10,860	1280,9	331,5609	0,259
Saturno	10759,2198174	9,987	995,0	101,0638	0,102
Urano	30686,8208296	4,332	70,8	19,8089	0,280

N.B. I dati per *Vesta*, *Giunone*, *Cerere*, e *Pallade* si riferiscono a mezzodì del 1.° Gen. 1820; e per gli altri pianeti a mezzodì del 1.° Gen. 1801.

Prova della rotazione diurna della Terra dedotta dalla variazione delle lunghezze dei pendoli a diverse latitudini.

§. 86. L'ipotesi di Copernico ha ricevuto e riceve continue ripruove dallo studio de' fenomeni naturali fatto senza prevenzioni, e prendendo per guida l'osservazione ed il calcolo. Noi esporremo qui brevemente alcuni principali argomenti che assicurano il moto diurno ed il moto annuo della Terra.

L'esperienza dimostra che la gravità terrestre varia a diverse latitudini. *Richer* fu il primo ad osservare che un pendolo il quale batteva i secondi a Parigi, trasportato sotto l'equatore ritardava notabilmente, e fu d'uopo accorciarlo per ridurlo ad indicare nuovamente i secondi. Or poichè dalla meccanica si ha il tempo di un'oscillazione espresso da $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, e nel caso del pendolo a secondi, $1''=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, diminuendo l, come osservò *Richer*, doveva diminuire anche g affinchè la frazione $\frac{l}{g}$ rimanesse costante. Dunque la gravità terrestre varia insieme con la lunghezza del pendolo. Ciò posto, in due luoghi diversi verificandosi le due equazioni,

$1''=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, ed $1''=\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$, sarà $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$, ed $\frac{l}{g}=\frac{l'}{g'}$,

onde $l:l'::g:g'$, cioè la gravità varia ne' diversi luoghi della Terra proporzionalmente alla lunghezza del pendolo.

Questa variazione della gravità provata dall'esperienza è una conseguenza necessaria della rotazione della Terra intorno al suo asse. In fatti, si sa dalla meccanica che girando un corpo qualunque intorno ad un asse immobile, le sue parti acquistano una tendenza ad allontanarsi dall'asse nella direzione perpendicolare ad esso. Questa tendenza o sforzo, detto forza centrifuga, si dimostra eguale al quadrato della velocità diviso pel raggio del cerchio descritto dal corpo intorno all'asse. Nella rotazione della Terra. ogni punto della sua superficie percorre con moto uniforme ed in 24 ore sideree la circonferenza di un cerchio parallelo all'equatore. Chiamando R il raggio dell'equatore, quello del parallelo descritto da un punto A posto alla latitudine $L=ACE$ [*fig.* 16] sarà espresso da $R\cos L$, e la circonferenza di questo raggio sarà $2\pi R\cos L$. E poichè una tale circonferenza è descritta dal punto A con moto uniforme, la velocità del punto stesso si otterrà dividendo lo spazio pel tempo, cioè sarà $v=\frac{2\pi R\cos L}{24^{ore}}$

Ma la forza centrifuga φ è uguale al quadrato della velocità di-

viso pel raggio del cerchio descritto dal mobile, dunque si avrà,

$$\varphi=\left(\frac{2\pi R\cos L}{24^{ore}}\right)^2 : R\cos L=\frac{4\pi^2 R\cos L}{(24^{ore})^2}.$$

Per un altro punto A' posto alla latitudine L' si otterrà similmente,

$\varphi'=\frac{4\pi^2 R\cos L'}{(24^{ore})^2}$, e quindi $\varphi:\varphi'::\cos L:\cos L'$, vale a dire che, *le forze centrifughe pei diversi punti della superficie terrestre stanno fra loro come i coseni delle latitudini.*

Ma queste forze centrifughe che agiscono perpendicolarmente all'asse di rotazione non vanno a diminuire direttamente la gravità. Considerando il punto A della superficie terrestre, la gravità in quel punto agisce secondo AC, laddove la forza centrifuga agisce secondo AT. Scompongasi questa forza in due Am, An una nella direzione del raggio terrestre, e l'altra tangenziale: è chiaro che la prima soltanto, la quale agisce da A verso m, diminuirà direttamente la gravità, che agisce da A verso C. Il valore di questa forza centrifuga Am considerata rispetto al centro della Terra, per essere il quadrilatero mn un rettangolo, verrà espresso da, $AT\cos TAm$; e riflettendo che $TAm=MAC=ACE$, non è altro che la latitudine del punto A, sarà $Am=\varphi\cos L$. Quindi indicando con f una tal forza centrifuga relativa al centro, si

avrà $f=\varphi\cos L=\frac{4\pi^2 R\cos^2 L}{(24^{ore})^2}$; e per un altro punto alla latitu-

dine L' sarà $f'=\frac{4\pi^2 R\cos^2 L'}{(24^{ore})^2}$ onde, $f:f'::\cos^2 L:\cos^2 L'$; cioè *le forze centrifughe considerate rispetto al centro della Terra sono proporzionali ai coseni quadrati delle latitudini.*

Indichiamo ora con F, f, f' le forze centrifughe all'equatore, e a due altri punti della superficie terrestre corrispondenti alle latitudini L, L'; si avrà,

$$\left\{\begin{matrix} F:f::1:\cos^2 L \\ F:f'::1:\cos^2 L' \end{matrix}\right\} \text{ e dividendo, } \left\{\begin{matrix} F-f:F::1-\cos^2 L:1 \\ F-f':F::1-\cos^2 L':1 \end{matrix}\right\},$$

onde $F-f:F-f'::1-\cos^2 L:1-\cos^2 L'::\text{sen}^2 L:\text{sen}^2 L'$.

Quindi, *le diminuzioni della forza centrifuga relativamente al centro della Terra, andando dall'equatore verso i poli, ossiano gli aumenti della gravità dall'equatore verso i poli sono proporzionali ai seni quadrati delle latitudini.*

Tutto ciò nell'ipotesi della rotazione della Terra intorno all'asse; ma numerose ed accurate esperienze sul pendolo a secondi provano che la sua lunghezza andando dall'equatore verso i poli cresce appunto come i seni quadrati delle latitudini, dunque lo stesso

dovendo accadere della gravità, che è proporzionale a quella lunghezza, ne segue che l'osservazione si accorda con la teoria, e conferma l'ipotesi copernicana.

Nella dimostrazione precedente si è supposta la Terra sferica, quando si sa essere uno sferoide di cui gli assi sono nel rapporto di 308 : 309; ma l'effetto della forza centrifuga sopra uno sferoide che così poco si allontana dalla sfera è sensibilmente lo stesso di quello calcolato di sopra. Da un'altra parte però l'ellitticità terrestre, ponendo a disuguali distanze dal centro i corpi situati sulla superficie dello sferoide, è cagione di una nuova disuguaglianza nella gravità, e si dimostra che per questa causa ancora la gravità cresce dall'equatore andando verso il polo, proporzionalmente al seno quadrato della latitudine. Quindi si potrebbe dubitare che la legge dell'accrescimento della gravità dall'equatore verso il polo, dedotta dall'esperienza del pendolo semplice, fosse piuttosto una conseguenza della forma della Terra che della sua rotazione intorno all'asse; se non che la stessa esperienza di *Richer* ha provato che il ritardamento del pendolo portato da Parigi all'equatore era quasi triplo di quello che avrebbe dovuto verificarsi per la diminuzione della gravità dipendente soltanto dalla forma sferoidica della Terra (*), per cui le altre due terze parti del ritardamento suddetto non possono attribuirsi se non alla rotazione terrestre.

Lunghezza del pendolo a secondi. Conseguenze intorno alla gravità, ed alla forma della Terra.

*§. 87. Dal rapporto che serbano fra loro gli aumenti delle lunghezze dei pendoli andando dall'equatore verso il polo, si può con facilità dedurre la formola che dà la lunghezza del pendolo a secondi appartenente ad una data latitudine. Chiamiamo λ, l, l' le lunghezze del pendolo semplice alle latitudini o, L, L', e saranno $l-\lambda$, $l'-\lambda$ gli accrescimenti di quelle lunghezze dall'equatore verso il polo; e poichè tali aumenti sono proporzionali ai seni quadrati delle latitudini, si avrà

$$l-\lambda : l'-\lambda :: \text{sen}^2 L : \text{sen}^2 L'.$$

Questa proporzione sussisterà ancora moltiplicando i termini del secondo rapporto per una quantità arbitraria δ, cioè sarà;

$$l-\lambda : l'-\lambda :: \delta\,\text{sen}^2 L : \delta\,\text{sen}^2 L';$$

si può prendere δ in modo che sia $l-\lambda = \delta\,\text{sen}^2 L$, ed allora sarà pure $l'-\lambda = \delta\,\text{sen}^2 L'$, e per un'altra latitudine, $l''-\lambda = \delta\,\text{sen}^2 L''$...

(*) Astronomia di *Delambre* tomo 3.° pag. 518.

Dunque la lunghezza l del pendolo a secondi ad una latitudine qualunque L sarà rappresentata da

$$l = \lambda + \delta \operatorname{sen}^2 L.$$

In questa equazione la costante δ dinota la differenza fra le lunghezze del pendolo al polo ed all'equatore; ed in fatti ponendo $L = 90^\circ$, si avrà la lunghezza del pendolo al polo $l = \lambda + \delta$, da cui $\delta = l - \lambda$.

Le costanti $\lambda . \delta$ potranno determinarsi per mezzo di due esperienze, poichè misurando alle latitudini L, L' le lunghezze corrispondenti l, l' del pendolo a secondi, si avranno le due equazioni;

$$l = \lambda + \delta \operatorname{sen}^2 L \,,\; l' = \lambda + \delta \operatorname{sen}^2 L'$$

dalle quali potranno dedursi i valori delle due incognite λ e δ.

Ma i valori di queste costanti non si otterranno con la possibile esattezza se non facendo concorrere alla loro determinazione le varie misure della lunghezza del pendolo eseguite in molti luoghi della Terra. Il Sig. *Saigey* per abbracciarle tutte vi ha applicato il *metodo dei minimi quadrati*, di cui parleremo nel VI Libro, ed ha trovato la lunghezza del pendolo ad una latitudine qualunque L espressa dalla seguente formola numerica (*);

Lunghezza del pendolo a secondi di tempo medio ad una latitudine qualunque. $\Big\}\; l = 0^m,99102557 + 0^m,00507188 \operatorname{sen}^2 L.$

Or dalla formola ricordata di sopra, $1'' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, deducendosi $g = \pi^2 l$, se in questa espressione della gravità si sostituisca il precedente valore di l, si avrà;

Gravità terrestre ad una latitudine qualunque . . . $\Big\}\; g = 9^{met},781030 + 0^{met},050057 \operatorname{sen}^2 L;$

dove $9^m,781030$ rappresenta la gravità all'equatore, e $0^m,050057$ il suo aumento al polo, siccome si vede facilmente ponendo prima $L = 0$, e poi $L = 90^\circ$.

Per Napoli, $L = 40^\circ.49'.50''$ (R. Officio Topografico), e però,

Lunghezza del pendolo a secondi di tempo medio in Napoli . . . . . $\Big\} = 0^{met},993194$, e

Gravità terrestre in Napoli . . . $= 9^{met},802429$.

Volendo ridurre questi valori in *palmi napolitani*, o in *passi geodetici*, bisogna ricordarsi che *il metro eguaglia palmi* 3,78 *esattamente*, ed il passo è la millesima parte del miglio geografico di sessanta a grado, per cui (supposta la lunghezza del quarto di meridiano terrestre eguale a 10000724 metri, secondo Delam-

(*) Geodesia di *Francoeur* pag 278.

bre) 1000 *passi equivalgono a* $1851^{met},9859$, *ed un metro vale* $0^{pas},5399609$ (*) Adottando questi rapporti, si ha;

Lunghezza del pendolo in Napoli. $= 3^{pal},75427 = 0^{pas},5362857$
Gravità terrestre in Napoli. . . . $= 37^{pal},0532 = 5^{pas},29293$.

*§. 88. La gravità, dedotta come qui sopra dalla lunghezza del pendolo, è la forza che anima effettivamente i corpi pesanti alla superficie della Terra, ed è differenza tra la forza di attrazione della massa terrestre e la forza centrifuga generata dalla rotazione. Per ottenere la gravità *assoluta*, o sia l'attrazione terrestre all'equatore, bisognerà dunque accrescere, il valore $9^m,781030$ già trovato, della forza centrifuga, che si calcolerà con la formola

$f = \frac{4\pi^2 R \cos^2 L}{(24^{ore})^2}$, la quale per l'equatore diviene $F = \frac{4\pi^2 R}{(24^{ore})^2}$. Facendo, con *Delambre*, il raggio dell'equatore eguale a 6376984 *metri*, e riducendo il tempo della rotazione diurna in secondi di tempo medio si avrà,

$F = \frac{4\pi^2 \times 6376984}{(86164'')^2}$; ed eseguito il calcolo si troverà,

F, *o forza centrifuga all' equatore* $= 0^m,0339097$.

Dunque *la gravità assoluta, o sia la forza di attrazione terrestre all' equatore sarà*,

$$9^m,781030 + 0^m,0339097 = 9^m,814940.$$

In conseguenza, *il rapporto della forza centrifuga sotto l'equatore, alla forza di attrazione risulterà eguale a*

$$\frac{0,0339097}{9,814940} = \frac{1}{289,44}.$$

*§. 89. Ciò posto, la forma sferoidica della Terra, derivata dall' attrazione reciproca delle sue parti e dalla rotazione intorno all' asse, si determina mediante le forze stesse agenti sulla massa terrestre. Per tal modo, dato il rapporto della forza centrifuga alla forza di attrazione sotto l'equatore, e le lunghezze de' pendoli all' equatore ed al polo, funzioni di quelle forze, si ottiene subito lo *schiacciamento* terrestre (ossia il rapporto tra la differenza de' semiassi dell' ellisse generatrice dello sferoide ed il semiasse maggiore) applicando un teorema di meccanica celeste così espresso: *lo schiacciamento terrestre è eguale a* $\frac{5}{4}$ *del rapporto della forza centrifuga alla forza di attrazione sotto l'equatore, meno l' eccesso della lunghezza del pendolo al polo sulla lunghezza del pendolo*

(*) Veggasi la nostra *Aritmetica*.

all' equatore diviso per quest' ultima quantità. Sarà dunque ,

$$\textit{Schiacciamento terrestre} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{289,44} - \frac{0,00507188}{0,99102557}$$

$$= 0,00863737 - 0,00511781$$

$$= 0,00351956 = \frac{1}{284,12}.$$

Il sig. *Baily* in un suo eccellente lavoro sul pendolo inserito negli atti della società astronomica di Londra, esamina le esperienze fatte da molti osservatori e ne desume lo schiacciamento $\frac{1}{285,26}$, pochissimo diverso dal precedente. Il chiaris. sig. *Airy* occupandosi dello stesso soggetto ha trovato $\frac{1}{282,90}$; onde il medio dei risultamenti ottenuti da questi due valenti calcolatori ricade esattamente in quello qui sopra determinato. Vedremo che lo schiacciamento terrestre dedotto dalle misure geodetiche risulta alquanto più piccolo.

Prova del moto annuo della Terra dedotta dall' aberrazione della luce delle stelle fisse.

§. 90. Il fenomeno della precessione di cui si è parlato (§. 27), facendo muovere lentamente il punto equinoziale sulla circonferenza dell' ecclittica, genera un' alterazione continua nelle coordinate sferiche degli astri, per modo che le *AR* e le declinazioni di una medesima stella osservate in diversi tempi si trovano alquanto differenti. Ma la precessione non è sola a produrre tali cambiamenti, e vi concorrono altre due cause cioè l' ***aberrazione*** e la ***nutazione***. La scoperta di questi due importanti fenomeni, e delle correzioni che per essi debbono applicarsi alla posizione di una stella osservata in una data epoca per farla coincidere con quella di un' epoca posteriore o anteriore, è dovuta al celebre *Bradley*. In quanto all' aberrazione, gli astronomi avevano trovato delle variazioni di 40″ sulla distanza dallo zenit della polare, delle quali non sapevano render ragione; ma *Bradley* riconobbe che quelle ineguaglianze erano annuali, e ritornavano sempre le stesse nelle medesime condizioni, onde ne conchiuse che dovevano dipendere dal moto annuale della Terra. Ecco la sua spiegazione.

Il sig. *Roemer* aveva dimostrato per mezzo degli ecclissi dei satelliti di Giove che la propagazione della luce non è istantanea ma progressiva, e che la velocità di una molecola luminosa è tale che impiega 8′.13″ di tempo a giungere dal Sole sino a noi. *Bradley* pensò che questa velocità, grandissima ma non infinita rispetto all' altra del moto annuo della Terra di cui è animato l' occhio di chi osserva una stella, poteva cagionare un inganno ottico che facesse comparire la stella in un punto del cielo di-

verso da quello nel quale realmente si trova. Nel dar conto del fenomeno noi ci atterremo al modo adoperato da *Laplace* nel suo *Sistema del mondo*.

Da una stella E parte verso di noi un raggio di luce [*fig.* 17], e può questo considerarsi come un corpuscolo il quale vada da E in B. Sia AB una piccola porzione dell' orbita della Terra, e CB lo spazio che la molecola luminosa percorre durante il tempo che impiega l' occhio a passare da A in B. Così BC, ed AB essendo gli spazi percorsi dalla luce e dall' occhio nello stesso tempo, potranno rappresentare le velocità rispettive dell' una e dell' altro.

Se l'occhio fosse immobile nel punto A vedrebbe la stella nella sua vera posizione, ed il tempo che impiega la luce dell' astro per giungere sino a noi non farebbe che ritardarci la veduta dell' astro medesimo. Non può accadere lo stesso quando l' occhio si suppone in moto, ma per ridurre questo caso al precedente, in cui si suppone in riposo, è chiaro che basterà supporre la luce dell' astro, e l' osservatore animati da una velocità comune, ed uguale e contraria a quella dell' occhio. Questo movimento, affettando tutto il sistema, non produrrà alcun cambiamento nella posizione apparente dell' astro. In tal modo l' occhio spinto da due velocità eguali e contrarie rimarrà fermo nel punto A, e la molecola luminosa animata dalla velocità CB e dalla CD eguale e parallela ad AB seguirà la diagonale del parallelogrammo formato da questi due lati, e giungerà all' occhio nella direzione CA. L' osservatore vedrà dunque la stella sul prolungamento della retta AC nel punto E' del Cielo più avanti del luogo vero E nella direzione del cammino della Terra. Se si supponga CB eguale al raggio dell' orbita terrestre, la luce impiegherà $8'.\,13''$ a percorrere questa distanza, e la retta AB rappresenterà l' archetto dell' orbita percorso dalla Terra col suo moto annuo in $8'.\,13''$ di tempo. Per trovare il valore di questo archetto si farà la proporzione,

$$365\tfrac{1}{4}^{\,giorni} : 8'.\,13'' :: 360^\circ : x = 20''\tfrac{1}{4}.$$

Le velocità della luce, e della Terra potranno dunque essere rappresentate la prima dal raggio di un cerchio, e la seconda da un archetto di $20''\frac{1}{4}$ della sua circonferenza.

Dicesi *angolo di aberrazione* quello che ha per vertice l'occhio dell' osservatore, ed è formato dalle due visuali condotte una al luogo vero e l' altra al luogo apparente dell' astro. La teoria dell' aberrazione fondata su questi principii ha dato le formole necessarie per valutare le correzioni da applicarsi all' ascensione retta, ed alla declinazione di una stella dipendenti dal fenomeno indicato. E siccome le correzioni così calcolate hanno fatto sparire le discordanze prima avvertite fra le posizioni di una medesima stella in diversi tempi dell' anno, così il fatto ha provato l' esattezza della spiegazione di *Bradley*, ed il moto annuo della Terra che n' è il fondamento.

Prima pruova della gravitazione universale dedotta dalla caduta della Luna verso la Terra. Massa del Sole, e conseguenza che ne deriva a favore dell' ipotesi copernicana.

§. 91. È un fatto che la Luna descrive intorno alla Terra una curva rientrante poco differente dal cerchio. Si sa inoltre dalla meccanica che se essa fosse animata da uua sola forza istantanea dovrebbe avere un moto uniforme e rettilineo. Sia dunque LM una porzione dell'orbita lunare [*fig.* 18], LL' la tangente all'orbita, T la Terra. Una forza incognita fa descrivere alla Luna la curva LM in vece della retta LL', e considerato il moto in $1''$ di tempo, quella forza incognita in $1''$ avvicina la Luna alla Terra per la distanza $L'a$, che dicesi la caduta del pianeta verso la Terra; valutiamola. Sia $LT=r$, ed $LTL'=dv$, sarà,

$$L'a=L'T-LT=\frac{LT}{\cos LTa}-LT=r\left(\frac{1-\cos dv}{\cos dv}\right)$$

$$=r\left(\frac{1-\cos dv}{\operatorname{sen} dv}\right)\frac{\operatorname{sen} dv}{\cos dv}$$

$$=r\tan\tfrac{1}{2}dv\tan dv \text{ [I. §. 4]},$$

e per la piccolezza dell' arco dv, si avrà finalmente [I, §. 54]

$$L'a=\tfrac{1}{2}r\frac{(dv)^2}{(R'')^2}.$$

Per calcolare in numeri questa quantità si sa dall'osservazione che la distanza media r della Luna dal centro della Terra è di sessanta raggi terrestri, ed il moto angolare della Luna in $1''$ di tempo è $0'',55$ quindi,

$$L'a=\frac{30\times(0'',55)^2}{(206265'')^2}=\frac{(0,55)^2.30}{(3438\times60)^2}.$$

Riduciamo i raggi terrestri in piedi, ed a tal fine ricordiamoci che il raggio terrestre contiene 3438 miglia [I, §. 54], il miglio equivale a 950 tese, e la tesa contiene 6 piedi; sarà

$$L'a=\frac{(0,55)^2.30.3438.950.6}{3438^2.60.60}=\frac{(0,55)^2.95}{3438.2}=\frac{28,7375}{6876}=0^p,0042.$$

Newton ha supposto che l' avvicinamento $L'a$ della Luna alla Terra fosse dovuto alla forza di attrazione di quest' ultima, la quale agisce in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Secondo questa ipotesi, siccome un grave sulla superficie terrestre cade in $1''$ di tempo dall' altezza di 15^{piedi}, e le distanze del grave e della Luna dal centro della Terra, dove si può supporre concentrata la forza di attrazione terrestre, sono rispettivamente 1 e 60,

così la Luna in un secondo dovrà cadere verso la Terra per uno spazio dato dalla seguente proporzione,

$$(60)^2:(1)^2::15^p,1:x=\frac{15^p,1}{3600}=0^p,0042.$$

La coincidenza dei due risultamenti dimostra l'esattezza dell'ipotesi newtoniana.

§. 92. Ammesso il principio della gravitazione universale, un procedimento analogo a quello ora indicato per la Luna, servirà a determiuare il rapporto tra la massa del Sole e quella della Terra; ed ecco in qual modo. Un corpo cade sulla Terra dall'altezza di piedi 15,1 in 1'' di tempo, cioè dall'altezza $\frac{1}{2}g$, e ciò per l'attrazione che esercita la Terra su quel corpo alla distanza r eguale al raggio terrestre; se dalla Terra fosse allontanato il grave alla distanza R interposta fra la Terra ed il Sole, la caduta del corpo in 1'' si otterrebbe dalla proporzione $R^2:r^2::\frac{1}{2}g:\frac{r^2g}{2R^2}$.

Calcoliamo ora la caduta della Terra nella sua orbita in 1'' di tempo, prodotta dall'attrazione del Sole; e supponendo che il Sole si trovi in T [*fig.* 18] e la Terra descriva in 1'' l'archetto La, la lunghezza effettiva di questo si avrà dividendo la lunghezza dell'orbita $2\pi R$ pel numero dei secondi T' contenuti nel tempo che impiega la Terra a girare intorno al Sole cioè nell'anno sidereo, e si avrà $La=\frac{2\pi R}{T'}$. Ma per essere La piccolissimo si può considerare eguale alla sua corda ed alla sua tangente LL', dunque sarà $LL'=\frac{2\pi R}{T'}$, e per la proprietà del cerchio, $(LL')^2=(2R+aL')aL'$, da cui $aL'=\frac{(LL')^2}{2R}=\frac{4\pi^2R}{2T'^2}$. È questa la caduta della Terra prodotta dall'attrazione del Sole, ma l'attrazione della Terra sul grave posto alla distanza del Sole era espressa da $\frac{r^2g}{2R^2}$, e le attrazioni di due corpi alla medesima distanza sono proporzionali alle masse, dunque, indicando con M la massa del Sole, e prendendo per unità la massa terrestre sarà, $M:1::\frac{4\pi^2R}{2T'^2}:\frac{r^2g}{2R^2}$, da cui $M=\frac{4\pi^2R^3}{gr^2T'^2}$.

Questa è l'espressione che con metodi più diretti trovano gli autori di meccanica celeste per la massa del Sole (*). Per ridurla in numeri, si ponga $R=23984$ raggi terrestri, come risulta suppo-

(*) Pontécoulant, *Théorie analytique du système du Monde;* Tomo 1.° pag. 281.

nendo la parallasse del Sole $=8'',6$ [Lib. III.], e sarà $r=1$; e poichè il numero dei secondi contenuti nell' anno sidereo è 31558152, e per l' omogeneità, uno dei fattori di R^3 deve ridursi in piedi, il calcolo procederà come quì appresso, adottando 3,5362739 per logaritmo del raggio terrestre in miglia [I, §. 54.], e supponendo che il miglio contenga 5701,2 piedi;

$$\begin{array}{rl} l.4= & 0,6020600 \\ 2\,l.\pi= & 0,9942997 \\ 3\,l.R= & 13,1397801 \\ l.rag.ter= & 3,5362739 \\ l.5701,2= & 3,7559663 \\ \hline l.4\pi^2R^3= & 22,0283800 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l.\,g= & 1,4800069 \\ 2\,l.T= & \left\{\begin{array}{r} 7,4991095 \\ 21 \\ 7,4991116 \end{array}\right. \\ \hline l.gr^2T^2= & 16,4782301 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l.4\pi^2R^3= & 22,0283800 \\ l.gr^2T^2= & 16,4782301 \\ \hline l.M= & 5,5501499 \\ M= & 354936. \end{array}$$

La massa del Sole è dunque trecentocinquantacinquemila volte maggiore di quella della Terra, e però le attrazioni scambievoli essendo proporzionali ai numeri 355000 ed 1, non potrebbe mai il Sole essere attirato dalla Terra e muoversi verso di essa, ma questa si precipiterebbe sul Sole se non fosse animata ancora dalla forza istantanea a lei impressa nella creazione, che l' obbliga per le leggi della meccanica a descrivere una sezione conica intorno al corpo attraente. Il principio della gravitazione universale ha dato quindi il più saldo e sicuro appoggio al sistema di Copernico.

CAPO SESTO

Spiegazione dei fenomeni celesti secondo il sistema di Copernico.

Del moto diurno degli astri.

§. 93. Il moto di rotazione della Terra intorno al suo asse è talmente equabile, e la massa terrestre è così grande rispetto all'uomo, che esso non può in alcun modo accorgersi di quel movimento al quale partecipa insieme con gli oggetti che lo circondano: siccome però deve avvertire che la posizione degli astri rispetto al suo orizzonte è diversa ad ogni istante, così attribuisce a' medesimi un movimento, che in realtà non hanno, ond' è che essi gli sembrano muoversi con velocità eguale e contraria alla sua. Una simile apparenza si verifica per coloro che viaggiano in mare poichè, specialmente quando è tranquillo, essi non si accorgono del moto della nave, ed attribuiscono alle coste un movimento in direzione contraria.

Per esaminare più da vicino il moto diurno, sia *a* il luogo di un osservatore sulla Terra [*fig.* 19] ed *A* lo zenit corrispondente sulla sfera celeste. Il moto di rotazione della Terra intorno all' asse *pp'* farà descrivere all' osservatore *a* il parallelo terrestre *amg*, e contemporaneamente lo zenit *A* descriverà il parallelo celeste *AMG*. In questo movimento dello zenit, se esso nel punto *A* coincideva con una stella, allontanandosene da *A* in *M*, sembrerà che la stella si sia allontanata dallo zenit descrivendo lo stesso arco *MA* con moto contrario.

Un' altra stella qualunque *S* fissa nel Cielo come la stella *A* non potrà conservare rispetto a quest' ultima la posizione invariabile che deve avere, senza sembrare di percorrere l' arco *SN*, parallelo ad *AM*, da *N* verso *S*, e lo stesso deve dirsi di tutti gli altri astri, ciascuno de' quali descriverà apparentemente in 24 ore un cerchio parallelo a quello descritto realmente dallo zenit dell' osservatore intorno al polo celeste. Così rimane spiegato col sistema di Copernico il movimento diurno degli astri in cerchi paralleli fra loro, e perpendicolari all' asse del mondo, ma in direzione contraria al moto di rotazione della Terra, il quale si fa da occidente in oriente, onde il moto apparente degli astri si esegue da oriente in occidente.

Girando lo zenit intorno al polo, si muove anche l' orizzonte dell' osservatore, e siccome l' angolo che fa la verticale *CA* con l'asse del mondo è costante, costante è pure l'angolo *PCO* dell' asse del mondo con l' orizzonte. Quando lo zenit si trova in *A* l' orizzonte si trova in *OR*, e l' astro *S* ha l'altezza *SR* su questo piano, e quando lo zenit passa in *G* l' orizzonte passa in *O'R'*, e l' astro *S* trovandosi al di sotto è già tramontato. Nel passaggio che fa l'orizzonte dalla prima alla seconda posizione, l' astro *S* acquista ad ogni istante diverse altezze su di quel piano, ma la massima e la minima si verificano allorchè lo zenit dell' osservatore giunge sul cerchio di declinazione dell' astro ne' punti *A*, *G*, ossia quando il meridiano *PCM* del luogo va a combaciare col cerchio di declinazione indicato. In fatti, se si prolunghino *GA*, *CS* sino al loro incontro in *S'*, fra tutte le oblique condotte da questo punto alla circonferenza del cerchio *GMA*, la massima è *GS'*, e la minima *AS'*, onde si ha $S'A < S'M$, ed $S'G > S'M$. In conseguenza i due triangoli *MCS'*, *ACS'*, e gli altri due *GCS'*, *MCS'* hanno due lati eguali a due lati, e la base maggiore della base, e quindi l' angolo al vertice sarà maggiore dell' angolo al vertice, cioè sarà $MCS' > ACS'$, e $GCS' > MCS'$. Dunque le due distanze *ACS*, *GCS* dell' astro dallo zenit che si verificano ne' punti *A*, *G* del cerchio di declinazione *GPS*, sono la prima minore, e la seconda maggiore di qualunque altra *MCS*, e perciò le altezze dell' astro si verificheranno inversamente massima nella posizione *OR* dell' orizzonte, e minima nella posizione *O'R'*. Si può quindi conchiu-

dere che nel sistema di Copernico non è l'astro che passa pel meridiano, ma il meridiano che passa per l'astro, ed in questo passaggio, che si verifica due volte in 24 ore, l'astro acquista la massima, e la minima altezza sull'orizzonte, come nel sistema di Tolomeo.

Moto proprio del Sole.

§. 94. Rappresenti *S* il Sole situato in uno dei fuochi dell'orbita terrestre *ABPH* [*fig.* 20], il cui piano prolungato segna in cielo l'ecclittica ♈*M*♎*E*. Quando la Terra si trova nel punto *B*, che corrisponde al punto equinoziale di autunno, un osservatore vede il Sole projettato sulla sfera celeste nel punto ♈, ossia nel punto equinoziale di primavera. Passando la Terra da *B* in *C* l'osservatore vedrà il Sole projettato in *E*, ed attribuirà ad esso un movimento da ♈ in *E*; parimente, trovandosi la Terra in *G* vedrà il Sole nel punto ♋ etc. Dunque il moto della Terra nella sua orbita produce un moto apparente nel Sole, ed in questo fenomeno devono notarsi due circostanze essenziali; 1.° il moto proprio apparente del Sole si fa nella stessa direzione del moto annuo della Terra, cioè secondo i segni; 2.° il Sole comparisce sempre in un punto del cielo opposto a quello cui corrisponde la Terra, e quindi la longitudine del Sole si può considerare sempre maggiore della longitudine della Terra di mezza circonferenza, poichè quando la Terra comincia il suo corso nel punto *H* corrispondente all'equinozio di ariete, il Sole si vede già in ♎ con una longitudine di 180°.

§. 95. Dopo che si conobbe essere il moto della Terra nell'orbita rappresentato in cielo dal moto del Sole nell'ecclittica, fu facile determinare la forma dell'orbita terrestre, studiando con attenzione il moto proprio del Sole. La prima osservazione che si presentò in questa ricerca fu che il Sole non apparisce sempre dello stesso *diametro*, o sia sotto lo stesso *angolo visuale;* dal che si conchiuse che le distanze del Sole dalla Terra sono diverse ne' diversi giorni dell'anno. E poichè, per i principii di ottica, i diametri sono in ragione inversa delle distanze, misurando giornalmente il diametro apparente del Sole si venne in cognizione del massimo e del minimo diametro, e quindi del rapporto fra la minima e la massima distanza dalla Terra, le quali si trovarono corrispondere a due punti opposti del cielo *N*,*M*: il massimo diametro del Sole è 32'. 35'',6 ed il minimo 31'. 31'',0, onde la massima e la minima distanza sono proporzionali ai numeri 1955,6 e 1891,0. Con questo dato, è facile esprimere le distanze massima e minima in parti della distanza media presa per unità, e con l'osservazione giornaliera del diametro si può anche determinare un' altra distanza qualunque. Infatti, indicando con

D,d, le distanze massima e minima, e con e la loro semidifferenza, si hanno le relazioni,

$$\frac{D}{d}=\frac{19556}{18910}, \frac{D+d}{2}=1, \frac{D-d}{2}=e,$$

e quindi $D=\frac{D+d}{2}+\frac{D-d}{2}=1+e, d=\frac{D+d}{2}-\frac{D-d}{2}=1-e$

$$\frac{D}{d}=\frac{1+e}{1-e}=\frac{19556}{18910}, \text{ da cui}$$

$$(1+e)18910=(1-e)19556, \text{ ed } e=\frac{646}{38466}=0,0168;$$

$$D=1,0168; d=0,9832.$$

Determinate così le distanze massima e minima corrispondenti al minimo ed al massimo diametro, un' altra distanza d' corrispondente ad un dato diametro, $31'.55''$ per esempio, misurato in un giorno qualunque dell' anno, si ottiene dalla proporzione,

$$1915'':1891''::1,0168:d'=1,0041.$$

Ma le sole distanze non bastavano per costruire la curva per punti, e bisognava determinare ancora gli angoli che esse distanze, o raggi vettori DS, GS, CS etc. fanno con la linea degli *apsidi* AP [*fig.* 20] o sia con la linea della massima e minima distanza, o del minimo e massimo diametro. Questi angoli si ottennero osservando giornalmente le ascensioni rette e le declinazioni del Sole, calcolando le corrispondenti longitudini [§§. 32, 37] e prendendone le differenze con la longitudine ♈M dell' apogeo o sia del punto corrispondente al minimo diametro. Per tal modo si costruì la curva con coordinate polari e si trovò essere una ellisse il cui semiasse maggiore è eguale ad 1, e l' eccentricità eguale a 0,0168. L' equazione polare dell' ellisse $r=\frac{1-e^2}{1-e\cos V}$ nella quale V indica l' angolo che il raggio vettore r fa con l' asse maggiore SA, servì infine a confermare questi saggi intorno al moto ellittico del Sole, poichè calcolando con essa il raggio vettore r servendosi dell'eccentricità e dell'angolo V osservato, si ottenne lo stesso risultamento che dal calcolo del raggio vettore, o sia della distanza, dedotta dalla misura del diametro corrispondente all'angolo V.

§. 96. Intorno all' orbita terrestre è ancora da notare che sulla figura si è distinta la linea de' solstizi ♋♑ dall'asse maggiore $MAPN$, o linea degli *apsidi*, perchè effettivamente quelle due rette formano tra loro un angolo di 10 gradi. Questa circostanza, e l'altra di trovarsi il Sole nel fuoco dell' orbita ellittica $ABPH$ della Terra, producono una disuguaglianza nella durata delle stagioni. La primavera, per gli abitanti dell' emisfero boreale, è il tempo in cui la Terra descrive l'arco BG della sua orbita; nell'estate descrive l'arco

GAH, nell'autunno l'arco HL, e nell'inverno l'arco LPB. Ora, questi archi, oltre ad essere evidentemente disuguali, sono anche percorsi con diversa velocità, perchè il moto della Terra è meno veloce verso l'*afelio*, e più celere verso il *perielio*, in ragione inversa de' quadrati delle rispettive distanze dal Sole. Raccogliendo dunque insieme le due stagioni calde per l'emisfero boreale, BG, GAH, è chiaro che queste dovranno essere più lunghe delle rimanenti HL, LB, e la differenza è propriamente di 8 giorni. Il contrario accaderà per l'emisfero australe, il quale ha le stagioni calde quando il boreale ha le fredde, e viceversa [§. 64]; onde nell'emisfero australe le stagioni estive sono di otto giorni più brevi delle iemali, nelle quali il Sole si trova pure alla sua massima distanza dalla Terra.

Ma questa condizione dell'emisfero australe non durerà sempre allo stesso modo, e dopo un lungo volgere di secoli l'emisfero australe avrà le attuali stagioni dell'emisfero boreale e viceversa. In fatti, abbiamo veduto che la linea $S♈$ degli equinozi ha un moto annuale di $50'',2$ contrario all'ordine de' segni, cioè da ♈ verso M; e d'altra parte il piano dell'orbita terrestre, per l'attrazione de' pianeti sulla Terra, ha un lento movimento di rotazione intorno al fuoco S, per cui la linea degli apsidi SN descrive in ogni anno un angolo di $11'',8$ da N verso ♎, cioè secondo l'ordine de' segni. L'angolo $NS♋$ fra la linea degli apsidi e quella dei solstizi cresce dunque annualmente della somma di quei due movimenti, o sia di $62'',0$; e poichè al principio del 1800 era di $9^\circ.30'.6''$, verso l'anno 6500 diventerà retto, onde la linea degli apsidi combacerà con quella degli equinozi; e verso l'anno 12300, crescendo quell'angolo di 180°, le stagioni dell'emisfero australe saranno le attuali dell'emisfero boreale e viceversa.

§. 97. Il moto diretto annuale del perigeo solare dà origine ad una terza specie di anno, detto *anomalistico* dagli astronomi, ed è il ritorno del Sole al perigeo. La durata di esso si deduce facilmente da quella dell'anno sidereo, con aggiungervi il tempo che deve impiegare il Sole a percorrere gli $11'',8$ di più dell'intera circonferenza dell'ecclittica per raggiungere il perigeo. Chiamando S l'anno sidereo ed A l'anno anomalistico, per determinare l'accrescimento da darsi a quest'ultimo, si farà la seguente proporzione [§. 27];

$$360^\circ : 360^\circ + 11'',8 :: S : A = \frac{360^\circ + 11'',8}{360^\circ} S, \text{ e quindi ,}$$

$$A - S = \frac{11'',8}{360^\circ} S = \frac{118 S}{12960000}$$

$$= \frac{118 \times 365^g,256374}{12960000} = 0^g,0033256.$$

Aggiunta questa frazione all'anno sidereo, si avrà l'anno anomalistico $A = 365^g,259700 = 365^g.6^h.13'.58'',08$.

Ritardamento del Sole rispetto alle stelle nel ritornare ad uno stesso meridiano.

§. 98. Sia $TT''L$ l'orbita della Terra [*fig.* 21], S il Sole, ♈♉♊... la sfera celeste; si trovi la Terra nel punto T dell'ecclittica, e si consideri il punto m della superficie terrestre. Per ciò che si è detto di sopra [§. 93], sarà mezzogiorno nel luogo m quando il meridiano Tm di questo luogo, girando intorno all' asse terrestre, passerà per il Sole, o sia combacerà col cerchio di declinazione dell' astro. Supponiamo che in quell' istante si trovi anche una stella A nel meridiano. L' osservatore m, essendo rivolto a *mezzo giorno*, avrà a sinistra l' *oriente* ed a destra l' *occidente*, come è indicato sulla figura; quindi i segni dello zodiaco procederanno sulla volta celeste da destra a sinistra, o sia da A verso ♋.

Ciò premesso, tanto il moto di rotazione della Terra intorno all' asse quanto il moto nell' orbita si eseguono da occidente verso oriente, onde sulla figura il moto annuo si eseguirà da T in T', ed il moto di rotazione da n verso o,p, etc. Immaginiamo che il centro della Terra essendo passato da T in T', nello stesso tempo il meridiano mT, girando intorno all' asse terrestre sia giunto in una posizione $m'T'$ parallela a quella di partenza mT. È chiaro che in quel momento sarà compita una rotazione della Terra intorno al suo asse, e la stella A, situata ad una distanza infinita, rispetto al raggio dell' orbita terrestre, si troverà nel meridiano $m'T'$ sulla visuale $T'A'$ parallela alla precedente AT. Non vi si troverà però il Sole, ed il meridiano, per giungere nella direzione di questo astro, dovrà girare ancora per un angolo $A'T'S$ eguale al suo alterno TST', che rappresenta il moto della Terra nell' orbita in 24 ore. Il passaggio del Sole pel meridiano sarà dunque ritardato, rispetto a quello della stella A, per tutto il tempo che deve impiegare il meridiano $m'T'$ a descrivere il suddetto angolo, il quale eguaglia l' apparente moto proprio diurno del Sole, ridotto all' equatore, ed è di circa un grado, come si è detto altrove [§. 70]: e poichè col moto diurno, o di rotazione della Terra, un grado si descrive in 4' di tempo, sarà questo il ritardamento del Sole rispetto alle stelle.

È evidente che, se i passaggi successivi del Sole per lo stesso meridiano m si paragonano sempre a quelli di una medesima stella A, che passò insieme con lui quando la Terra si trovava in T, i ritardamenti diurni si cumulano, e sono rappresentati dall' angolo $A''T''S$ quando la Terra è in T'', da 180°, quando giunge in H, e da 360° quando, compiendo il giro della sua orbita, la Terra ritorna nel punto T dal quale era partita. Dunque ***in un anno le stelle passano una volta di più del Sole per lo stesso meridiano terrestre.*** Questa conseguenza è indipendente

dalla durata della rotazione diurna della Terra, perchè dipende soltanto dalla condizione di aggirarsi la Terra intorno al Sole in una curva rientrante, fuori della quale si trovano ad immensa distanza le stelle fisse.

Il precedente ragionamento essendo fondato sull' ipotesi che il moto di rotazione della Terra intorno al proprio asse si faccia nella medesima direzione del moto nell'orbita, è facile persuadersi che se la rotazione si facesse in direzione contraria, vale a dire da oriente in occidente, le stelle ritarderebbero rispetto al Sole, e perderebbero in vece di guadagnare un giorno nel giro di un anno.

Il ritardamento del Sole rispetto alle stelle spiega anche il fenomeno del diverso aspetto che presenta il cielo nelle varie stagioni dell' anno. In fatti, quando la Terra si trova in H, la stella A passa pel meridiano a dodici ore di distanza dal Sole, cioè a mezzanotte, e quando la Terra è in L questa differenza diminuisce, e si annulla quando la Terra giunge in T. Allora la stella A passa insieme col Sole, o sia a mezzogiorno, e però devono passare a mezzanotte altre stelle che si trovano in punti opposti del cielo.

Delle stagioni.

§. 99. La Terra essendo un corpo opaco, è sempre parte illuminata dal Sole, e parte oscura. Se immaginiamo un cono tangente al Sole ed alla Terra, il contatto di questo cono con la superficie terrestre sarà la circonferenza di un cerchio che separa la parte illuminata dalla parte oscura della Terra. Esaminiamo più da vicino questo fatto.

Siano S,T il Sole e la Terra [*fig.* 22], ST la linea che unisce i loro centri detta raggio centrale o raggio vettore, che giace sempre nel piano dell' orbita terrestre, MON il cono tangente ai due astri, di cui la parte acO dicesi cono ombroso perchè non è illuminato dal Sole, e l' altra $MacN$ dicesi cono luminoso. Il cerchio ac perpendicolare al raggio centrale ST è evidentemente quello che separa la parte illuminata della Terra dalla parte oscura; esso è distante dal centro T circa 16 miglia. In fatti, per la similitudine de' triangoli SMO, aTO si ha, $SM : aT :: SO : TO$ e dividendo,

$$SM - aT : aT :: SO - TO : TO, \text{ ovvero } SM - aT : aT :: ST : TO.$$

Indicando con l' unità il raggio terrestre aT, e con Δ, D il raggio del Sole e la distanza de' centri espressi in raggi terrestri, sarà $TO = \frac{D}{\Delta - 1}$; da cui si ottiene la lunghezza del cono ombroso. E poichè nel triangolo rettangolo TaO si è abbassata dal vertice a la perpendicolare ap sulla base, sarà pure $(aT)^2 = Tp \times TO$, onde $Tp = \frac{(aT)^2}{TO}$, cioè $Tp = \frac{\Delta - 1}{D}$. Se in vece di Δ, D poniamo

i loro valori conosciuti in raggi terrestri, che sono $\Delta = 112$, $D = 24000$ (Lib. III], si avrà,

$$TO = \frac{24000}{112} = 214,\ Tp = \frac{1}{214};$$

cioè la lunghezza del cono ombroso è di 214 raggi terrestri, e la distanza Tp eguaglia $\frac{1}{214}$ di raggio terrestre, che equivale a $\frac{3438}{214} = 16$ *miglia*.

Il cerchio ac è dunque così vicino al centro della Terra che essa si potrebbe supporre metà illuminata e metà oscura. Ma questa supposizione sembrerà molto più plausibile riflettendo che un osservatore a posto sulla circonferenza del cerchio ac, non vede se non un solo punto M del disco solare, il quale rimane tutto al di sotto del suo orizzonte MO; per la qual cosa, è più regolare che al cerchio ac si sostituisca un altro cerchio tale che gli osservatori posti sulla sua circonferenza veggano il centro del Sole sul loro orizzonte, come quando sorge o tramonta il Sole in un dato luogo. Se dal punto b posto sulla circonferenza del cerchio massimo bi parallelo ad ac si conduca una retta af parallela ad ST, sarà chiaro che l'osservatore b non giunge a vedere il centro del Sole ma sibbene un punto f distante da quel centro quanto è il raggio terrestre. E se finalmente dal centro S del Sole si conduca la tangente Sd alla superficie terrestre, l'osservatore d vedrà il centro del Sole sul suo orizzonte Sd, e quindi il cerchio dh è quel cerchio minore che separa la parte della superficie terrestre che ha il giorno da quella che ha la notte. Or pei triangoli rettangoli simili SdT, rdT, l'angolo rdT è uguale all'angolo dST; e per conseguenza anche l'angolo dTb, o l'arco db che lo misura è eguale all'angolo dST, il quale rappresenta la parallasse orizzontale del Sole [§. 46] e si chiama *orizzontale* perchè in questo caso il centro dell'astro sta sull'orizzonte Sd dell'osservatore. Dunque il cerchio minore dh, che divide la parte della Terra che ha il giorno da quella che ha la notte, non è distante dal centro che per $rT = dT \times \operatorname{sen} rdT$, cioè per il prodotto del raggio terrestre pel seno di $8'',6$ [§. 92], vale a dire per 0,143 *miglia*, ovvero per 143 passi (265 *metri*). Nella spiegazione delle stagioni potremo perciò supporre sempre che metà della Terra abbia il giorno e metà la notte, e chiameremo *cerchio d'illuminazione* il cerchio massimo che separa l'emisfero illuminato dall'emisfero oscuro, ed è perpendicolare al raggio vettore ST.

§. 100. Ciò premesso, ricordiamoci, 1.° che la Terra compie il suo giro in un anno intorno al Sole, 2.° che durante questo tempo essa gira 365 volte intorno al suo asse, 3.° che nel moto di traslazione della Terra l'asse di rotazione si mantiene sempre parallelo a se stesso, facendo costantemente l'angolo di 66°.32' col piano dell'orbita terrestre. Prima di considerare da vicino queste circo-

stanze del doppio moto della Terra, osserviamo che se l'asse di rotazione fosse perpendicolare al piano dell'orbita, tutti i punti della superficie terrestre avrebbero sempre la notte eguale al giorno. Infatti, qualunque fosse la posizione della Terra nell'orbita, l'asse terrestre sarebbe allora perpendicolare a tutte le rette condotte nel piano dell'orbita dal suo piede, come il raggio centrale ST [*fig.* 22], e quindi si troverebbe sempre nel piano del cerchio d'illuminazione bi. In conseguenza, girando la Terra intorno al suo asse, ogni punto l della superficie terrestre descriverebbe un parallelo ll' che rimarrebbe diviso in parti uguali dal cerchio d'illuminazione bi, e però il punto l si troverebbe per 12 ore nell'emisfero illuminato bqi, e per 12 ore nell'emisfero oscuro bei. Non avviene però così nel fatto. L'asse terrestre pp' [*fig.* 23] essendo inclinato al piano dell'orbita sotto un angolo di 66°. 32', e dovendo mantenersi sempre parallelo a se stesso nelle varie posizioni della Terra, non può fare un angolo costante col raggio vettore ST, ma un tale angolo deve continuamente variare. Quando la Terra si trova in T l'asse pT è in un piano pTS che passa pel Sole ed è perpendicolare all'orbita, per cui fa col raggio vettore TS lo stesso angolo che col piano dell'orbita. Passando la Terra in T' la projezione dell'asse pT' sul piano dell'orbita è $\pi T'$, onde l'angolo $pT'\pi$ è di 66°. 32', ma il raggio vettore ST', trovandosi nel piano di projezione, e fuori del piano projettante $pT'\pi$, l'angolo $pT'S$ che esso fa con l'asse terrestre deve esser maggiore di 66°. 32'. Giunta la Terra in T'', il piano $epqp'$ perpendicolare all'orbita in cui si trova l'asse terrestre è anche perpendicolare al raggio vettore, e per conseguenza l'angolo $pT''S$ fra l'asse ed il raggio vettore è retto. In T''' l'asse terrestre ritorna in un piano che passa pel Sole ed è perpendicolare all'orbita, ma il semiasse pT''', che finora si è sempre considerato, qui si trova inclinato dalla parte opposta al Sole, e quindi fa col raggio vettore $T'''S$ un angolo $pT'''S$ supplemento di 66°. 32'. Finalmente in T'''' l'asse terrestre giunge di nuovo in un piano $epqp'$ perpendicolare all'orbita ed al raggio vettore, onde l'angolo $pT''''S$ ritorna ad esser retto. Da tutto ciò si conchiude, che quando la Terra è in T, l'angolo fra il raggio vettore ed il semiasse pT è minimo, va crescendo continuamente da T in T''' dove diviene massimo, e va diminuendo da T''' in T; il contrario precisamente accade dell'angolo $p'TS$ fra il raggio vettore ed il semiasse $p'T$. Essendo poi l'asse terrestre perpendicolare all'equatore, l'angolo fra il raggio vettore e l'equatore, cioè la declinazione del Sole, è complemento dell'angolo fra il raggio vettore e l'asse. Il progresso della declinazione del Sole sarà dunque contrario a quello di un tal angolo, onde la declinazione sarà massima in T, andrà diminuendo sino a divenir zero in T'', e continuerà a diminuire divenendo negativa sino in T'''; da questo

punto comincerà ad aumentare, passerà di nuovo per zero in T'''', e tornerà ad esser massima in T.

§. 101. Dalla varietà dell'angolo fra il raggio vettore e l'asse terrestre, ovvero dalla varietà della declinazione del Sole dipende la varietà delle stagioni. E primamente quando la Terra si trova in T, è estate per l'emisfero che ha il polo p, ed inverno per l'altro emisfero. Imperciocchè l'angolo pTS essendo di 66°.32′, il suo complemento tTe è uguale a 23°.28′, onde il punto t appartiene al tropico terrestre, e quando il meridiano ptp' passa pel Sole, l'osservatore che è in t ha l'astro nel suo zenit. Se dagli angoli retti bTt, pTe si toglie l'angolo comune pTt, resterà l'angolo pTb eguale a tTe, cioè a 23°.28′; dunque il polo p, che è nell'emisfero illuminato, dista dal cerchio d'illuminazione bi per un angolo eguale alla obliquità dell'ecclittica, ed il parallelo nb, che è tutto in luce, è il cerchio polare terrestre. Col polo p e col cerchio polare nb si trovano intieramente nell'emisfero illuminato tutti i paralleli compresi nella zona sferica npb. All'opposto il polo p' è nell'emisfero oscuro insieme col cerchio polare iK, e con tutta la zona $ip'K$. Tra l'equatore eq ed il cerchio polare nb, tutti i paralleli terrestri am hanno la loro maggior parte ar nell'emisfero illuminato bti, e la minore rm nell'emisfero oscuro, per cui aggirandosi la Terra intorno al suo asse, qualunque abitante della zona sferica $enbq$ avrà il giorno maggiore della notte. Di più, la disuguaglianza de'giorni è massima in questa posizione della Terra; perocchè in generale è chiaro che ogni parallelo am risulta diviso tanto più disugualmente dal cerchio d'illuminazione bi quanto il polo p, è più distante da quel cerchio, ed allorchè la Terra si trova in T, l'angolo pTS essendo minimo, come si è fatto osservare, il suo complemento pTb è massimo, e massima con esso è la disuguaglianza dei giorni. Gli abitanti dell'emisfero epq hanno dunque il massimo giorno e la minima notte dell'anno. Il contrario precisamente accade per l'emisfero terrestre $ep'q$; minimi sono i giorni e massime le notti, avendo ogni parallelo $a'm'$ la sua massima parte $r'm'$ all'oscuro, e la minima $a'r'$ in luce. Finalmente le altezze meridiane del Sole in questa posizione della Terra sono massime per l'emisfero epq, e minime per l'altro. Infatti, ogni distanza meridiana ZTS del Sole dallo zenit è per l'emisfero epq rappresentata dalla differenza fra la latitudine aTe del luogo e la declinazione STe; e poichè nel caso attuale la declinazione è massima, minima risulta la distanza dallo zenit, e massima l'altezza meridiana del Sole: per l'emisfero $ep'q$ all'opposto ogni distanza meridiana $Z'TS$ dallo zenit è somma della latitudine e della declinazione, la quale essendo massima, massima riesce la distanza dallo zenit e minima l'altezza meridiana del Sole. Riassumendo, quando la Terra si trova in T, l'emisfero epq ha i più lunghi giorni dell'anno e le massime altezze meridiane del Sole, gli abitanti del tropico hanno il Sole

al loro zenit, e quelli del cerchio polare hanno un giorno di 24 ore; il contrario precisamente accade per l' emisfero *ep'q* **dove i giorni** sono minimi insieme con le altezze meridiane del Sole, e gli abitanti del cerchio polare *ik* hanno una notte di 24 ore. Dunque l' emisfero *epq* ha l' estate, e l' altro *ep'q* ha l' inverno.

Appena che la Terra lascia la posizione *T*, diminuisce la declinazione del Sole, e con essa l' angolo *pTb* che le è sempre eguale, onde i poli *p,p'* vanno avvicinandosi al cerchio d' illuminazione *bi*. Diminuiscono perciò i giorni per l' emisfero *epq*, e crescono per l' altro emisfero, e lo stesso accade per le altezze meridiane del Sole. I paralleli compresi nella zona *npb*, entrando per una parte nell' emisfero oscuro *bqi*, vanno successivamente acquistando una notte, ed i paralleli compresi nella zona *ip'K*, avanzandosi in parte nell'emisfero illuminato, vanno acquistando un giorno.

Giunta la Terra in T'' l' angolo $pT''S$ fra il raggio vettore e l' asse terrestre è retto, la declinazione del Sole è nulla, ed ambedue i poli trovansi sul cerchio d' illuminazione *pqe*. Tutti i paralleli terrestri sono per conseguenza divisi in parti eguali dal cerchio d' illuminazione ne' punti $a,m; a',m'$..., ed il giorno è eguale alla notte per tutta la Terra. È questo l' equinozio di autunno per l' emisfero *epq* che viene dall' estate, e di primavera per l' emisfero *ep'q* che viene dall' inverno.

Uscita la Terra dal punto T'' dell' orbita, il polo *p*, che da *T* in T'' fu sempre in luce, entra nell' emisfero oscuro, ed il polo *p'* al contrario si allontana dal cerchio d' illuminazione avanzandosi nell' emisfero illuminato. Diminuiscono sempre più i giorni e le altezze meridiane del Sole per l' emisfero *epq*, e crescono per l' altro.

In T''' i poli *p,p'* giungouo rispettivamente alla loro massima distanza dall' emisfero illuminato e dall' emisfero oscuro. È questo il solstizio d' inverno per l' emisfero *epq* e di estate per l' emisfero *ep'q*. Il parallelo *am* che nel punto *T* aveva il massimo giorno *ar*, avrà ora la massima notte, ed il contrario accaderà del parallelo *a'm'*. Le altezze meridiane del Sole saranno anche scambiate fra i due paralleli, come dimostra la figura. Tutta la zona *npb* sarà all' oscuro, e la *ip'K*, che era all' oscuro quando la Terra si trovava in *T*, uscirà in luce.

Dal punto T''' i giorni e le altezze meridiane del Sole cominceranno a crescere per l' emisfero *epq*, ed a decrescere per l' altro emisfero. Nel punto T'''' i giorni ritorneranno eguali alle notti per tutta la Terra, e sarà questo l' equinozio di primavera per l' emisfero *epq* e di autunno per l'altro *ep'q*. Continuando la Terra ad avanzarsi verso *T*, cresceranno maggiormente i giorni e le altezze meridiane per l' emisfero *epq*, e l' opposto accaderà per l' altro emisfero, finchè la Terra giungerà di nuovo in *T* dove il primo emisfero ritornerà nel solstizio di estate ed il secondo in quello d' inverno, dai quali erano partiti.

Da ultimo faremo avvertire che nell'intero giro della terra ciascuno dei due poli si trova per sei mesi nell' emisfero illuminato e per altrettanto tempo nell' emisfero oscuro; il polo p è illuminato per tutto l'arco $T''''TT''$ dell'orbita, ed il polo p' per l'arco $T''T'''T''''$. Tutti i luoghi della Terra compresi fra i cerchi polari ed i poli hanno nel corso dell' anno un giorno ed una notte maggiore di 24 ore, e che può anche durare più mesi per i luoghi molto vicini ai poli; e ciò apparirà evidente riflettendo, che se il polo p, il quale esce nell'emisfero illuminato in T'''', deve impiegare sei mesi per acquistare e poi perdere gradatamente una distanza di 23°.28′ dal cerchio d' illuminazione, un luogo x vicino al polo comincerà a trovarsi continuamente in luce appena che il polo p si sarà allontanato dal cerchio d' illuminazione per un arco eguale ad xp, e continuerà così finchè dopo il solstizio, cominciando di nuovo il polo ad accostarsi al cerchio d' illuminazione, ritornerà alla medesima distanza px da quel cerchio. E poichè l' arco compreso fra il polo ed il cerchio d'illuminazione è sempre eguale alla declinazione del Sole, e l' arco px è complemento della latitudine geografica del punto x, ne segue che questo punto comincia ad avere un giorno maggiore di 24 ore quando il Sole acquista una declinazione eguale al complemento della sua latitudine, ed un tal giorno continua senza interruzione sino a che la declinazione del Sole, dopo essere divenuta massima nel solstizio, ritorna, diminuendo gradatamente, ad avere l' indicato valore; il che coincide con quanto si è detto nel §. 68 esaminando il moto proprio apparente del Sole.

§. 102. Dopo aver mostrato come si spiegano, con l'ipotesi di Copernico, il moto diurno della sfera celeste, ed il moto proprio del Sole, ci sarà permesso in seguito di ricorrere, per maggior semplicità, al linguaggio dell' apparenza, senza che il lettore sia imbarazzato da questo cambiamento. Così facendo, seguiamo l' esempio de' maggiori astronomi moderni, onde non possiamo temere neppure la critica de' pedanti.

Delle stazioni, e retrogradazioni de' pianeti.

§. 103. La difficoltà di spiegare il fenomeno della stazione e retrogradazione de' pianeti con l'ipotesi di Tolomeo, indusse principalmente Copernico ad immaginare il suo sistema. Supponendo la Terra fuori del centro delle orbite planetarie si rende ragione di quelle apparenze facilmente e semplicemente.

Premettiamo con *Lalande* il seguente principio. *Un astro qualunque comparisce immobile nel cielo, malgrado che esso e l' occhio che lo guarda siano realmente in moto, se le visuali successive sotto le quali è veduto risultano parallele; se le visuali sono concorrenti, l' astro sembra muoversi in una direzione, e se sono divergenti, nella direzione contraria.*

Siano *A*,*B* [*fig.* 24] due successive posizioni dell'occhio, e *C*,*D* le corrispondenti posizioni di un pianeta. Supponendo le rette *CA*,*DB* parallele, l'osservatore riferirà il pianeta ai punti *E*,*F* della sfera celeste, ma questi due punti si confonderanno in un solo perchè muovendosi la visuale *EA* parallelamente a se stessa, l'occhio, ed il pianeta animati in certo modo da una velocità comune compariranno fermi l'uno all'altro. Inoltre noi non possiamo giudicare della situazione di un astro se non paragonandolo ad un punto, ad una linea, o ad un piano preso per termine di confronto. Or se si riferisca per esempio la posizione del pianeta alla linea *B*♈, essendo l'angolo *EA*♈ eguale ad *FB*♈ per le parallele, la distanza angolare apparente de' punti *E* ed *F* dal termine di paragone *B*♈ sarà la stessa, e l'occhio non vedrà alcun indizio o apparenza di movimento nell'oggetto *E*. Similmente accaderà paragonando il pianeta ad una stella *S*, poichè per l'immensa distanza delle stelle fisse le visuali *SA*,*SB* si considerano parallele e le distanze angolari *SAE*,*SBF* sono pure eguali.

Se poi le visuali successive *AC*,*Bm* dirette al pianeta saranno concorrenti, esse prolungate indefinitamente sino alla sfera celeste dovranno intersegarsi, e l'angolo *GB*♈ con la linea di confronto divenendo minore del precedente *EA*♈, il pianeta comparirà muoversi da *E* verso *G*. Viceversa, se le visuali *AC*,*Bn* saranno divergenti, il moto apparente del pianeta riferito alla sfera celeste sarà da *E* verso *H* ovvero in direzione contraria alla precedente.

§. 104. Ciò posto, siano *Tabc*...,*Va'b'c'*... le orbite di due pianeti *T*,*V*, che girano intorno al Sole secondo l'ipotesi copernicana [*fig.* 25]; e si prendano sulla prima gli archi eguali *Ta*,*ab*,*bc*,*cd*, etc. e sulla seconda gli archi *Va'*,*a'b'*,*b'c'*,*c'd'*, etc. eguali pure fra loro, e che si suppongano percorsi dal pianeta inferiore *V* nello stesso tempo che il pianeta superiore descrive gli archi *Ta*,*ab* etc. La durata delle rivoluzioni de' pianeti e la grandezza delle loro orbite sono tali che è permesso di stabilire in generale che gli archetti descritti da un pianeta inferiore *V* debbono risultare sempre maggiori di quelli percorsi nello stesso tempo dal superiore *T*. Laonde se i due pianeti si facciano partire dalla posizione *SVT*, nella quale il pianeta superiore vede l'inferiore in congiunzione, e l'inferiore vede il superiore in opposizione col Sole, le visuali successive *TV*,*aa'*, dirette dal pianeta superiore *T* all'inferiore saranno divergenti, onde quest'ultimo comparirà muoversi sulla sfera celeste da *Q'* verso *A'*; e siccome il moto effettivo del pianeta superiore *T* in cui si suppone attualmente l'osservatore si fa secondo l'ordine de' segni ♈,♉,♊ etc, così il moto apparente del pianeta inferiore da *Q'* verso *A'*,*B'*, etc. si eseguirà in direzione contraria; ed il pianeta comparirà retrogrado. Questo movimento si andrà rallentando sino a che l'arco maggiore *b'c'* percorso dal pianeta inferiore acquisterà rispetto al corrispondente *bc* descritto dal pia-

neta superiore tale obliquità, da poter essere compreso insieme con esso fra le medesime visuali parallele bb', cc'. Allora il pianeta inferiore, per le cose dette di sopra comparirà stazionario ad un osservatore del pianeta superiore, e viceversa. Al di là del punto c', gli archi $c'd', d'e'$ divenendo anche più obliqui rispetto a' corrispondenti cd, de, le visuali cc', dd', e le altre dd', ee' concorreranno, ed intersegandosi fra loro, il pianeta inferiore sarà veduto dal superiore ne' punti D', E' della sfera celeste e comparirà muoversi in direzione contraria alla precedente, cioè secondo l' ordine de' segni. Riprenderà dunque il moto diretto, e continuerà in questo modo sino all' altra stazione che si verificherà come la prima nelle vicinanze della tangente condotta dal pianeta superiore all' orbita dell' inferiore.

Ognun vede che un discorso analogo applicato alle apparenze che presenta un pianeta superiore T veduto dall' inferiore V, renderà ragione delle stazioni e retrogradazioni che si osservano nei pianeti superiori. Infatti, supponendo un osservatore nel pianeta inferiore V, le visuali $VT, a'a$ condotte al pianeta superiore saranno concorrenti, e prolungate indefinitamente s' intersegheranno, per cui l' osservatore vedrà muoversi il pianeta superiore da Q verso A, contro l' ordine de' segni. Lo stesso accaderà per le visuali concorrenti $a'a, b'b$ convenientemente prolungate, e ciò sino alle visuali parallele $b'b, c'c$ dove si verificherà la stazione: oltrepassando questo limite, le visuali $c'c, d'd$ saranno divergenti, ed il pianeta inferiore V osserverà il superiore muoversi da C verso D, E etc. in direzione contraria alla precedente cioè secondo l' ordine de' segni.

Da ciò che precede si raccoglie che la retrogradazione de' pianeti inferiori si verifica prima e dopo la congiunzione inferiore e fra le due stazioni, le quali accadono poco prima e poco dopo che il pianeta inferiore si trovi sulle tangenti condotte dal pianeta superiore alla sua orbita. Per i pianeti superiori la retrogradazione si osserva prima e dopo l' opposizione, ed è anche compresa fra le due stazioni che accadono nelle stesse circostanze. In tutto il resto della loro orbita i pianeti inferiori e superiori presentano il moto diretto.

CAPO SETTIMO

Della Luna.

Movimenti della Luna.

§. 105. La *Luna*, dopo del Sole, è l'astro più importante per il geografo, perchè dal suo moto proprio dipende principalmente la determinazione delle longitudini. È necessario perciò accennare brevemente quanto riguarda questo satellite della Terra.

Siccome avviene di tutti i pianeti (e probabilmente di tutti gli astri), la Luna ha due movimenti, uno di *traslazione*, e l'altro di rotazione intorno a se stessa. Il primo movimento, col quale la Luna gira intorno alla Terra, risulta dall'attento esame delle posizioni successive che essa prende nel cielo in tutto il corso di un mese; il secondo dal presentare che fa la Luna sempre la stessa faccia, o sia lo stesso emisfero, alla Terra. Osservando giornalmente le ascensioni rette e le declinazioni della Luna, e deducendone col calcolo le latitudini e le longitudini [§§. 32, 37], si è notato, **1.°** che due volte in un mese la Luna non ha latitudine, e quindi due volte il suo centro è sul piano dell' ecclittica; **2.°** che uniti fra loro per mezzo di una linea retta i punti del cielo in cui la Luna non ha latitudine, quella retta passa pel centro della Terra; **3.°** che la Luna, partendo dai punti in cui non ha latitudine, ne acquista gradatamente una, la quale cresce sino ad un massimo di 5°.8'.48" al nord dell'ecclittica, va indi diminuendo sino ad annullarsi di nuovo, e dà questo punto va crescendo al sud dell'ecclittica sino ad un massimo australe presso a poco eguale al boreale, e diminuisce poi anche per gradi sino a zero, ritornando l'astro, dopo l'intero giro del cielo, alla sua primitiva posizione. Da tutto ciò si conchiude che la Luna descrive intorno alla Terra una curva rientrante, il cui piano è inclinato a quello dell'ecclittica sotto l'angolo di 5°.8'.48" [§. 22]. Per conoscere la natura di questa curva, si sono misurati a brevi intervalli di tempo i diametri apparenti della Luna, e se ne sono dedotti i rapporti delle sue distanze dalla Terra; ed i luoghi del massimo e del minimo diametro, o della minima e massima distanza, si sono trovati alle estremità di una retta che passa per il centro della Terra. Seguendo in questa ricerca un metodo analogo a quello accennato per l'orbita terrestre [§. 95], si è conosciuto che l'orbita lunare è una ellisse molto più eccentrica dell'orbita terrestre, perchè i diametri della Luna variano fra limiti più ampi di quelli del Sole, cioè da 29'.21",9 a 33'. 31",1, essendo il diametro alla distanza media di 31'.26",6.

L' eccentricità dell' orbita lunare dedotta da siffatti dati sarebbe 0,066, ma questo valore può considerarsi soltanto come una prima approssimazione, poichè il moto della Luna è soggetto a grandi irregolarità, e gli astronomi per rappresentarlo qual è, hanno dovuto modificare l'eccentricità ottenuta da'diametri, e stabilirla, per un medio, eguale 0,0548.

§. 106. Gli elementi del moto ellittico della Luna soffrono notabili variazioni principalmente perchè la Terra girando intorno al Sole trasporta con se la Luna, ed il Sole non esercita ugualmente la sua attrazione sull'una e sull'altra. Che se la Luna e la Terra fossero sole nell' universo, l' orbita che la prima descrive intorno alla seconda sarebbe una perfetta ellisse, rientrante in se stessa, immobile, ed in un solo e medesimo piano. Non è dello scopo di quest'opera l'occuparci delle *disuguaglianze* del moto della Luna scoperte dalla teoria dell' attrazione universale e dall'osservazione, onde accenneremo solo quanto può servire a distinguere le diverse specie di rivoluzioni lunari considerate dagli astronomi. La linea de' *nodi* (quella in cui la Luna non ha latitudine) cambia continuamente di luogo nel cielo, movendosi con moto *retrogrado* o sia contro l' ordine de' segni : essa compie il suo giro , ritornando alla stessa longitudine , o al punto equinoziale da cui è partita , dopo 6798,29 giorni , il quale periodo dicesi *rivoluzione tropica* del nodo. La linea degli apsidi ha per contrario un moto *diretto* anche più forte , poichè il *perigeo* lunare compie la sua rivoluzione , ritornando alla stessa longitudine , dopo 3231,47 giorni, in che consiste la *rivoluzione tropica* del perigeo. Questi movimenti del nodo e del perigeo lunare, il moto di precessione del punto equinoziale, ed il moto proprio del Sole, o sia il moto della Terra nell' orbita , danno origine a cinque periodi di rivoluzione della Luna intorno alla Terra di diversa durata. Dicesi rivoluzione *siderea* della Luna il tempo che essa impiega a ritornare allo stesso punto del cielo, o alla medesima stella; rivoluzione *tropica,* o *periodica*, il tempo necessario perchè ritorni ad avere la stessa longitudine; rivoluzione *anomalistica,* il tempo che trascorre fra due successivi ritorni della Luna al perigeo; rivoluzione *draconica,* il tempo che deve impiegare per ritornare al suo nodo ascendente; e finalmente rivoluzione *sinodica* della Luna è il tempo che trascorre fra due successive congiunzioni della Luna col Sole, o sia il tempo interposto fra due successive posizioni della Luna nelle quali essa ha la medesima longitudine del Sole. Quest' ultima rivoluzione è la più importante di tutte , ed è più comunemente conosciuta sotto il nome di *lunazione*.

* §. 107. Determinata con l' osservazione la durata di una delle accennate cinque rivoluzioni, è facile dedurne quella di ciascuna delle altre, purchè si conosca il moto del punto cui si riferisce il ritorno della Luna. Ma la rivoluzione tropica , per

la quale la Luna ritorna alla stessa longitudine, o alla stessa distanza dall' equinozio, è la più appropriata a servir di base a questi calcoli, perchè è quella che si ottiene immediatamente dall' osservazione, e perchè la posizione de' punti che servono di origine alle altre rivoluzioni si riferisce sempre allo stesso punto equinoziale di primavera.

Chiamiamo dunque T la rivoluzione tropica della Luna, S la siderea, A l' anomalistica, N la draconica ed L la sinodica, o sia la lunazione; ed indichiamo con p il moto retrogrado del punto equinoziale in un giorno medio, ovvero il moto diurno di precessione, con n il moto diurno retrogrado in longitudine, o sia il moto *diurno tropico* retrogrado del nodo lunare, con m il moto diurno tropico del perigeo lunare, e con s il moto medio diurno del Sole ovvero il moto medio diurno della Terra nell' orbita. Poichè la longitudine della Luna dopo un numero T di giorni si accresce di 360°, il moto diurno della Luna in longitudine sarà rappresentato da $\frac{360^\circ}{T}$, che indicheremo con t, e dicesi *moto diurno tropico* della Luna. Allo stesso modo, quantunque il perigeo, il nodo, o il Sole ai quali si riferisce la Luna nel valutare le rivoluzioni anomalistica, draconica e sinodica, abbiano un effettivo movimento più o meno celere nel cielo, nondimeno il giro della Luna è compito rispetto a ciascuno di quelli punti, quando la sua distanza angolare dal punto medesimo è divenuta di 360°, e però il moto diurno della Luna relativamente al perigeo sarà espresso da $\frac{360^\circ}{A}$, rispetto al nodo da $\frac{360^\circ}{N}$, e rispetto al Sole da $\frac{360^\circ}{L}$.

È chiaro che trattandosi della rivoluzione siderea, il moto diurno della Luna sarà pure espresso da $\frac{360^\circ}{S}$, con la differenza che in questo solo caso il moto diurno è *assoluto*, laddove in tutti gli altri è *relativo,* cioè nascente dalla differenza o dalla somma del moto della Luna e di quello del punto di origine della rivoluzione che si considera.

Ciò posto, incominciando dalla rivoluzione siderea, essa è più lunga della tropica per una ragione analoga a quella accennata riguardo al Sole [§. 27]; il moto diurno tropico $\frac{360^\circ}{T}$ è dunque maggiore del moto diurno sidereo $\frac{360^\circ}{S}$, e siccome la differenza ha origine dal moto del punto equinoziale, che in un giorno

è rappresentato da p, è chiaro che si verificherà l'eguaglianza $\frac{360°}{T}-\frac{360°}{S}=p$, da cui si desume

$$S=\frac{360°\,T}{360°-pT}=T\left(\frac{1}{1-p\frac{T}{360°}}\right)=T\left(\frac{1}{1-\frac{p}{t}}\right)$$

e quindi,

$$(1)\ \ldots.\ S=T\left(\frac{t}{t-p}\right),\ S-T=\frac{pT}{t-p}$$

La rivoluzione anomalistica è maggiore della tropica, perchè la longitudine del perigeo cresce, e la Luna per raggiungere questo punto deve acquistare una longitudine maggiore di quella che aveva in principio del moto. Dunque $\frac{360°}{T}>\frac{360°}{A}$, e poichè la differenza di queste due quantità deve uguagliare il moto diurno tropico del perigeo, sarà,

$$\frac{360°}{T}-\frac{360°}{A}=m;\ \text{da cui}$$

$$(2)\ \ldots.\ A=T\left(\frac{t}{t-m}\right),\ A-T=\frac{mT}{t-m}$$

La rivoluzione sinodica è anche maggiore della tropica, perchè la longitudine del Sole cresce mentre la Luna fa il suo giro, e questa per raggiungere nuovamente il Sole deve impiegare non poco altro tempo. Si avrà dunque, come per la rivoluzione anomalistica,

$$\frac{360°}{T}-\frac{360°}{L}=s;\ \text{e però}$$

$$(3)\ \ldots.\ L=T\left(\frac{t}{t-s}\right),\ L-T=\frac{sT}{t-s}$$

Finalmente la rivoluzione draconica è minore della tropica, perchè la longitudine del nodo diminuisce, onde la Luna incontra questo punto prima di acquistare la longitudine che aveva in principio del moto. Perciò $\frac{360°}{N}>\frac{360°}{T}$, e la differenza di questi due movimenti dovendo eguagliare il moto diurno retrogrado del nodo riferito all'equinozio, si avrà

$$\frac{360°}{N}-\frac{360°}{T}=n,\ \text{e quindi}$$

$$(4)\ \ldots.\ N=T\left(\frac{t}{t+n}\right),\ T-N=\frac{nT}{t+n}.$$

È da notare che nel precedente ragionamento, essendosi paragonate le rivoluzioni S,A,L,N alla tropica, che si riferisce al punto equinoziale, i movimenti p,m,s,n debbono anche riportarsi a quel punto, cioè non debbono rappresentare altro che differenze di longitudine, quali noi li abbiamo supposti.

* §. 108. Per trovare in numeri le quantità $S,A,N,L,$ bisogna conoscere i movimenti diurni t,p,m,n,s. Osservando due posizioni della Luna ad un lungo intervallo di tempo, si sono calcolate le longitudini corrispondenti, e togliendo la prima dalla seconda con tener conto delle intere rivoluzioni, o sia delle circonferenze intere percorse, si è diviso l'arco differenza per il numero di giorni e frazione di giorno trascorsi fra le due osservazioni, e si è ottenuto così il moto medio diurno tropico della Luna, $t=13^\circ.10'.35'',027=47435'',027$. Da questo dato si deduce subito la rivoluzione tropica, perchè essendo $t=\frac{360^\circ}{T}$, si ha,

$$T=\frac{360^\circ}{t}=\frac{1296000''}{47435'',027}=27^g,3215824=27^g.7^h.43'.4'',7.$$

Inoltre, secondo i calcoli del ch. sig. *Bessel*, il moto di precessione, in 100 anni *giuliani*, ciascuno di giorni $365\frac{1}{4}$, è $5022'',351$; e però dividendo questo numero per 36525 giorni, si ottiene il moto diurno del punto equinoziale $p=0'',1375045$. Rispetto al nodo ed all'apogeo, il moto tropico diurno di ciascuno di questi due punti si ottiene dividendo 360°, o 1296000'', per la corrispondente rivoluzione tropica; per il nodo si ha,

$$n=\frac{1296000''}{6798,29}=3'.10'',64, \text{ e per l'apogeo,}$$

$$m=\frac{1296000''}{3231,47}=6'.41'',06.$$

Da ultimo il moto proprio diurno del Sole in longitudine è $59'.8'',33$. Introdotti questi valori nelle formole (1), (2), (3), e (4) si hanno i risultamenti che seguono.

Rivoluzione siderea della Luna	$=27^g,3216616$	$=27^g.\ 7^h.43'.11'',6$
Rivoluzione anomalistica	$=27\ ,5545543$	$=27\ .13\ .18\ .33\ ,5$
Rivoluzione sinodica o Lunazione	$=29\ ,5305887$	$=29\ .12\ .44\ .\ 2\ ,86$
Rivoluzione draconica.	$=27\ ,2122173$	$=27\ .\ 5\ .\ 5\ .35\ ,6$

§. 109. Abbiamo detto che s' intende per rivoluzione sinodica della Luna, secondo l'apparenza, ma sarà utile darne una chiara

spiegazione col sistema di Copernico. Rappresentino $LL'L''$... l'orbita lunare, T la Terra, $TT'M$ la sua orbita, S il Sole [*fig.* 26]: la rivoluzione sinodica, o sia la lunazione, comincia quando la Luna si trova in L con una longitudine eguale a quella del Sole, il che equivale a dire, quando i centri della Terra, della Luna e del Sole sono in un medesimo piano perpendicolare alla ecclittica, essendo la Luna tra mezzo alla Terra ed al Sole. Passa indi la Luna in L', L'', L'''..., e se la Terra fosse immobile nel punto T, la Luna compirebbe la sua rotazione, e ritornerebbe in congiunzione col Sole, ritornando nel punto L da cui è partita; ma siccome la Terra si muove nella sua orbita da T verso T' e trasporta con se la Luna, è chiaro che questa avrà compita la sua rotazione intorno alla Terra quando giungerà sul piano $T'S'$ parallelo al precedente TS. Non sarà però compita la lunazione, perchè la Luna si troverà in l e per ritornare nella direzione del Sole dovrà descrivere ancora l'angolo $lT'l'$ eguale all'angolo TST' descritto dalla Terra. Laonde la rivoluzione sinodica sarà più lunga della tropica, e la sorpasserà propriamente di tutto il tempo che deve impiegare la Luna a descrivere col suo moto proprio il suddetto angolo TST' che la Terra ha descritto intorno al Sole tra le due congiunzioni, $TLS, T'l'S$, ossia durante tutto il tempo della lunazione. Indicando s il *moto medio diurno* del Sole, o della Terra nell'orbita, ed L il numero di giorni contenuto nella lunazione, è chiaro che l'angolo TST' sarà espresso da sL; e poichè la Luna descrive 360°, rispetto al punto equinoziale, nel tempo della sua rivoluzione tropica, dinotato da T, per trovare il tempo che deve impiegare a descrivere l'angolo sL si farà la proporzione,

$$360^\circ : sL :: T : x = \frac{sLT}{360^\circ}.$$

Questo tempo aggiunto alla rivoluzione tropica T deve dare la lunazione; cioè sarà,

$$T + \frac{sLT}{360^\circ} = L, \text{ onde}$$

$$L = \frac{360^\circ T}{360^\circ - sT}, \text{ ed } L - T = T.\frac{sT}{360^\circ - sT}$$

ovvero, ponendo t in luogo di $\frac{360^\circ}{T}$,

$$L - T = T.\frac{s}{t - s}.$$

La quale formola si riduce in numeri, sostituendo alla rivoluzione tropica T il suo valore $27^{gior},3215824$, dedotto dal confronto di due posizioni della Luna rispetto all'equinozio osser-

vate con molto intervallo di tempo, e facendo, come è noto, $s = 59'.8'',33$; le due rivoluzioni tropica e sinodica della Luna sono dunque,

$$T = 27^g,3215824 = 27^g.\ 7^h.43'.4'',72$$
$$L = 29^g,5305887 = 29^g.12^h.44'.2'',86.$$

Rotazione della Luna. Librazione.

§. 110. La Luna rivolge sempre la stessa faccia, o sia lo stesso emisfero, alla Terra; è questo un fatto innegabile, che non potrebbe verificarsi se la Luna non girasse intorno a se stessa nel medesimo tempo che gira intorno alla Terra.

È chiaro, in fatti, che se la Luna non avesse alcun moto di rotazione, girando intorno alla Terra, ogni sua parte conserverebbe una posizione parallela a quella che aveva precedentemente; onde il piano ab [*fig.* 26] (perpendicolare al raggio vettore TL) che nel punto L separa la parte visibile della Luna dalla invisibile, nel punto L' prenderebbe la posizione $\alpha\beta$, nel punto L'' la posizione $\alpha' L''$, nel punto L''' la posizione ab etc., e per conseguenza l'emisfero aLb, interamente visibile nel punto L, corrisponderebbe successivamente ad $\alpha L'\beta$, $\alpha' aL''$, $a\alpha'' b$, e si nasconderebbe prima in parte, poi per metà ed indi interamente all'osservatore che trovasi in T. Or non accade così, perchè il piano ab, che nel punto L divide la parte visibile della Luna dalla invisibile, si mantiene sempre perpendicolare al raggio vettore TL, e l'emisfero aLb prende successivamente le posizioni $aLb, a'L'b', aL''b...$, rimanendo sempre presente all'osservatore T. E poichè $\alpha\beta$ è la posizione che nel punto L' avrebbe il piano ab se non esistesse la rotazione, ed $a'b'$ è quella che prende di fatto lo stesso piano, ne segue che da L ad L' la Luna ha girato intorno al suo asse per l'angolo compreso dai piani $\alpha\beta, a'b'$, il quale eguaglia quello de' raggi vettori TL, TL' ad essi rispettivamente perpendicolari. Dunque ***il moto di rotazione della Luna è identico a quello di traslazione nell' orbita.*** Questa notabile coincidenza è, secondo *Lagrange*, una conseguenza necessaria dell' attrazione terrestre sulla Luna, la cui forma è probabilmente quella di un ellittoide a tre assi disuguali, il massimo de' quali deve mantenersi sempre nella direzione del raggio vettore dell' orbita, il minimo passa per i poli di rotazione, ed il medio è perpeudicolare agli altri due.

§. 111. Alcuni hanno negata la rotazione lunare come non necessaria alla spiegazione del fenomeno, che la Luna presenta sempre lo stesso aspetto alla Terra. Costoro s' illudono forse paragonando il moto della Luna nell' orbita a quello di un corpo L [*fig.* 26] connesso invariabilmente ad un' asta rigida TL, girevole intorno al centro fisso T; poichè, dicono essi, il corpo L presenta sempre lo stesso aspetto al centro T, e nondimeno ha

un solo movimento. Ma, sebbene questo caso sia diverso da quello della Luna, come or ora vedremo, pure non è vero che il corpo *L* abbia un solo movimento; esso ne ha due di eguale durata, uno di traslazione intorno al centro *T*, e l'altro di rotazione intorno ad un asse perpendicolare al piano dell'orbita. Ciò risulta evidente dal considerare che, se un corpo qualunque cambia di luogo nello spazio, senza che abbia alcun moto di rotazione, tutte le linee o i piani che in esso si considerano debbono conservare una posizione parallela a quella che avevano in principio del moto, siccome si è accennato per il piano *ab* nel §. precedente. Nell'esempio proposto non avviene così, e si vede anzi che se si supponesse distrutto il braccio *TL* che unisce il corpo *L* al centro fisso, il moto di questo corpo, invece di annullarsi si ridurrebbe al solo moto di rotazione. Il chiarissimo Sig. *Francoeur* paragona, molto ingegnosamente, il moto della Luna a quello di un uomo che girasse intorno ad un albero avendo sempre la faccia ad esso rivolta; costui girerebbe nel medesimo tempo anche intorno a se stesso perchè vedrebbe tutta la campagua che lo circonda; oltre a che, supponendo l'uomo a contatto dell'albero, ed il diametro di questo impiccolirsi a poco a poco sino a ridursi ad un asse immateriale, è chiaro che il moto dell'uomo si cambierebbe in un semplice giro intorno a se medesimo, analogamente a ciò che si è detto del corpo *L*.

§. 112. Del resto la rotazione della Luna è provata sino all'ultima evidenza dalla librazione delle macchie lunari. Questo fenomeno, avvertito la prima volta dal gran *Galileo*, consiste in un leggiero movimento oscillatorio che hanno le macchie della Luna vicine al lembo, le quali si mostrano e si nascondono alteruativamente. Gli astronomi distinguono tre specie di librazioni; la *librazione in longitudine*, la *librazione in latitudine*, e la *librazione diurna*.

Siccome il moto di rotazione della Luna intorno al suo asse è uniforme, ed al contrario il moto nell'orbita è soggetto a grandi disuguaglianze, è facile persuadersi che il raggio vettore condotto dal centro della Terra al centro della Luna è sottoposto nella sua rivoluzione a tutte queste disuguaglianze, laddove la macchia o il punto della superficie lunare, per il quale in un dato istante passa il raggio vettore, gira intorno all'asse della Luna con moto uniforme. Quando dunque il moto attuale della Luna nell'orbita sarà più celere del moto medio, equivalente al moto di rotazione, il raggio vettore passerà avanti della macchia o del punto col quale prima coincideva, e quando il moto attuale sarà più lento, il raggio vettore rimarrà indietro della macchia o del punto. E poichè il raggio vettore incontra la superficie della Luna sempre nel centro dell'emisfero visibile, è chiaro che una macchia che prima si trovava nel centro passa alternativamente all'occidente ed al-

l' oriente di esso, e quindi le macchie situate ai lembi del disco lunare, hanno anche un moto libratorio in longitudine, in forza del quale allontanandosi ed avvicinandosi con la stessa vicenda al centro, spariscono e ricompariscono.

Se l' asse di rotazione della Luna fosse perpendicolare al piano dell' orbita, esso si troverebbe sempre nel piano *ab*, [*fig.* 26.], che separa la parte visibile della Luna dalla invisibile, ed è perpendicolare al raggio vettore *TL*. Ma l'asse lunare è obliquo al piano dell' orbita, per cui accade de' poli della Luna rispetto alla Terra, ciò che avviene de' poli terrestri rispetto al Sole uel corso delle stagioni [§. 101, *fig.* 23]; vale a dire, essi si mostrano e si nascondono alternativamente all'osservatore che trovasi in *T* [*fig.* 26], e con essi appariscono e spariscono a vicenda le macchie contigue, nel tempo di una rivoluzione siderea della Luna intorno alla Terra. Questo movimento oscillatorio delle macchie in una direzione quasi perpendicolare all' ecclittica costituisce la librazione in latitudine; per essa si è conosciuto che l' asse di rotazione della Luna è inclinato all' ecclittica sotto un angolo di 88°.30', e però l'equatore lunare fa con l' ecclittica l' angolo di 1°.30'. circa.

Finalmente la terza specie di librazione dipende dall' essere la posizione dell' osservatore, posto sulla superficie della Terra, continuamente variabile rispetto alla Luna, per effetto della rotazione terrestre. Per convincersene, basta paragonare le apparenze che si verificherebbero al centro della Terra con quelle di un punto della superficie terrestre. Supponiamo che un abitante dell' equatore terrestre vegga in una data sera la Luna al suo zenit, nel momento in cui passa pel meridiano; in quell' istante le visuali dirette al centro della Luna da questo osservatore e da un altro posto al centro della Terra si confonderebbero, onde i due osservatori vedrebbero lo stesso emisfero lunare. Ma un momento dopo la la Luna, lasciando il meridiano, si avvicina all' orizzonte, e le visuali dirette all' astro dai due osservatori si distaccano, formando un angolo alla Luna, che nel §. 46. abbiamo chiamato *parallasse*. Distaccandosi le visuali si distaccano i piani ad esse perpendicolari che limitano per l' uno e per l' altro osservatore l' emisfero visibile della Luna, e però questi non hanno più la stessa apparenza; e siccome l' angolo fra le visuali, o sia la parallasse, cresce continuamente sino a che la Luna giunga sull' orizzonte, così le apparenze per i due osservatori divengono sempre più differenti. Ma l' apparenza per l' osservatore posto al centro della Terra è evidentemente invariabile nel corso di poche ore, dunque l' osservatore posto alla superficie dovrà avere un' apparenza sempre diversa, o sia avvertire un movimento nelle macchie lunari, prodotto dal continuo cambiamento del piano che limita l' emisfero visibile della Luna, dipendentemente dalla rotazione terrestre: in questo movimento consiste la librazione diurna.

Fasi della Luna, Ecclissi.

§. 113. Abbiamo veduto che la rivoluzione sinodica della Luna si compie in 29 giorni e mezzo circa, nel quale periodo la Luna, partendo dalla congiunzione TLS col Sole [*fig.* 26], gira intorno alla Terra e ritorna alla congiunzione $T'l'S$. Se, per maggior facilità, facciamo astrazione dal moto della Terra, supponendo che la Luna descriva la sua orbita rientrante intorno alla Terra con la differenza dei movimenti de' due astri, o sia col suo moto *relativo* rispetto al Sole, essa prenderà successivamente le posizioni L, L', L'', L''', L'''', nelle quali presenterà alla Terra diverse apparenze. In fatti, la Luna essendo un corpo opaco, è sempre metà illuminata dal Sole e metà oscura, e per la grande distanza dal Sole, i piani $ab, \alpha\beta, \alpha' L''$... che separano la parte illuminata dalla parte oscura ne' varii punti L, L', L''... possono supporsi paralleli fra loro. Nel punto L la Luna è in congiunzione col Sole, e presenta alla Terra l'emisfero oscuro aLb; essa è invisibile per due o tre giorni in quelle vicinanze, e prende il nome di *luna nuova*, o *neomenia*. Nel punto L' l'emisfero visibile $a'L'b'$ si è staccato già sensibilmente dall'emisfero illuminato $\alpha b'\beta$, del quale si vede soltanto la piccola parte $\beta b'$, che presenta l'aspetto della *fase m*. Nel punto L'', l'elongazione della Luna, o sia l'angolo $L''TS$, essendo di 90 gradi, l'emisfero visibile $aL''b$ si compone della metà $L''b$ illuminata e della metà aL'' oscura; la Luna presenta la *fase m'*, che dicesi *primo quarto*. Nel punto L''', l'elongazione è di 180 gradi, la Luna è in *opposizione*, e presenta l'intero disco illuminato m'' che dicesi *Luna piena*. Da questo punto la fase va diminuendo, finchè giunta la Luna in L'''' con una elongazione di 270°, si vede nuovamente illuminata per metà, e la fase m''' si chiama *l'ultimo quarto*; indi la fase diminuisce sempre più, riprendendo l'aspetto m, finchè si annulla quando l'astro torna in congiunzione col Sole nel punto L. La *luna nuova*, e la *luna piena* insieme considerate si chiamano le *sizigie*, ed il primo ed ultimo quarto le *quadrature*.

§. 114. Se il piano dell'orbita lunare combaciasse col piano dell'ecclittica, in ogni *novilunio* ed in ogni *plenilunio* i centri del Sole della Terra e della Luna sarebbero in linea retta; e nel novilunio, interponendosi la Luna fra la Terra ed il Sole vi sarebbe un *ecclisse* di Sole, nel plenilunio, frapponendosi la Terra fra la Luna ed il Sole, produrrebbe un ecclisse di Luna. Ma l'orbita lunare è, come abbiamo veduto, inclinata per 5° all'ecclittica, e quindi accaderà un ecclisse di Sole o di Luna solo quando questi due astri si troveranno insieme nella intersezione de' due piani, cioè sulla linea de' nodi. Il Sole si troverebbe in

ogni sei mesi su questa linea, o sia passerebbe per uno dei nodi, se questi punti fossero immobili nel cielo, ma poichè essi hanno un moto retrogrado di circa 20° l'anno, o di 10° in sei mesi, il Sole incontra ciascun nodo dopo 5 mesi e 20 giorni circa; ed accade allora un ecclisse se la Luna si trova contemporaneamente nella sua congiunzione o nella sua opposizione. Non è per altro necessario, per verificarsi un ecclisse, che la Luna si trovi precisamente nel piano dell'ecclittica, ovvero in uno de' nodi, e basta che serbi dalla linea che unisce i centri del Sole e della Terra una distanza angolare minore di un certo limite facile ad assegnarsi. Per questa ragione in un anno possono accadere più di due ecclissi, e può non verificarsene alcuno, se quando il Sole passa per il nodo la Luna è molto lontana dalla congiunzione o dalla opposizione.

*§. 115. Siano S il Sole, T la Terra [*fig.* 27], MON il cono tangente ai due astri, e supponiamo fatta in questo la sezione MNO perpendicolare all'ecclittica, che nella figura è rappresentata dalla retta SO; vi sarà ecclisse di Luna quando essa entrerà nel cono ombroso acO della Terra, ed ecclisse di Sole quando entrerà nel cono luminoso $MacN$. Ma la Luna non potrà entrare nel cono ombroso se la distanza angolare del suo lembo inferiore dal raggio centrale TO non è minore del semidiametro LTl della sezione LQ fatta nello stesso cono alla regione della Luna perpendicolarmente all'asse; e similmente, la Luna non entrerà nel cono luminoso se la distanza angolare del suo lembo dal raggio centrale TS non sarà minore del semidiametro $L'TS$ della sezione del cono luminoso alla regione della Luna. Determiniamo i semidiametri LTO, $L'TS$.

L'angolo esterno MTS del triangolo MTO eguaglia la somma degli angoli aMT, aOT, e quindi,

$$aOT = MTS - aMT.$$

Ora, MTS è il semidiametro del Sole veduto dal centro della Terra, ed aMT può, senza errore, supporsi eguale alla parallasse orizzontale del Sole, la quale a tutto rigore dovrebbe avere il suo vertice al centro di questo astro [§§. 46,99]: indicando dunque il semidiametro con δ, e la parallasse con π, sarà,

$$aOT = \delta - \pi.$$

Ciò posto, è evidente che ciascuno degli angoli $aL'T, aLT$ rappresenta la parallasse orizzontale della Luna, che chiameremo ϖ; e di più l'angolo $L'TS$ è somma degli angoli $aL'T, aOT$, e l'angolo LTO è differenza degli angoli equivalenti aLT, aOT: sostituendo perciò alle quantità geometriche i loro simboli si avrà,

Semidiametro del cono ombroso alla regione della Luna . . . . $\Big\} = LTO = \varpi + \pi - \delta$

Semidiametro del cono luminoso alla regione della Luna . . . . $\Big\} = L'TS = \varpi - \pi + \delta$.

Se ad ognuno di questi angoli aggiungeremo il semidiametro Δ della Luna, avremo le distanze angolari del centro di questo astro dall'asse del cono *STO*, oltrepassate le quali non potrà più verificarsi ecclisse di Luna o di Sole; e questi limiti saranno,

Limite per gli ecclissi di Luna $= rTO = \varpi + \pi - \delta + \Delta$
Limite per gli ecclissi di Sole $= iTS = \varpi - \pi + \delta + \Delta$.

È chiaro poi che se le distanze angolari del centro della Luna dall'asse del cono saranno eguali alle precedenti, vi sarà un semplice contatto, e se saranno minori vi sarà ecclisse.

*§. 116. Nel determinare i limiti degli ecclissi noi abbiamo supposto che la sezione *MNO* del cono tangente (*fig.* 27) rappresentasse il piano perpendicolare all'ecclittica condotto per i centri del Sole e della Terra, cioè il piano del cerchio di latitudine sul quale si trova la Luna nella congiunzione o nell'opposizione. Per conseguenza le distanze angolari assegnate per limiti sarebbero le latitudini della Luna nel novilunio o nel plenilunio; e tali possono supporsi con molta approssimazione, quantunque a tutto rigore le latitudini non debbano confondersi con le distanze. Imperocchè, dinotando con *LOK* [*fig.* 28], la sezione fatta nel cono tangente alla regione della Luna perpendicolarmente all'asse, con *NE* il piano dell'ecclittica e con *NH* quello dell'orbita lunare si vede che la Luna, dopo esser passata pel nodo *N*, perviene alla minima distanza dall'asse del cono nel punto r', prima di giungere in congiunzione o in opposizione col Sole nel punto r. Laonde, se la Luna toccasse il cono tangente quando il suo centro è nel punto r, avrebbe già dovuto immergersi alcun poco nel cono allorchè aveva il suo centro nel punto r'. I limiti rTO, iTS determinati di sopra [*fig.* 27] nell'ipotesi che la Luna passasse col suo lembo a contatto del cono tangente non rappresentano dunque le latitudini rl della Luna nelle sizigie, ma le minime distanze $r'l$ della figura 28; e poichè dal triangolo rettangolo rlr' si ha, $rl = \frac{r'l}{\cos r'lr}$, si potrebbero ottenere le latitudini dividendo gli anzidetti limiti per il coseno dell'angolo $r'lr$, o sia pel coseno dell'angolo *N*, che è l'obliquità dell'orbita lunare. Dalla piccolezza di quest'angolo risulta però evidente che la latitudine rl [*fig.* 28] differisce pochissimo dalla minima distanza $r'l$, onde ***si potranno prendere per limiti le latitudini nelle sizigie, assegnando ad esse i valori determinati di sopra;*** la quale approssimazione, renderà soltanto più sicuri gli ecclissi ne' casi in cui si verificano latitudini più piccole di quelle espresse dalle formole, $\varpi + \pi - \delta + \Delta$, $\varpi - \pi + \delta + \Delta$.

*§. 117. I valori numerici delle quantità $\varpi, \pi, \delta, \Delta$ sono nel medio, $\varpi = 57'.36''$, $\pi = 8''.6$, $\delta = 16'.0''.9$, $\Delta = 15'.43''.3$; e quindi si avrà,

Semidiametro del cono ombroso $LTO = \varpi + \pi - \delta = 41'.44''$
Semidiametro del cono luminoso $L'TS = \varpi - \pi + \delta = 73'.28''$.

Ma, riguardo ai limiti degli ecclissi, volendo conoscere i loro massimi valori, si farà,

$$\varpi + \pi - \delta + \Delta = 61'.24'' + 8'',6 - 15'.45'',5 + 16'.45'',5 = 62'.33''$$
$$\varpi - \pi + \delta + \Delta = 61'.24'' - 8'',6 + 16'.17'',8 + 16'.45'',5 = 94'.19''$$

e però si potrà stabilire che;

Limite maggiore della latitudine della Luna negli ecclissi lunari . . . . $= 1^\circ\ 2'.33''$

Limite maggiore della latitudine della Luna negli ecclissi solari . . . . $= 1^\circ.34'.19''$.

§. 118. Il limite degli ecclissi di Sole essendo maggiore di quello degli ecclissi di Luna, i primi accadono in generale per tutta la Terra più frequentemente de' secondi. Non così per un dato luogo, essendo al contrario più frequenti in esso gli ecclissi di Luna che quelli di Sole; e ciò per la differente natura de' due fenomeni. La Luna è un corpo opaco illuminato dal Sole, e quando entra nel cono ombroso della Terra, perde realmente la sua luce, onde l'ecclisse è veduto contemporaneamente da tutti gli abitanti dell'emisfero terrestre rivolto alla Luna, come accaderebbe di una fiaccola che si spegnesse istantaneamente in un punto sublime dello spazio. Il Sole, all'opposto, ha una luce propria, e quando comparisce ecclissato, la sua luce non si spegne ma è nascosta dalla Luna che s'interpone fra esso e la Terra. Allora la Luna, per la sua piccolezza e la sua distanza dalla Terra, fa in certo modo l'effetto delle nuvole, che nascondono la vista del Sole ad un osservatore, e la lasciano libera ad un altro poco da quello lontano. Per questa ragione gli ecclissi di Sole presentano sempre diverse fasi per i diversi luoghi della Terra, e possono esser totali per un paese, e non accadere affatto per un altro; il che apparisce anche chiaramente dalla *fig.* 27, la quale rende manifesto come un osservatore x possa vedere la Luna l' projettata interamente sul Sole, ed un altro osservatore n non avere affatto ecclisse. Quando si annunzia dunque un ecclisse di Sole, s'intende che esso accade per alcuni luoghi della Terra e per altri no, quantunque rivolti all'astro durante il fenomeno, ed è improprio il dire che per questi ultimi l'*ecclisse è invisibile*, siccome si legge spesso ne' calendarii, perchè l'ecclisse realmente *non accade*.

§. 119. Abbiamo veduto che il diametro apparente della Luna è variabile e può divenire maggiore e minore del diametro apparente del Sole. È chiaro perciò che un ecclisse di Sole può esser *totale* o *anulare*; sarà totale quando il diametro apparente della Luna è maggiore di quello del Sole e lo ricopre interamente,

ed anulare allorchè, essendo minore del diametro del Sole, ne lascia scoperto un anello luminoso. L'uno o l'altro di questi stupendi fenomeni si verifica, quando vi è ecclisse di Sole, per tutti i luoghi compresi in una lunga e stretta zona della superficie terrestre sottoposta al cammino dell'ombra lunare; e negli altri paesi si ha un ecclisse *parziale*, o non si ha ecclisse.

L'ecclisse di Luna non può essere che *parziale* o *totale*, perchè il diametro del cono ombroso alla regione della Luna è sempre, come si è veduto, molto maggiore del diametro della Luna.

§. 120. Gli ecclissi di Luna differiscono ancora da quelli di Sole per un'altra notabile particolarità. Il cono ombroso acO della Terra [*fig.* 27.] è circondato da un cono di *penombra* $N'mnM'$ limitato dalle tangenti interne MM', NN', condotte al Sole ed alla Terra; cioè negli spazi $N'mO$, $M'nO$ la luce non è egualmente distribuita ma va gradatamente diminuendo dai lati esterni mN' nM' sino ai lati aO, cO del cono ombroso. Infatti, è evidente che al punto h, dello spazio limitato dal cono di penombra OnM', non giungono i raggi di luce emanati dalla parte Mg del disco solare, ma soltanto quelli emanati dalla parte Ng, ed è chiaro ancora che una maggiore quantità di luce perviene ai punti più vicini del punto h al lato esterno del cono di penombra ed una minore ai punti più prossimi al lato cO del cono ombroso. Ora, la Luna prima di entrare nel cono ombroso, deve passare per la penombra $N'mO$, dove i punti del suo disco più vicini all'ombra terrestre perdono gradatamente la loro luce, per modo che non si può avvertire con precisione l'istante in cui rimangono ecclissati, vale a dire in cui entrano definitivamente nell'ombra. Questa incertezza nel valutare il tempo del principio e della fine di un ecclisse lunare, non si verifica per gli ecclissi di Sole, ne' quali la Luna non toglie la luce al Sole, ma la nasconde agli abitanti della Terra.

§. 121. Gli antichi astronomi adoperavano un modo semplice, quantunque non molto esatto, per predire gli ecclissi. Supponendo che il Sole e la Luna si trovino insieme nel nodo lunare ad una data epoca, dopo 223 lunazioni, o sia dopo 18 anni e 10 giorni circa la Luna vi ritornerà, ed il Sole ancora, con una piccola differenza; e siccome il ritorno del Sole e della Luna alla stessa posizione rispetto al nodo, riconduce le stesse apparenze negli ecclissi, così nell'indicato periodo di tempo questi fenomeni rivengono nel medesimo ordine di prima. Non è difficile mostrare come dopo 223 lunazioni il Sole e la Luna ritornino, presso a poco, alla stessa posizione rispetto al nodo.

*Il moto medio diurno del Sole è di $59'.8''33$, ed il moto diurno retrogrado del nodo è di $3'.10'',64$; dunque il Sole si allontana giornalmente dal nodo per $59'.8'',33+3'.10'',64=3739''$. E

poichè il Sole ritorna al nodo dopo aver descritto un angolo di 360° rispetto a questo punto, il numero di giorni in cui compie siffatta rivoluzione si otterrà dividendo 360° (o siano 1296000″) per 3739″, e risulterà 346g,62, il quale periodo si chiama ancora *rivoluzione sinodica del nodo*. Moltiplicando 346g,62 per 19 e la rivoluzione sinodica della Luna per 223 si ottengono i prodotti 6585g,78 e 6585g,32 che differiscono soltanto di 0g,46 = 11or. Laonde, se in un dato istante partono il Sole e la Luna dal nodo lunare, dopo 223 lunazioni o siano 18 anni e 10 giorni circa, ritornano al nodo con la sola differenza di 11 ore. Ma questo errore moltiplicandosi col volgere di molti periodi di 223 lunazioni, cambia a lungo andare l'ordine degli ecclissi osservati durante uno di essi, al che concorrono ancora le ineguaglianze dei movimenti del Sole e della Luna, delle quali non si è tenuto conto nel calcolo precedente, fondato su i moti medii. Per la qual cosa gli astronomi moderni calcolano gli ecclissi per mezzo delle tavole astronomiche, e si servono del periodo delle 223 lunazioni trovato dagli antichi soltanto come una prima approssimazione.*

§. 122. Oltre agli ecclissi di Sole e di Luna, il moto proprio di quest'ultima dà origine ad una terza specie di ecclissi, cioè a quelli delle stelle fisse. Nel suo giro intorno alla Terra la Luna nasconde ad ogni istante alla nostra vista le stelle che incontra sul suo passaggio; e questo fenomeno al quale si dà il nome di *occultazione delle stelle fisse dietro la Luna*, è della stessa natura degli ecclissi di Sole, poichè le stelle non perdono la loro luce, e quindi l'occultazione non accade per tutti gli osservatori dell'emisfero terrestre rivolto alla Luna, ma soltanto per quelli la cui posizione è tale che la visuale da essi diretta alla stella passa per la Luna. Le occultazioni delle stelle hanno provato che la Luna, o non ha atmosfera o ne ha una tenuissima, perchè i raggi luminosi che emanano dalle stelle non si son veduti deviare sensibilmente nell'attraversare l'atmosfera lunare. Il ch. astronomo *Santini*, richiamando molti fatti, e discutendoli con sana critica, opina che la refrazione orizzontale della Luna non possa oltrepassare 2″,5, e quindi che la densità dell'atmosfera lunare sia $\frac{1}{800}$ di quella dell'atmosfera terrestre. Il celebre *Arago*, in una sua classica scrittura sull'ultimo ecclisse totale di Sole, inserita nell'*Annuaire du Bureau des longitudes* per l'anno 1846, esamina ancora se il passaggio della Luna sul disco solare in quella occasione aveva dato qualche argomento in favore dell'esistenza dell'atmosfera lunare, e conchiude negativamente. Ciò basta per poter affermare con sicurezza che alla superficie della Luna non potrebbero aver vita creature la cui costituzione fisica fosse simile a quella dell'uomo.

Delle maree.

§. 123. L'attrazione che il Sole e la Luna esercitano sulla Terra è minore rispetto al centro di essa che rispetto ai punti della superficie rivolti all'astro, per essere questi più vicini al corpo attraente. Le acque del mare potendo, per la mobilità del fluido, ubbidire a quell'attrazione preponderante, si elevano verso l'astro sotto forma di una protuberauza, ed il contrario accade nella regione terrestre diametralmente opposta, perchè ivi le acque souo meno attratte del centro e rimangono indietro; cosicchè, da una parte le acque si elevano accostandosi all'astro più del centro della Terra, e dall'altra il centro si accosta all'astro più delle acque posteriori, le quali hanno la libertà di rimanere indietro del centro, perchè non sono ad esso unite in sistema rigido. L'elevazione delle acque del mare, o sia il loro allontanamento dal centro, nella direzione dell'astro ed in direzione opposta deve produrre un abbassamento nelle acque poste in direzione perpendicolare, a scapito delle quali è alimentato il *flusso;* laonde tutto il fluido, che ricopre per due terze parti la superficie terrestre, prende la forma di uno sferoide lungo di cui l'asse maggiore è nella direzione della retta che unisce il centro della Terra col centro dell'astro, e l'asse minore è nella direzione perpendicolare. La rotazione terrestre riconduce poi ogni punto della superficie del mare due volte in 24 ore nella direzione dell'astro, e due volte nella direzione perpendicolare, onde ogni luogo di mare ha iu 24 ore due *alte* e due *basse maree*. Se gli effetti delle attrazioni del Sole e della Luna potessero essere indipendenti uno dall'altro, ciascuno de'due astri produrrebbe per un dato luogo quattro maree cioè due *flussi* e due *riflussi*, ma le azioni della Luna e del Sole sono simultanee, e si compongono in modo da produrre un effetto misto, come se derivasse da una sola causa. Nel novilunio e nel plenilunio il Sole e la Luna agiscono quasi nella medesima direzione, onde le maree, lunare e solare, si sommano; il contrario accade nelle quadrature, perchè l'alta marea lunare per uno stesso luogo è contemporanea alla bassa solare e viceversa, onde la marea totale o effettiva, risulta dalla differenza delle parziali. In ogni altra posizione del Sole e della Luna la marea di uno de' due astri teude ad accrescere o a diminuire variamente quella dell'altro, secondo la posizione che prende la risultante delle due forze agenti sulla massa fluida.

Le distanze rettilinee del Sole e della Luna dalla Terra e le angolari dall'equatore, modificano anche la quantità delle maree. Quando il Sole e la Luua sono nell'equatore celeste la loro azione è più energica su i grandi oceani disposti intorno all'equatore terrestre; e sono anche maggiori, come è chiaro, le maree,

quando gli astri sono alla loro minima distanza dalla Terra. La concorrenza della maggior parte delle condizioni favorevoli o sfavorevoli all' accrescimento delle maree, fa che esse siano *massime negli equinozi quando la Luna è perigea e sull' equatore*, e *minime ne' solstizi se la Luna è apogea ed ha una grande declinazione*.

§. 124. Quantunque la massa del Sole sia immensamente maggiore di quella della Luna, nondimeno, per trovarsi questa assai più vicina alla Terra ha un' azione prevalente nelle maree. Per la qual cosa, volendo trovare l' ora dell' alta marea in un dato luogo, si prende per base del calcolo l' ora del passaggio della Luna al meridiano del luogo medesimo, o sia l' istante in cui la rotazione terrestre conduce quel meridiano nella direzione dell' astro: all' ora del passaggio della Luna si aggiunge una correzione positiva o negativa dipendente dalla posizione del Sole, e dalla distanza della Luna dalla Terra, e si aggiungono ancora altre due quantità positive, cioè due ritardamenti, il primo dei quali è costante per ogni luogo dell' Europa, ed il secondo è diverso per ciascun luogo, ma invariabile nel luogo stesso. Ogni marea si verifica per esperienza 36 ore dopo che il Sole e la Luna si sono trovati nelle condizioni necessarie a produrla, e di questo fatto non si è dato ancora una sicura spiegazione; la disposizione delle coste, e le condizioni particolari di un dato luogo producono poi l' altro ritardamento, conosciuto sotto il nome di *stabilimento del porto*. Si è costrutta una tavola per calcolare le maree, servendosi delle formole di *Domenico Bernoulli*, meno esatte ma più semplici di quelle di *Laplace;* e con l'ajuto di essa l' ora dell' alta marea si ottiene aggiungendo all' ora del passaggio della Luna al meridiano due quantità, cioè la correzione della tavola (che comprende il ritardamento costante di 36 ore), e *lo stabilimento del* porto, il quale (secondo il modo di costruzione della tavola) *equivale all'ora dell'alta marea nelle sizigie quando la Luna è alla sua distanza media dalla Terra* (*).

Finalmente le alte e le basse maree si riferiscono ad una superficie di livello costante e propriamente a quella che si verificherebbe per le acque del mare senza l' attrazione luni-solare. Questo livello costante è *medio* fra le alte e le basse maree equinoziali, e si prende per *zero* della scala delle altezze dei punti geodetici.

§. 125. L' attrazione del Sole e della Luna deve produrre sull' atmosfera terrestre un effetto simile a quello delle maree. Come ne rimangano modificati i venti, e quale potere abbia un

(*) Si vegga, per maggiori particolari, *l' Astronomie pratique* di *Francoeur*.

tale movimento dell' atmosfera sul buono o sul cattivo tempo, non è facile determinarlo, quantunque non si possa rivocare in dubbio il fenomeno.

È comune opinione che anche le fasi della Luna influiscano su i cambiamenti di tempo, non meno che su i prodotti dell' agricoltura, e sulla economia animale. La maggior parte de' dotti hanno considerata questa opinione come un pregiudizio volgare, e specialmente l' illustre sig. *Arago* l' ha combattuta con forza nelle sue memorie. Ma da qualche tempo i fisici sono più circospetti in negare od ammettere l' *influsso* lunare, di antichissima origine. Le esperienze da' signori *Schübler* e *Pilgram* fatte a *Vienna* sembrano provare che i giorni di pioggia sono più frequenti durante il periodo della luna crescente che nel tempo della luna mancante, essendo massimo il numero de' giorni piovosi tra mezzo al primo quarto ed alla luna piena, e minimo fra il secondo quarto e la luna nuova; e di più, i giorni di pioggia sarebbero in maggior numero quando la Luna è più vicina alla Terra. Questi risultamenti, non ancora assicurati da un numero sufficiente di osservazioni, sembrano favorire l' influenza della Luna e delle sue fasi sulle variazioni atmosferiche, e nondimeno contrariano evidentemente la regola ammessa generalmente, che *il tempo buono o cattivo col quale incomincia un quarto della Luna continua per tutto il quarto.* Un siffatto canone, che si dice frutto dell' *esperienza*, è esteso da molti all' intera lunazione, e suole ancora attribuirsi alle lune di Marzo e di Settembre, una grande autorità sul buono o sul cattivo tempo di tutto l' anno. Ma l' *esperienza*, invocata tanto facilmente dal volgo, non è larga del suo favore se non a pochi uomini privilegiati, che sanno valersene opportunamente per iscuoprire i segreti della natura; ed il suo nome serve in vece assai spesso a perpetuare gli errori.

CAPO OTTAVO

Delle posizioni medie ed apparenti delle stelle fisse.

Della precessione e della nutazione.

§. 126. Se la Terra fosse sferica, l' attrazione del Sole su tutti i suoi punti potrebbe considerarsi ridotta ad una forza unica agente sul centro, nel quale si potrebbe supporre concentrata tutta la massa terrestre. Ma la Terra essendo sferoidica, se immaginiamo iscritta in essa una sfera, il solido terrestre sarà formato

di questa sfera e di un menisco che la involge, la cui spessezza va gradatamente aumentando da' poli sino all'equatore dove diviene massima. La sfera, sottoposta all' attrazione del Sole, si può considerare ristretta in un punto, ed il menisco si può assomigliare ad un anello giacente nel piano dell'equatore, e del quale ogni punto sarebbe attratto con egual forza se l' azione del Sole si esercitasse nel medesimo piano equatoriale. L' attrazione solare in questa ipotesi non farebbe che ritenere la Terra nella sua orbita, senza produrre alcuna alterazione nella posizione dell' equatore terrestre. Ma l' attrazione del Sole si esercita parallelamente all' ecclittica, e però in una direzione obliqua al piano dell' anello, di cui una metà rimane al di sopra e l' altra al di sotto dell' ecclittica, o sia del piano di attrazione. L' azione del Sole tende dunque realmente ad abbassare l' anello sul piano dell' ecclittica facendolo girare intorno alla sua comune sezione con quel piano; e questo effetto si verificherebbe se la Terra non girasse contemporaneamente intorno al proprio asse, perpendicolare all' equatore, o sia al piano dell'anello. La rotazione terrestre combinata con l' attrazione solare cambia la natura del fenomeno, per modo che l' angolo che l' anello equatoriale fa con l' ecclittica, o sia l'obliquità dell'ecclittica, rimane costante, ed in vece la comune sezione dell' equatore e dell' ecclittica, cioè la linea degli equinozi acquista un lento modo retrogrado; in che consiste il moto di *precessione* di cui abbiamo già parlato. *D'Alembert,* al quale si deve la soluzione analitica del problema della precessione, non avendo da principio considerato il moto di rotazione della Terra, fu condotto a risultamenti affatto contrarii alle esperienze degli astronomi.

§. 127. La Luna contribuisce anche al fenomeno della precessione, e non farebbe che aggiungere all' azione del Sole se si movesse nel piano dell' ecclittica; ma siccome la Luna non si trova se non per un istante in quel piano, quando passa per il nodo, così essa genera di più una piccola variazione nell' inclinazione dell' equatore sull' ecclittica, smuovendo il piano dell'equatore. Questa variazione è periodica, e riprende gli stessi valori dopo una intera rivoluzione de' nodi lunari, perchè dipende dalla distanza della Luna dall' equatore terrestre, la quale cambia continuamente al cambiar di posizione della linea de' nodi; il periodo della indicata variazione è perciò di 18 anni e mezzo circa. L' asse della Terra, che segue esattamente i movimenti dell' equatore terrestre cui è perpendicolare, ha dunque un piccolo movimento oscillatorio, al quale *Bradley* diede il nome di *nutazione.* Il Sole produce anche un effetto simile, comunque debolissimo, e ciò deriva dal trovarsi esso nel corso di un anno a distanze sempre diverse, sebbene poco differenti, dall' equatore terrestre. Il periodo della *nutazione solare* è di un anno, nel qual tempo la Terra ritorna alla stessa posizione rispetto al Sole.

§. 128. I due fenomeni della precessione e della nutazione lunare possono essere rappresentati da un duplice movimento dell'asse terrestre nel modo seguente. Immaginiamo essere ♈♋p♎♑ la volta celeste cosparsa di stelle (*fig.* 29), ed al centro T di essa si trovi la Terra; siano ♋♑ l'ecclittica, EQ l'equatore celeste, e p, P i rispettivi loro poli. L'asse terrestre TP non è immobile, ma descrive una superficie conica che ha per base il cerchio minore PAR della sfera celeste parallelo all'ecclittica. Questo movimento dell'asse terrestre induce un moto simile nella linea ♈♎ degli equinozi, alla quale l'asse deve rimanere sempre perpendicolare; per la qual cosa quando il polo dell'equatore da P passa in P', la linea degli equinozi da ♈♎ passa in ♈'♎', descrivendo in ciascun anno un archetto ♈♈' di $50''\frac{1}{4}$, contro l'ordine de'segni (§. 27). L'angolo PTp rimane costante nel giro dell'asse terrestre, onde non si altera per tal movimento l'obliquità dell'ecclittica, siccome si è accennato di sopra (§. 126). Le stelle, allontanandosi da esse il punto equinoziale, sembrano descrivere con moto lentissimo da occidente in oriente tanti cerchi paralleli all'ecclittica, e quelle, come le A, A', che si trovano dalla stessa parte dell'equinozio ♈ rispetto al coluro de' solstizi ♋p♑, sembrano avvicinarsi continuamente al polo P, il quale va loro incontro, laddove le altre dell'emisfero in cui si trova il punto ♎, continuamente se ne allontanano. In forza di questa rotazione della sfera celeste, le stelle vanno col volgere de' secoli ad occupare diverse regioni del cielo, quando le loro posizioni si riferiscono a cerchi o a linee immobili in apparenza, quali sono l'ecclittica, l'equatore, la linea equinoziale ed i coluri; ma realmente le stelle rimangono fisse nel cielo, e quelle linee e quei cerchi formano un sistema invariabile, che gira lentamente intorno all'asse Tp da ♈ verso ♑. Considerando le posizioni delle stelle rispetto all'ecclittica, il moto di precessione accresce continuamente le loro longitudini, lasciando costanti le latitudini; e rispetto all'equatore, le ascensioni rette crescono ancora, ma variamente per le diverse stelle, e le declinazioni crescono o diminuiscono nel modo poc' anzi accennato. La stella attualmente detta *polare* si va accostando sempre più al polo, dal quale verso il 2095 non sarà lontana più di $26'\frac{1}{2}$; da allora in poi comincerà ad allontanarsene, ed in vece fra 12000 anni la *Lira*, che è una delle più belle stelle del cielo, sarà divenuta *polare*, perchè non disterà dal polo più di 5°. Il periodo in cui una stella qualunque apparentemente, e la linea degli equinozi realmente compiono il giro del cielo è di 25800 anni circa, poichè l'arco retrogrado di $50''\frac{1}{4}$ che l'equinozio descrive in un anno è la 25800^{esima} parte di 360°.

Il polo dell'equatore non segue però nel suo giro precisamente la circonferenza PR del cerchio di precessione, ma oscilla intorno alla medesima, descrivendo delle piccole ellissi $\pi\pi'$, per ef-

fetto della *nutazione* lunare. Il semiasse maggiore πP di ciascuna ellisse forma parte della circonferenza di un cerchio di latitudine, e sottende un angolo al centro T di 9'',25; ed il semiasse minore è perpendicolare al primo e sottende un angolo di 6'',9. Questo secondo movimento dell'asse terrestre altera l'obliquità dell'ecclittica, la quale cresce o diminuisce di 9'',25 secondo che il polo si trova in π o in π', e ritorna al suo valor medio quando il polo P riviene sul cerchio di precessione. Il giro dell'ellisse si compie dal polo nel periodo di 18 anni e mezzo, come si è detto di sopra.

Qui si potrebbe dire che, per effetto della precessione e della nutazione, l'asse terrestre non si mantiene parallelo a se stesso nel giro della Terra intorno al Sole, e però non regge la spiegazione delle stagioni data nel CAPO SESTO; ma è evidente che un errore di parallelismo di soli 50'' in tutto l'anno è così piccolo, che non può alterare menomamente la successione delle stagioni.

I movimenti dell'asse terrestre ora descritti mutano la posizione de' poli celesti rispetto alle stelle, ma non già quella de'poli terrestri sulla superficie della Terra. *Poisson* ha dimostrato che *la posizione dell'asse di rotazione della Terra è invariabile* rispetto al solido che intorno ad esso si aggira, onde le latitudini geografiche non soffriranno alcun cangiamento col volgere de' secoli; e di più *il moto di rotazione si manterrà sempre uniforme*.

§. 129. La precessione e la nutazione, avendo origine dall'attrazione del Sole e della Luna sul menisco terrestre [§§. 126, 127], accennano ad un'azione reciproca di questo menisco su gli stessi due astri [§. 85]. *Mayer* aveva già avvertita una piccola disuguaglianza nel moto della Luna dipendente dalla longitudine del nodo, e più tardi *Laplace* riconobbe essere essa l'effetto della sferoidicità della Terra. Il valore di questa ineguaglianza determinato con accurate osservazioni da *Burckhardt* ha servito a valutare lo schiacciamento terrestre; il quale, ottenuto con questo mezzo, risulta di $\frac{1}{305}$, ed è meno affetto dalle irregolarità di figura della Terra di quello dedotto direttamente dalle misure geodetiche.

§. 130. La precessione e la nutazione non alterano la posizione dell'ecclittica, ma l'attrazione de' pianeti sulla Terra rende variabile anche questo piano di paragone, ed abbiamo veduto che l'angolo che esso fa con l'equatore soffre attualmente una diminuzione secolare di 48'' (§. 24). Tutti questi fenomeni e quello ancora dell'*aberrazione* della luce di cui abbiamo parlato nel §. 90, concorrono a far variare la posizione delle stelle fisse da un'epoca ad un'altra non molto lontana; ma gli astronomi hanno distinti i movimenti lenti e continui dai periodici, ed hanno chiamate *posizioni medie* delle stelle, quelle corrette del moto di precessione, e della variazione secolare dell'obliquità dell'ecclittica, e *posizioni apparenti* quelle alle quali si applicano, oltre delle precedenti, anche le correzioni della nutazione e dell'aberrazione.

Delle posizioni medie delle stelle fisse.

§. 131. Siano ga, gf l'ecclittica e l'equatore [*fig.* 30] ad una data epoca, per esempio al principio dell'anno 1750 divenuto celebre per l'esattezza introdotta nelle osservazioni astronomiche da *La Caille* e *Bradley*; sarà g l'equinozio di primavera ed ε l'obliquità dell'ecclittica. Dopo un tempo t, retrogradando il punto equinoziale, l'equatore prende la nuova posizione hm, e se l'ecclittica fosse immobile, la precessione sarebbe rappresentata dall'arco hg; ma per l'attrazione de' pianeti l'ecclittica ancora si abbassa in qb, onde il punto equinoziale, intersezione della *seconda* posizione dell'ecclittica con la *seconda* posizione dell'equatore, diviene Υ. Riportando il punto g dalla *prima* sulla *seconda* ecclittica, con fare l'arco $qg = qn$, è chiaro che l'effettiva retrogradazione del punto equinoziale sarà indicata dall'arco Υn: gli astronomi chiamano l'arco gh *precessione luni-solare*, e l'arco Υn *precessione generale*, ed indicano queste due quantità con ψ, e $\downarrow$. L'angolo ε' che il secondo equatore fa con la prima ecclittica è sensibilmente eguale ad ε, poichè la loro differenza diviene apprezzabile solo nel corso di più secoli, e lo stesso deve dirsi della latitudine delle stelle, che può anche considerarsi costante nel medesimo periodo di tempo. Al contrario, l'angolo Ω che il secondo equatore fa con la seconda ecclittica, è la nuova obliquità dopo il tempo t, la quale è diversa da ε; le longitudini e le ascensioni rette sono in principio contate dal punto g su i cerchi ga, e gf, e dopo il tempo t si contano da Υ verso b, e verso m.

*§. 132. Il celebre *Bessel*, (di cui l'Astronomia deplora la recente perdita) ha dato le formole numeriche più riputate per calcolare le lente variazioni delle quantità qui sopra considerate, desumendole dalla teoria di *Laplace* e dal confronto delle osservazioni di *Bradley* con quelle più recenti di *Piazzi* e di altri diligentissimi astronomi. Indicando con t un numero di anni decorsi dopo il 1750 si ha;

Obliquità dell'ecclittica nel 1750

$$\varepsilon = 23^{\circ}.28'.18'',0$$

(O)...

Obliquità dopo il tempo t sull'ecclittica fissa

$$\varepsilon' = \varepsilon + 0,0000098 4233 . t^2$$

Obliquità dopo il tempo t sull'ecclittica variata

$$\Omega = \varepsilon - 0'',48368 . t - 0'',0000027 2295 . t^2$$

(B)...

Precessione luni-solare, arco gh

$$\psi = 50'',37572 . t - 0'',0001217945 . t^2$$

Precessione generale, arco Υn

$$\downarrow = 50\ ,21129 . t + 0\ ,0001221483 . t^2$$

Per ottenere da queste formole la precessione *annua* luni-solare o generale, bisogna differenziare i valori di Ψ, ψ rispetto a t, considerando dt eguale ad un anno, e si avrà

$$(B')\dots\left\{\begin{array}{l} d\Psi=50'',37572-0'',0002435890\,.\,t\\ d\psi=50\;\;,21129+0\;\;,0002442966\,.\,t\end{array}\right.$$

Da quì si vede che, quando è necessaria molta esattezza, la precessione annuale non può considerarsi costante, ma le sue variazioni sono lentissime e proporzionali alla prima potenza del tempo. Le equazioni (B') danno immediatamente la precessione annua luni-solare o generale per un'epoca anteriore o posteriore al 1750, assegnando a t un valore determinato; così si avrà la precessione generale per l'anno 1840 facendo $t=90$, e sarà

$$d\psi=50'',21129+0'',02199=50'',23328.$$

Volendo poi stabilire una formola per determinare la precessione per un tempo t posteriore o anteriore al 1840 si farebbe,

$$d\psi=50'',23328+0'',0002442966\,.\,t.$$

*§. 133. Inoltre, prendendo $qp=qh$ [*fig.* 30], sarà $ph=hg=\Psi$, e quindi $p\gamma=\Psi-\gamma n=\Psi-\psi$, e per le formole (B),

$$\text{arco } p\gamma=\Psi-\psi=0'',16443\,.\,t-0,0002439428\,.\,t^2.$$

Questo arco $p\gamma$ è il *moto diretto* del punto equinoziale sull'eclittica, prodotto dall'abbassamento di essa da qa in qb; e dato il valore di $p\gamma$, non sarà difficile dedurne quello dell'arco $h\gamma$ che è il *moto diretto* del punto equinoziale in ascensione retta. Nel triangolo sferico $hq\gamma$ l'angolo $qh\gamma=180^\circ-\varepsilon'$, e l'angolo $q\gamma h=\Omega$; ed indicando con μ il lato $h\gamma$, si avrà per le formole di Nepero,

$$\tan\tfrac{1}{2}(q\gamma-qh)=\tan\tfrac{1}{2}\mu\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(180^\circ-\varepsilon'-\Omega)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(180^\circ-\varepsilon'+\Omega)};$$

da cui, osservando che $q\gamma-qh=p\gamma=\Psi-\psi$, si desume,

$$\tan\tfrac{1}{2}\mu=\tan\tfrac{1}{2}(\Psi-\psi)\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'-\Omega)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'+\Omega)}.$$

Per ottenere in numeri il valore di μ, si dovranno sviluppare in serie le tangenti ed i coseni, al quale effetto rifletteremo che le quantità Ψ,ψ sono estese nelle formole (B) sino alle seconde potenze del tempo, onde per conservare nel valore di μ la stessa approssimazione, basterà porre $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}(\Psi-\psi)$ in vece delle loro tangenti, e sviluppare, per mezzo delle formole (O), il rapporto de' coseni sino alle prime potenze del tempo, perchè quel rapporto è moltiplicato per $\frac{1}{2}(\Psi-\psi)$ in cui il tempo è già fattore: il calcolo procederà come segue.

Dalle formole *(O)* si desume,

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon'+\Omega)=\varepsilon-0'',24184\,.\,t+0,000003356969\,.\,t^2$$
$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon'-\Omega)=\quad 0'',24184\,.\,t+0,00000628264\,.\,t^2,$$

e sviluppando i coseni di tali archi sino alle prime potenze di t, si ha

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'-\Omega)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'+\Omega)}=\frac{1}{\cos\varepsilon+0'',24184\,.\,t\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}$$
$$=\frac{1}{\cos\varepsilon}\left(1+0'',24184\,.\,t\tan\varepsilon\right)^{-1}$$
$$=\frac{1}{\cos\varepsilon}\left(1-0'',24184\,.\,t\tan\varepsilon\right)$$

Per conseguenza,

$$\mu=\frac{\Psi-\downarrow}{\cos\varepsilon}\left(1-0,24184\,.\,t\tan\varepsilon\right);$$

dalla quale formola, sostituendo a $\Psi-\downarrow$ l'espressione trovata di sopra, e ristabilendo l'omogeneità [I. §. 54], si ottiene

$$\mu=\frac{1}{\cos\varepsilon}\left\{\begin{array}{l}0'',16443\,.\,t-0'',0002439428\,.\,t^2\\ \qquad-\dfrac{(0'',24184)(0'',16443)}{R''}\tan\varepsilon\,.\,t^2\end{array}\right\}.$$

Eseguito il calcolo numerico con fare $\varepsilon=23^\circ.28'.18''$, qual era nel 1750, si ha finalmente,

$$\mu=0'',17926\,.\,t-0'',0002660394\,.\,t^2$$

È questo il risultamento di Bessel, ed egli, compiendo la risoluzione del triangolo $qh\Upsilon$, ha trovato ancora

Angolo q *delle due ecclittiche* $=0'',48892\,.\,t-0'',0000030719\,.\,t^2$
Arco qh . . . . $=171^\circ.36'.10''-5'',21\,.\,t$

La variazione annuale dell'arco μ si otterrà differenziando il suo valore rispetto a t, e sarà

$$(b)\ldots\ldots\ldots\ d\mu=0'',17926-0'',0005320788\,.\,t$$

*§. 134. Ciò premesso, passiamo a determinare le variazioni delle ascensioni rette e delle declinazioni degli astri, o siano le precessioni in *AR* ed in declinazione. Abbiamo già trovato nel §. 42 le variazioni di ascensione retta e di declinazione così espresse,

$$d\alpha=dl\{\cos\varepsilon+\mathrm{sen}\,\varepsilon\tan\delta\,\mathrm{sen}\,\alpha\}$$
$$d\delta=dl\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\cos\alpha;$$

nelle quali formole dl rappresenta la precessione luni-solare, perchè la differenziazione è stata eseguita supponendo costante l' obliquità dell' ecclittica, e la latitudine λ. Il punto equinoziale si è supposto dunque trasportato da g in h sull'ecclittica fissa [*fig.*30], e dovendo in vece considerarsi in Υ, ne segue che l' ascensione retta α deve essere diminuita di $h\Upsilon = \mu$, onde alla sua variazione $d\alpha$ considerata in un anno, dovrà applicarsi la correzione $-d\mu$. La variazione annuale della declinazione non è alterata sensibilmente dal movimento dell' ecclittica, e però, ponendo $d\Psi$ in luogo di dl, le formole di precessione in AR ed in declinazione, sufficientemente esatte per qualunque uso, anche il più delicato, sono

$$d\alpha = d\Psi \cos\varepsilon - d\mu + d\Psi \operatorname{sen}\varepsilon \,.\, \tan\delta \operatorname{sen}\alpha$$
$$d\delta = d\Psi \operatorname{sen}\varepsilon \,.\, \cos\alpha$$

Si facciano, $d\Psi\cos\varepsilon - d\mu = m$, $d\Psi \operatorname{sen}\varepsilon = n$, e si avrà,

$$(P)\ldots \begin{cases} d\alpha = m + n \tan\delta \operatorname{sen}\alpha \\ d\delta = n\cos\alpha \end{cases}$$

I coefficienti m,n sono costanti per le diverse stelle ma variabili col tempo, quantunque rimangano sensibilmente gli stessi per 20 o 30 anni; essi sono denominati *le costanti della precessione*. I loro valori per il 1750 si possono dedurre dalle formole (B'), (b), facendo $\varepsilon = 23^\circ.28'.18''$. Eseguito il calcolo, si trovano le formole date da Bessel,

$$(p)\ldots \begin{cases} m = 46'',02824 + 0'',0003086450\,.\,t \\ n = 20'',06442 - 0\ \ ,0000970204\,.\,t \end{cases}$$

Questi valori si riferiscono al 1750, ma osservando che le loro variazioni annuali sono,

$$dm = 0'',000308645\,,\ dn = -0'',000097020,$$

sarà facile riferirli a qualunque altra epoca. Così per l'anno 1830, ai primi termini delle espressioni di m,n si dovranno aggiungere rispettivamente, $dm\,.\,80 = 0'',0246916$, $dn\,.\,80 = 0'',0077616$, e si avrà,

$$m = 46'',0529316 + 0'',0003086450\,.\,t$$
$$n = 20\ \ ,0566584 - 0'',0000970204\,.\,t,$$

che sono le determinazioni adottate dall' *Almanacco nautico* di Londra per quell' anno (*).

Nel LIBRO III applicheremo le formole (P), (p) al calcolo delle *posizioni medie* delle stelle; le quali, come si è detto di sopra, si contano dal punto Υ, la cui posizione è affetta soltanto dal moto di precessione e dalla diminuzione secolare dell' obliquità dell' ecclittica. Il punto Υ si chiama perciò *equinozio medio*, e l' angolo Ω dicesi *obliquità media dell' ecclittica.*

(*) Veggasi l' *Almanacco nautico* pel 1834 pag. 367.

Delle posizioni apparenti delle stelle fisse.

§. 135. Applicando alle posizioni *medie* delle stelle le correzioni periodiche della nutazione e dell'aberrazione, si ottengono le posizioni *apparenti*, o siano quelle che risultano dalle osservazioni astronomiche.

La nutazione fa variare leggermente l'obliquità dell'ecclittica ed il luogo del punto equinoziale; l'obliquità e l'equinozio così modificati prendono il nome di *obliquità apparente*, e di *equinozio apparente*.

*§. 136. Nella sua insigne opera *Astronomiae fundamenta* Bessel ha dimostrato che, indicando con ☉ la longitudine del Sole, con ☾ quella della Luna, e con ☊ la longitudine del nodo ascendente lunare, la formola di meccanica celeste che determina la *nutazione di obliquità* si riduce alla seguente,

$$(1)..\Delta\varepsilon = (9'',64800 \cos ☊ - 0'',09423 \cos 2 ☊ + 0'',09390 \cos 2 ☾)(1+z) + (0'',49333 - 1'',24520 . z) \cos 2 ☉;$$

dove z dinota un numero da determinarsi per mezzo dell'osservazione.

Gli astronomi non sono perfettamente di accordo sul valore del principale coefficiente $9'',648(1+z)$; *Bradley* lo trovò $9'',0$; *Laplace*, $9'',40$; *Lindenau*, $8'',977$; ed in fine il Dottor *Brinckley*, $9'',25$. L'Almanacco nautico di Londra, di cui noi ci serviamo a preferenza ne' calcoli astronomici, ha adottato quest'ultimo, dal quale risulta $z = -0,041252$; e quindi la formola (1) rimane così modificata,

$$(2).....\Delta\varepsilon = 9'',25000 \cos ☊ - 0'',0903 \cos 2 ☊ + 0'',0900 \cos 2 ☾ + 0'',5447 \cos 2 ☉$$

La *nutazione in longitudine*, secondo le formole della meccanica celeste, si deduce da quella di obliquità moltiplicandone il primo termine per $-2\cot 2\varepsilon$, e gli altri termini per $-\cot\varepsilon$, e cambiando di più i coseni in seni. Per la qual cosa, se si faccia l'obliquità media dell'ecclittica $\varepsilon = 23°.27'.40''$ (quale fu nel 1830, e può ritenersi per una lunga serie di anni, in questa ricerca), eseguito il calcolo si avrà,

$$(3)..\Delta l = -17'',2985 \,\text{sen}\, ☊ + 0'',2082 \,\text{sen} 2 ☊ - 0'',2074 \,\text{sen}\, 2 ☾ - 1'',2550 \,\text{sen}\, 2 ☉$$

*§. 137. Stabilite le variazioni di obliquità e di longitudine, se ne possono dedurre col calcolo quelle relative all'ascensione retta ed alla declinazione degli astri. Richiamiamo le formole de' §§. 39, e 40, e differenziamo le due $\text{sen}\,\delta = \text{sen}\, l \,\text{sen}\,\varepsilon \cos\lambda + \cos\varepsilon \,\text{sen}\,\lambda$, $\cos\alpha\cos\delta = \cos l \cos\lambda$, facendo in esse variare $\alpha, \delta, \varepsilon$ ed l, e supponendo λ costante, perchè la nutazione non altera la po-

sizione dell' ecclittica, ma sibbene quella dell'equatore (§. 127.); sarà primamente,

$$d\delta = \frac{(\mathrm{sen}\, l \cos\lambda \cos\varepsilon - \mathrm{sen}\,\lambda\, \mathrm{sen}\,\varepsilon)\, d\varepsilon + \mathrm{sen}\,\varepsilon \cos\lambda \cos l\, dl}{\cos\delta},$$

e, per la relazione $\cos\delta = \frac{\cos l \cos\lambda}{\cos\alpha}$,

$$d\delta = \frac{\cos\alpha\, (\mathrm{sen}\, l \cos\varepsilon - \tan\lambda\, \mathrm{sen}\,\varepsilon)}{\cos l} d\varepsilon + \mathrm{sen}\,\varepsilon \cos\alpha\, dl;$$

ma dalle equazioni (1)' del §. 40 si ha

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\alpha \left(\tan l \cos\varepsilon - \frac{\tan\lambda\, \mathrm{sen}\,\varepsilon}{\cos l}\right), \text{ dunque}$$

$$(4)\ldots\ d\delta = d\varepsilon\, \mathrm{sen}\,\alpha + dl\, \mathrm{sen}\,\varepsilon \cos\alpha.$$

Differenziando l'equazione de' quattro coseni avremo in secondo luogo,

$$d\alpha = \frac{dl \cos\lambda\, \mathrm{sen}\, l - d\delta\, \mathrm{sen}\,\delta \cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha \cos\delta};$$

nella quale formola ponendo in luogo di $\cos\lambda\, \mathrm{sen}\, l$ il valore equivalente $\frac{\cos\alpha \cos\delta}{\cos l}\, \mathrm{sen}\, l$, ovvero $\cos\alpha \cos\delta \tan l$, sostituendo a $\tan l$ l'espressione in α, δ data dalle formole (1) del §.39, ed in fine introducendo il valore di $d\delta$ già trovato, si avrà

$$d\alpha = -d\varepsilon \tan\delta \cos\alpha + dl \cos\varepsilon + \frac{dl \tan\delta\, \mathrm{sen}\,\varepsilon}{\mathrm{sen}\,\alpha} - \frac{dl \tan\delta\, \mathrm{sen}\,\varepsilon}{\mathrm{sen}\,\alpha} \cos^2\alpha$$

$$(5)\ldots\ d\alpha = -d\varepsilon \tan\delta \cos\alpha + dl (\cos\varepsilon + \tan\delta\, \mathrm{sen}\,\varepsilon\, \mathrm{sen}\,\alpha).$$

Se in queste variazioni dell' ascensione retta e della declinazione, si pongano in vece di $d\varepsilon, dl$, i valori delle variazioni $\Delta\varepsilon, \Delta l$ trovate qui sopra, che per essere molto piccole possono considerarsi differenziali al pari di $d\alpha$ e di $d\delta$, si avranno le formole generali che determinano la nutazione in *AR* ed in declinazione per un astro di cui sono date queste coordinate, e per una data epoca, mediante la quale si cercheranno nelle tavole astronomiche le quantità ☉, ☊, ☾, da introdursi nelle formole (2), (3).

*§. 138. Sogliono d' ordinario considerarsi separatamente i termini di cui si compongono le espressioni di $\Delta\varepsilon$ e di Δl. I più importanti sono quelli che dipendono da ☊, e sostituiti in luogo di $d\varepsilon, dl$ nelle formole (5), (4) danno le formole comuni per calcolare la *nutazione lunare* in *AR* ed in declinazione; gli altri

termini dipendenti da $2\odot$, sostituiti da capo in vece di $d\varepsilon$, dl nelle stesse formole (5), (4), danno la *nutazione solare*; e finalmente i termini dipendenti da 2Ω e da 2☾, sono quasi sempre trascurabili, ma introdotti, ciascuno separatamente, nelle formole medesime, darebbero, per queste piccole correzioni, espressioni simili a quelle ottenute per gli altri due termini.

Facciamo prima di tutto, $d\varepsilon = 9'',25 \cos\Omega$, $dl = \ldots\ldots$ $-17'',2985 \operatorname{sen}\Omega$, e supponendo come sopra $\varepsilon = 23^\circ.\,27'.\,40''$, avremo

$$d\alpha = -15'',868 \operatorname{sen}\Omega - (9'',25 \cos\Omega \cos\alpha + 6'',887 \operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\alpha) \tan\delta$$
$$d\delta = 9'',25 \operatorname{sen}\alpha \cos\Omega - 6''887 \cos\alpha \operatorname{sen}\Omega$$

Queste formole possono rendersi più semplici cambiando i prodotti di seni e coseni in seni e coseni di archi somme o differenze. Abbiamo infatti,

$$\cos\Omega \cos\alpha = \tfrac{1}{2}\{\cos(\alpha - \Omega) + \cos(\alpha + \Omega)\}$$
$$\operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\alpha = \tfrac{1}{2}\{\cos(\alpha - \Omega) - \cos(\alpha + \Omega)\}$$
$$\operatorname{sen}\alpha \cos\Omega = \tfrac{1}{2}\{\operatorname{sen}(\alpha + \Omega) + \operatorname{sen}(\alpha - \Omega)\}$$
$$\cos\alpha \operatorname{sen}\Omega = \tfrac{1}{2}\{\operatorname{sen}(\alpha + \Omega) - \operatorname{sen}(\alpha - \Omega)\};$$

i quali valori sostituiti nelle formole danno, con facili riduzioni

$$d\alpha = -15'',868 \operatorname{sen}\Omega - \left\{ \begin{matrix} 8'',068 \cos(\alpha - \Omega) \\ + 1'',181 \cos(\alpha + \Omega) \end{matrix} \right\} \tan\delta$$
$$d\delta = 8'',068 \operatorname{sen}(\alpha - \Omega) + 1'',181 \operatorname{sen}(\alpha + \Omega).$$

Ed essendo in generale $\cos x = -\operatorname{sen}(x - 90^\circ)$, queste ultime espressioni, che rappresentano la *nutazione lunare*, potranno anche scriversi come segue, con sostituire a 90° l'indicazione 3^s (tre *segni* ciascuno di 30°) [§. 26],

$$(N) \ldots \begin{cases} d\alpha = -15'',868 \operatorname{sen}\Omega + \left\{ \begin{matrix} 8'',068 \operatorname{sen}(\alpha - \Omega - 3^s) \\ + 1'',181 \operatorname{sen}(\alpha + \Omega - 3^s) \end{matrix} \right\} \tan\delta \\ d\delta = 8'',068 \operatorname{sen}(\alpha - \Omega) + 1'',181 \operatorname{sen}(\alpha + \Omega) \end{cases}$$

*§. 139. Con un procedimento interamente simile, ponendo $d\varepsilon = 0'',5447 \cos 2\odot$, $dl = -1'',2550 \operatorname{sen} 2\odot$ nelle formole (5), (4), si troveranno le formole per calcolare la *nutazione solare* in *AR* ed in declinazione, e sarà,

$$(n) \ldots \begin{cases} d'\alpha = -1'',151 \operatorname{sen} 2\odot + \left\{ \begin{matrix} 0'',522 \operatorname{sen}(\alpha - 2\odot - 3^s) \\ + 0'',022 \operatorname{sen}(\alpha + 2\odot - 3^s) \end{matrix} \right\} \tan\delta \\ d'\delta = 0'',522 \operatorname{sen}(\alpha - 2\odot) + 0'',022 \operatorname{sen}(\alpha + 2\odot) \end{cases}$$

Ed allo stesso modo, introducendo successivamente nelle indicate formole (5), (4) i termini delle espressioni di $\Delta\varepsilon$, Δl dipendenti da 2☾ e da 2Ω, si otterranno le correzioni che ne derivano; le quali avranno la medesima forma delle precedenti, ma conte-

nendo ciascuna gli stessi coefficienti numerici (con piccolissime differenze), potranno riunirsi in una sola formola, cioè

$$(\eta)\begin{cases} d''\alpha = -0'',1905\,\{\operatorname{sen} 2\,\text{☾} - \operatorname{sen} 2\,\text{☊}\} \\ \quad + 0'',0864\,\{\operatorname{sen}(\alpha - 2\,\text{☾} - 3^s) - \operatorname{sen}(\alpha - 2\,\text{☊} - 3^s)\}\tan\delta \\ \quad + 0'',0037\,\{\operatorname{sen}(\alpha + 2\,\text{☾} - 3^s) - \operatorname{sen}(\alpha + 2\,\text{☊} - 3^s)\}\tan\delta \\ d''\delta = + 0'',0864\,\{\operatorname{sen}(\alpha - 2\,\text{☾}) - \operatorname{sen}(\alpha - 2\,\text{☊})\} \\ \quad + 0'',0037\,\{\operatorname{sen}(\alpha + 2\,\text{☾}) - \operatorname{sen}(\alpha + 2\,\text{☊})\} \end{cases}$$

*§. 140. In quanto all' aberrazione, parlando del sistema di Copernico, abbiamo già data ragione del fenomeno, ed abbiamo anche accennato come si determina l' arco che descrive la Terra nella sua orbita durante il tempo che la luce impiega a giungere dal Sole sino a noi. Questo elemento importante del calcolo dell' aberrazione si chiama la *costante dell' aberrazione*, e dipende da un' esatta cognizione della velocità della luce. Intorno ad essa non si accordano interamente gli astronomi; *Bradley* fece la costante di 20'',00, *Delambre* la trovò di 20'',253, *Bessel* di 20'',68 etc. L' astronomo *Baily* adottò nel calcolo delle sue tavole 20'',36, ed è questo il valore adoperato dall' *Almanacco nautico*. Stando a siffatta autorità, le formole generali per calcolare l' effetto dell' aberrazione sull' ascensione retta e sulla declinazione degli astri sono,

$$\begin{aligned} d_{,}\alpha &= -20'',36\,\{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\odot + \cos\varepsilon \cos\alpha \cos\odot\} : \cos\delta \\ d_{,}\delta &= -20\;\;,36\,\{\cos\alpha \operatorname{sen}\odot - \cos\varepsilon \operatorname{sen}\alpha \cos\odot\} \times \operatorname{sen}\delta \\ &\quad -20\;\;,36\;\operatorname{sen}\varepsilon \cos\odot \cos\delta, \end{aligned}$$

dove $\odot$, ε dinotano la longitudine del Sole e l' obliquità dell' eclittica per l' istante per il quale si vuol calcolare l' aberrazione. Si faccia come sopra $\varepsilon = 23^\circ.27'.40''$, valore che nel calcolo di queste piccole correzioni può considerarsi costante per moltissimi anni, e le formole diverranno

$$\begin{aligned} d_{,}\alpha &= -\{20'',36 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\odot + 18'',6768 \cos\alpha \cos\odot\} : \cos\delta \\ d_{,}\delta &= -\{20'',36 \cos\alpha \operatorname{sen}\odot - 18'',6768 \operatorname{sen}\alpha \cos\odot\} \operatorname{sen}\delta \\ &\qquad - 8'',1058 \cos\odot \cos\delta \end{aligned}$$

In queste formole ancora si potranno cambiare i prodotti di seni e coseni in seni e coseni di archi somme o differenze, e sostituendo di più a $\cos(\alpha + \odot)$, $\cos(\alpha - \odot)$ le espressioni equivalenti $-\operatorname{sen}(\alpha + \odot - 3^s)$, $-\operatorname{sen}(\alpha - \odot - 3^s)$, si avrà

$$(A)\ldots\begin{cases} d_{,}\alpha = \left\{ \begin{aligned} &19'',5184 \operatorname{sen}(\alpha - \odot - 3^s) \\ &\quad - 0'',8416 \operatorname{sen}(\alpha + \odot - 3^s) \end{aligned} \right\} : \cos\delta \\ d_{,}\delta = \{19'',5184 \operatorname{sen}(\alpha - \odot) - 0'',8416 \operatorname{sen}(\alpha + \odot)\} \operatorname{sen}\delta \\ \qquad - 4'',0529\,\{\cos(\odot + \delta) + \cos(\odot - \delta)\}. \end{cases}$$

§. 141. Le ascensioni rette e le declinazioni delle stelle ottenute con le osservazioni astronomiche, nel modo accennato nel §. 32, sono *apparenti*, e quindi affette della nutazione e dell' aberrazione. Esse non potrebbero servire immediatamente per de-

durne i luoghi degli stessi astri in altra epoca anteriore o posteriore, perchè la nutazione e l'aberrazione non variano proporzionalmente al tempo, ma dipendono dalla posizione attuale del nodo lunare e del Sole. Laonde per *formare un catalogo di stelle* bisogna spogliare della nutazione e della aberrazione le ascensioni rette e le declinazioni *osservate*, vale a dire applicare a quelle coordinate le correzioni espresse dalle formole (N), (n), (η), (A) [§§. precedenti] col segno contrario. Si otterranno così le *posizioni medie* per l'epoca dell'osservazione, con le quali si potrà formare il *catalogo*. Volendo poi la posizione di una stella per un'altra epoca, diversa da quella del catalogo, si calcolerà prima di tutto la *posizione media*, applicando alle coordinate del catalogo le correzioni espresse dalle formole (P) [§. 134.], nelle quali i coefficienti m, n si prenderanno per il tempo dato t. Indi si aggiungeranno all'ascensione retta media ed alla declinazione media le correzioni della nutazione e dell'aberrazione, calcolate con le formole (N), (n), (η), (A) per lo stesso tempo t, e si otterranno le *posizioni apparenti* richieste per la detta epoca.

Si sono paragonate dagli astronomi le posizioni apparenti dedotte col calcolo dai cataloghi con quelle osservate di nuovo direttamente, e per molte stelle si sono trovate differenti fra loro di quantità piccolissime, ma abbastanza notabili per non potersi confondere con gli errori di osservazione, quando l'epoca del catalogo non sia molto prossima a quella dell'osservazione. Ciò ha dimostrato che, oltre ai moti apparenti che derivano dalla precessione, dalla nutazione e dall'aberrazione, un gran numero di stelle, e probabilmente tutte, hanno un altro lentissimo movimento che si è chiamato *moto proprio*, perchè è il solo loro movimento effettivo. Pare che tutto sia moto in natura, e la quiete non possa considerarsi se non come relativa, o come un'astrazione de'meccanici. *Galileo* scoprì il primo che il Sole girava intorno al suo asse, perchè le macchie osservate alla sua superficie avevano un moto periodico, dal quale si conchiuse *compiersi la rotazione del Sole in 25 giorni e mezzo*. Le stelle *variabili*, cioè quelle che in un determinato periodo passano per diversi gradi di splendore, sino a divenire qualche volta invisibili, avevano anche presentato da lungo tempo altrettanti esempi di movimento in quei lontani soli, qualunque potesse essere la spiegazione, non facile, di siffatti fenomeni. Ma i recenti progressi dell'astronomia siderea hanno offerto la più splendida pruova di questa generale attività del creato. Dopo 25 anni di studio sulle *stelle doppie*, Herschel osservò che fra queste stelle, ciascuna delle quali apparisce col cannocchiale divisa in due più piccole e disuguali, molte ve ne sono che formano un *sistema stellare*, per modo che la stella minore gira intorno alla maggiore in un periodo di tempo più o meno considerabile. Il movimento si fa in una ellisse, e con la legge di

gravitazione del Newton, la quale dopo un tal fatto può dirsi avere pienamente giustificato l'epiteto di *universale*.

Un profondo esame de' *moti proprii* delle stelle condusse ancora l'Herschel a sospettare che il centro del Sole, e con esso tutto il sistema planetario, avesse un lento moto verso un punto del cielo situato nella costellazione di *Ercole*. In appresso, e dopo che le delicatissime osservazioni moderne hanno determinato il moto proprio di molte altre stelle, il signor *Argelander*, ritornando su questo soggetto, ha confermata l'ipotesi di *Herschel*, la quale va acquistando per l'analogia sempre maggiore probabilità, secondo che si studiano e si confermano i moti proprii delle stelle, che sono corpi celesti affatto simili al nostro Sole.

§. 142. Sarebbe questo il luogo di dare una descrizione delle diverse costellazioni, delle stelle variabili, delle nebulose, e di quanto altro di curioso e di sorprendente offre il magnifico spettacolo del cielo. Ma troppo devieremmo dal nostro scopo, per cui rimandiamo i nostri lettori ai trattati di Astronomia, e specialmente a quello del ch. Signor *Herschel* figlio. Aggiungeremo però qui appresso i nomi delle principali stelle e delle costellazioni cui appartengono.

α Andromeda — *Sirrah*
α Pegaso — *Marcab*
γ Pegaso — *Algenib*
α Cassiopeja — *Scedir*
α Orsa minore — *Polare*
α Eridano — *Achernar*
α Ariete — *Hamal*
α Balena — *Menkar*
α Toro — *Aldebaran*
α Auriga — *Capella*
α Orione — *Beteigeuze*
β Orione — *Rigel*
α Argo — *Canopo*
α Cane maggiore — *Sirio*
α Gemelli — *Castore* (doppia)
β Gemelli — *Polluce*
α Cane minore — *Procione*

α Idra — *Alfard*
α Leone — *Regolo*
β Leone — *Denebola*
α Orsa maggiore — *Dubhe*
α Vergine — *Spica*
α Boote — *Arturo*
α Corona Boreale — *Gemma*
α Scorpione — *Antares*
α Ercole — *Ras-Algeti*
α Ofinco — *Ras-Alague*
γ Dragone — *Etamin*
α Lira — *Wega*
α Aquila — *Atair*
α Cigno — *Deneb*
α Cefeo — *Alderamin*
α Aquario — *Sadalmelik*
α Pesce australe — *Fomalhaut*

Tavole generali di nutazione e di aberrazione.

*§. 143. Le formole (N), (n), (η), (A) trovate superiormente per la nutazione e l'aberrazione possono ridursi facilmente in *tavole*, per ottenere queste correzioni con poco calcolo. Nella *Conoscenza dei tempi* del 1810 si trovano le tavole corrispondenti alle formole (N), (A), ma non potrebbero ora usarsi, per avere le costanti di nutazione e di aberrazione ricevuto un nota-

bile cambiamento dopo le ultime ricerche degli astronomi, e specialmente di Bessel. Abbiamo creduto che sarebbe stato utile ricalcolarle su questi nuovi dati, e vi abbiamo aggiunta ancora un'altra tavola per calcolare la nutazione solare (n), dalla quale abbiamo osservato che si potevano anche dedurre le correzioni (η), per essere i coefficienti numerici di queste *quasi esattamente la sesta parte* di quelli della nutazione solare. Riportiamo qui appresso le nuove tavole ad intelligenza delle quali soggiungiamo quanto segue.

1.° Siccome i termini che compongono le formole (N), (n), (η), (A) sono tutti prodotti di un coefficiente numerico per un *seno* o per un *coseno* (prescindendo dai fattori dipendenti dalla declinazione), così nelle tavole sono calcolati quelli prodotti per tutti i gradi della circonferenza.

2.° Gli *argomenti* delle tavole (I. §. 53) sono gli archi variabili di cui deve prendersi il seno, o il coseno, e sono stati espressi in *segni* e *gradi*, ad oggetto di poter estendere facilmente il calcolo eseguito per i primi 90 gradi a tutta la circonferenza, con un semplice cambiamento di segno.

3.° I termini delle formole dipendenti da uno stesso coefficiente numerico si ottengono da una medesima colonna delle tavole ; ed affinchè siffatti termini avessero tutti lo stesso segno, abbiamo modificate le formole (η) nel modo seguente ;

$$\begin{aligned} d''\alpha = &-0'',1905\,\{\text{sen}\,2\,\text{☾} + \text{sen}\,(2\,\text{☊} + 6^s)\} \\ &+0'',0864\,\{\text{sen}\,(\alpha - 2\,\text{☾} - 3^s) + \text{sen}\,(\alpha - 2\,\text{☊} + 3^s)\}\tan\delta \\ &+0'',0037\,\{\text{sen}\,(\alpha + 2\,\text{☾} - 3^s) + \text{sen}\,(\alpha + 2\,\text{☊} + 3^s)\}\tan\delta \\ d''\delta = &0'',0864\,\{\text{sen}\,(\alpha - 2\,\text{☾}) + \text{sen}\,(\alpha - 2\,\text{☊} + 6^s)\} \\ &+0'',0037\,\{\text{sen}\,(\alpha + 2\,\text{☾}) + \text{sen}\,(\alpha + 2\,\text{☊} + 6^s)\}; \end{aligned}$$

dove in vece di $-\text{sen}\,2\,\text{☊}$ si è posto $+\text{sen}\,(2\,\text{☊} + 6^s)$, e così degli altri, perchè in generale $-\text{sen}\,x = \text{sen}\,(x + 180°) = \text{sen}\,(x + 6^s)$.

Nell' *Almanacco nautico* di Londra sono conservati i termiui che dipendono da $2\,\text{☊}$, e trascurati quelli dipendenti da $2\,\text{☾}$, ma noi abbiamo creduto di conservare gli uni e gli altri, perchè sono dello stesso ordine, e possono per le stelle vicine al polo acquistare egualmente un valore apprezzabile.

4.° I termini da prendersi nelle tavole sono tanti quanti sono gli *argomenti* notati in testa delle tavole stesse.

Nel III Libro applicheremo le tavole ad un esempio numerico.

*§. 144. Dobbiamo in fine avvertire che, quando si richiedo una grande esattezza, si suole nel calcolo delle ascensioni retto delle stelle circompolari tener conto anche dell'aberrazione *diurna*, prodotta dalla rotazione della Terra intorno al suo asse.

La correzione dell' *AR espressa in tempo* è

per i passaggi superiori... $+0'',0206 \cos L \sec\delta$
per i passaggi inferiori .. $-0,0206 \cos L \sec\delta$;

dove L dinota la latitudine geografica del luogo, e δ la declinazione della stella.

NUTAZIONE LUNARE [*Formola* (*N*)].

I — *Asc. Ret.* ARG. ☊

GRADI.	0s.6s. −+	1s.7s. −+	2s.8s. −+	GRADI.
0	0″00	7″93	13″74	30
1	0,28	8,17	13,88	29
2	0,55	8,41	14,01	28
3	0,83	8,64	14,14	27
4	1,11	8,87	14,26	26
5	1,38	9,10	14,38	25
6	1,66	9,33	14,50	24
7	1,93	9,55	14,61	23
8	2,21	9,77	14,71	22
9	2,48	9,99	14,81	21
10	2,76	10,20	14,91	20
11	3,03	10,41	15,00	19
12	3,30	10,62	15,09	18
13	3,57	10,82	15,18	17
14	3,84	11,02	15,25	16
15	4,11	11,22	15,33	15
16	4,37	11,41	15,40	14
17	4,64	11,61	15,46	13
18	4,91	11,79	15,52	12
19	5,17	11,98	15,58	11
20	5,43	12,16	15,63	10
21	5,69	12,33	15,67	9
22	5,94	12,50	15,71	8
23	6,20	12,67	15,75	7
24	6,45	12,84	15,78	6
25	6,71	13,00	15,81	5
26	6,96	13,16	15,83	4
27	7,20	13,31	15,85	3
28	7,45	13,46	15,86	2
29	7,69	13,60	15,87	1
30	7,93	13,74	15,87	0
	+− 11s.5s.	+− 10s.4s.	+− 9s.3s.	

II — *Asc. Ret.* ARG (☊ − ☊ − 3s) moltiplicatore *tan* δ; *Decl.* ARG (☊ − ☊)

GRADI.	0s.6s. +−	1s.7s. +−	2s.8s. +−	GRADI.
0	0″000	4″034	6″988	30
1	0,141	4,156	7,057	29
2	0,282	4,276	7,124	28
3	0,422	4,395	7,189	27
4	0,563	4,512	7,252	26
5	0,703	4,628	7,313	25
6	0,843	4,743	7,371	24
7	0,983	4,856	7,427	23
8	1,123	4,968	7,481	22
9	1,262	5,078	7,533	21
10	1,401	5,187	7,582	20
11	1,540	5,294	7,629	19
12	1,678	5,399	7,674	18
13	1,815	5,503	7,716	17
14	1,952	5,605	7,756	16
15	2,088	5,705	7,794	15
16	2,224	5,804	7,829	14
17	2,359	5,901	7,862	13
18	2,493	5,996	7,892	12
19	2,627	6,089	7,920	11
20	2,760	6,180	7,946	10
21	2,891	6,270	7,969	9
22	3,022	6,358	7,990	8
23	3,153	6,444	8,008	7
24	3,282	6,528	8,024	6
25	3,410	6,610	8,038	5
26	3,537	6,690	8,049	4
27	3,663	6,768	8,057	3
28	3,788	6,843	8,063	2
29	3,912	6,916	8,067	1
30	4,034	6,988	8,068	0
	−+ 11s.5s.	−+ 10s.4s.	−+ 9s.3s.	

III — *Asc. Ret.* ARG (☊ + ☊ − 3s) moltiplicatore *tan* δ; *Decl.* ARG (☊ + ☊)

GRADI.	0s.6s. +−	1s.7s. +−	2s.8s. +−	GRADI.
0	0″000	0″591	1″023	30
1	0,021	0,609	1,033	29
2	0,041	0,626	1,043	28
3	0,062	0,643	1,053	27
4	0,082	0,661	1,062	26
5	0,103	0,678	1,071	25
6	0,123	0,694	1,079	24
7	0,144	0,711	1,087	23
8	0,164	0,727	1,095	22
9	0,185	0,743	1,103	21
10	0,205	0,759	1,110	20
11	0,225	0,775	1,117	19
12	0,246	0,791	1,124	18
13	0,266	0,806	1,130	17
14	0,286	0,821	1,136	16
15	0,306	0,835	1,141	15
16	0,326	0,850	1,146	14
17	0,345	0,864	1,151	13
18	0,365	0,878	4,156	12
19	0,385	0,892	1,160	11
20	0,404	0,905	1,164	10
21	0,423	0,918	1,167	9
22	0,443	0,931	1,170	8
23	0,462	0,944	1,173	7
24	0,481	0,956	1,175	6
25	0,499	0,968	1,177	5
26	0,518	0,979	1,179	4
27	0,536	0,991	1,180	3
28	0,555	1,002	1,181	2
29	0,573	1,013	1,181	1
30	0,591	1,023	1,181	0
	−+ 11s.5s.	−+ 10s.4s.	−+ 9s.3s.	

Affinchè gli *Argomenti* di queste tavole non siano mai negativi, si aumenteranno di una o più circonferenze, se è necessario per le sottrazioni. Se poi un argomento risulterà maggiore di 360°, se ne toglierà una circonferenza — Quando la declinazione δ è australe, si dovrà considerare negativa.

NUTAZIONE SOLARE E CORREZIONI [*Formole* (n), (η)].

I

Asc. Ret. ARG. 2⊙

{*Asc. Ret.* ARG. 2☾ moltiplicatore $\frac{1}{6}$

{*Asc. Ret.* ARG (2☊+6^s) moltiplicatore $\frac{1}{6}$

GRADI.	0^s. 6^s − +	1^s. 7^s − +	2^s. 8^s − +	GRADI.
0	0''00	0''58	1''00	30
1	0,02	0,59	1,01	29
2	0,04	0,61	1,02	28
3	0,06	0,63	1,03	27
4	0,08	0,64	1,03	26
5	0,10	0,66	1,04	25
6	0,12	0,68	1,05	24
7	0,14	0,69	1,06	23
8	0,16	0,71	1,07	22
9	0,18	0,72	1,07	21
10	0,20	0,74	1,08	20
11	0,22	0,76	1,09	19
12	0,24	0,77	1,09	18
13	0,26	0,79	1,10	17
14	0,28	0,80	1,11	16
15	0,30	0,81	1,11	15
16	0,32	0,83	1,12	14
17	0,34	0,84	1,12	13
18	0,36	0,86	1,13	12
19	0,37	0,87	1,13	11
20	0,39	0,88	1,13	10
21	0,41	0,89	1,14	9
22	0,43	0,91	1,14	8
23	0,45	0,92	1,14	7
24	0,47	0,93	1,14	6
25	0,49	0,94	1,15	5
26	0,50	0,95	1,15	4
27	0,52	0,97	1,15	3
28	0,54	0,98	1,15	2
29	0,56	0,99	1,15	1
30	0,58	1,00	1,15	0
	+ − 11^s. 5^s	+ − 10^s. 4^s	+ − 9^s. 3^s	

II

{*Asc. Ret.* ARG(α−2⊙−3^s) moltiplicatore *tan* δ

Decl. ARG (α−2⊙)

{*Asc. Ret.* ARG(α−2☾−3^s) moltiplicatore $\frac{1}{6}$ *tan* δ

{*Asc. Ret.* ARG(α−2☊+3^s) moltiplicatore $\frac{1}{6}$ *tan* δ

Decl. ARG(α−2☾); moltp. $\frac{1}{6}$

{*Decl.* ARG(α−2☊+6^s) moltiplicatore $\frac{1}{6}$

GRADI.	0^s. 6^s. + −	1^s. 7^s. + −	2^s. 8^s. + −	GRADI.
0	0''000	0''261	0''452	30
1	0,009	0,269	0,457	29
2	0,018	0,277	0,461	28
3	0,027	0,284	0,465	27
4	0,036	0,292	0,469	26
5	0,046	0,299	0,473	25
6	0,055	0,307	0,477	24
7	0,064	0,314	0,481	23
8	0,073	0,321	0,484	22
9	0,082	0,329	0,487	21
10	0,091	0,336	0,491	20
11	0,100	0,343	0,494	19
12	0,109	0,349	0,497	18
13	0,117	0,356	0,499	17
14	0,126	0,363	0,502	16
15	0,135	0,369	0,504	15
16	0,144	0,376	0,507	14
17	0,153	0,382	0,509	13
18	0,161	0,388	0,511	12
19	0,170	0,394	0,513	11
20	0,179	0,400	0,514	10
21	0,187	0,406	0,516	9
22	0,196	0,411	0,517	8
23	0,204	0,417	0,518	7
24	0,212	0,422	0,519	6
25	0,221	0,428	0,520	5
26	0,229	0,433	0,521	4
27	0,237	0,438	0,521	3
28	0,245	0,443	0,522	2
29	0,253	0,448	0,522	1
30	0,261	0,452	0,522	0
	− + 11^s. 5^s.	− + 10^s. 4^s.	− + 9^s. 3^s.	

III

{*Asc. Ret.* ARG(α+2⊙−3^s) moltiplicatore *tan* δ

Decl. ARG (α+2⊙)

{*Asc. Ret.* ARG(α+2☾−3^s) moltiplicatore $\frac{1}{6}$ *tan* δ

{*Asc. Ret.* ARG(α+2☊+3^s) moltiplicatore $\frac{1}{6}$ *tan* δ

Decl. ARG(α+2☾); moltp. $\frac{1}{6}$

{*Decl.* ARG(α+2☊+6^s) moltiplicatore $\frac{1}{6}$

GRADI.	0^s. 6^s. + −	1^s. 7^s. + −	2^s. 8^s. + −	GRADI.
0	0''000	0''011	0''019	30
1	0,000	0,012	0,020	29
2	0,001	0,012	0,020	28
3	0,001	0,012	0,020	27
4	0,002	0,013	0,020	26
5	0,002	0,013	0,020	25
6	0,002	0,013	0,021	24
7	0,003	0,014	0,021	23
8	0,003	0,014	0,021	22
9	0,004	0,014	0,021	21
10	0,004	0,014	0,021	20
11	0,004	0,015	0,021	19
12	0,005	0,015	0,021	18
13	0,005	0,015	0,022	17
14	0,005	0,016	0,022	16
15	0,006	0,016	0,022	15
16	0,006	0,016	0,022	14
17	0,007	0,016	0,022	13
18	0,007	0,017	0,022	12
19	0,007	0,017	0,022	11
20	0,008	0,017	0,022	10
21	0,008	0,017	0,022	9
22	0,008	0,018	0,022	8
23	0,009	0,018	0,022	7
24	0,009	0,018	0,022	6
25	0,010	0,018	0,022	5
26	0,010	0,019	0,022	4
27	0,010	0,019	0,022	3
28	0,011	0,019	0,022	2
29	0,011	0,019	0,022	1
30	0,011	0,019	0,022	0
	− + 11^s. 5^s	− + 10^s. 4^s	− + 9^s. 3^s.	

ABERRAZIONE [*Formola (A)*].

I					II					III				
Decl. ARG (⊙+δ) *Decl.* ARG (⊙—δ)					*Asc. Ret.* ARG (α—⊙—3ˢ) moltiplicatore $\frac{1}{\cos\delta}$ *Decl.* ARG (α—⊙); moltiplicatore *sen* δ					*Asc. Ret* ARG(α+⊙— moltiplicatore $\frac{1}{\cos\delta}$ *Decl.* ARG (α+⊙) moltiplicatore *sen* δ				
	0ˢ.6ˢ — +	1ˢ.7ˢ — +	2ˢ.8ˢ — +			0ˢ.6ˢ. + —	1ˢ.7ˢ. + —	2ˢ.8ˢ. + —			0ˢ.6ˢ. — +	1ˢ.7ˢ. — +	2ˢ.8ˢ. — +	
0	4″05	3″51	2″03	30	0	0″000	9″759	16″903	30	0	0″000	0″421	0″729	
1	4,05	3,47	1,96	29	1	0,341	10,053	17,071	29	1	0,015	0,433	0,736	
2	4,05	3,44	1,90	28	2	0,681	10,343	17,234	28	2	0,029	0,446	0,743	
3	4,05	3,40	1,84	27	3	1,022	10,630	17,391	27	3	0,044	0,458	0,750	
4	4,04	3,36	1,78	26	4	1,362	10,914	17,543	26	4	0,059	0,471	0,756	
5	4,04	3,32	1,71	25	5	1,701	11,195	17,690	25	5	0,073	0,483	0,763	
6	4,03	3,28	1,65	24	6	2,040	11,472	17,831	24	6	0,088	0,495	0,769	
7	4,02	3,24	1,58	23	7	2,379	11,746	17,967	23	7	0,103	0,506	0,775	
8	4,01	3,19	1,52	22	8	2,716	12,016	18,097	22	8	0,117	0,518	0,780	
9	4,00	3,15	1,45	21	9	3,053	12,283	18,222	21	9	0,132	0,530	0,786	
10	3,99	3,10	1,39	20	10	3,389	12,546	18,341	20	10	0,146	0,541	0,791	
11	3,98	3,06	1,32	19	11	3,724	12,805	18,455	19	11	0,161	0,552	0,796	
12	3,96	3,01	1,25	18	12	4,058	13,060	18,563	18	12	0,175	0,563	0,800	
13	3,95	2,96	1,18	17	13	4,391	13,312	18,666	17	13	0,189	0,574	0,805	
14	3,93	2,92	1,12	16	14	4,722	13,559	18,762	16	14	0,204	0,585	0,809	
15	3,91	2,87	1,05	15	15	5,052	13,801	18,853	15	15	0.218	0,595	0,813	
16	3,90	2,82	0,98	14	16	5,380	14,040	18,939	14	16	0,232	0,605	0,817	
17	3,88	2,76	0,91	13	17	5,707	14,275	19,618	13	17	0,246	0,615	0,820	
18	3,85	2,71	0,84	12	18	6,032	14,505	19,092	12	18	0,260	0,625	0,823	
19	3,83	2,66	0,77	11	19	6,355	14,731	19,160	11	19	0,274	0,635	0,826	
20	3,81	2,61	0,70	10	20	6,676	14,952	19,222	10	20	0,288	0,645	0,829	
21	3,78	2,55	0,63	9	21	6,995	15,169	19,278	9	21	0,302	0,654	0,831	
22	3,76	2,50	0,56	8	22	7,312	15,381	19,328	8	22	0,315	0,663	0,833	
23	3,73	2,44	0,49	7	23	7,626	15,588	19,373	7	23	0,329	0,672	0,835	
24	3,70	2,38	0,42	6	24	7,939	15,791	19,411	6	24	0,342	0,681	0,837	
25	3,67	2,32	0,35	5	25	8,249	15,989	19,444	5	25	0,356	0,689	0,838	
26	3,64	2,27	0,28	4	26	8,556	16,182	19,471	4	26	0,369	0,698	0,840	
27	3,61	2,21	0,21	3	27	8,861	16,370	19,492	3	27	0,382	0,706	0,840	
28	3,58	2,15	0,14	2	28	9,163	16,553	19,507	2	28	0,395	0,714	0,841	
29	3,54	2,09	0,07	1	29	9,463	16,731	19,515	1	29	0,408	0,721	0,841	
30	3,51	2,03	0,00	0	30	9,759	16,903	19,518	0	30	0,421	0,729	0,842	
	— + 11ˢ.5ˢ	— + 10ˢ.4ˢ	— + 9ˢ.3ˢ			— + 11ˢ.5ˢ.	— + 10ˢ.4ˢ.	— + 9ˢ. 3ˢ.			+ — 11ˢ.5ˢ	+ — 10ˢ.4ˢ	+ — 9ˢ. 3ˢ.	

CAPO NONO

Del tempo.

Del tempo medio.

§. 145. Nel CAPO SECONDO abbiamo dato una idea de' tre differenti tempi di cui si valgono gli astronomi nelle loro osservazioni, ma ci mancavano allora molti dati per poter comprendere pienamente la formazione del tempo *medio*, e le sue relazioni col tempo *vero* e col tempo *sidereo*. Riprendiamo ora questo argomento, il quale per la sua importanza merita di essere meglio studiato.

§. 146. Giungano insieme in un dato giorno dell'anno una stella ed il Sole sul meridiano, la prima in A ed il secondo in M [*fig.* 31.]; nel giorno seguente il Sole sarà passato in M' col suo moto proprio, onde la sua ascensione retta sarà divenuta $\text{♈}Em'$, maggiore dell'ascensione retta $\text{♈}E$ della stella. È chiaro perciò che girando la sfera celeste col moto diurno nella direzione $Q\text{♎}E$, quando la stella sarà ritornata al meridiano in A, il Sole non vi sarà giunto ancora, e per condurlo sul meridiano dovrà la sfera celeste girare per l'archetto Em'. Il giorno solare è dunque più lungo del giorno sidereo, e la differenza è di circa $4'$, perchè l'arco Em' è di un grado circa.

Il giorno solare sarebbe di costante durata se l'archetto Em' dell'equatore aggiunto alla rotazione della sfera celeste per ricondurre il Sole al meridiano, fosse di costante lunghezza. Ma non accade così per due ragioni; 1.° l'arco MM' descritto dal Sole nell'ecclittica non è sempre lo stesso, perchè la curva *ampi* che il Sole descrive intorno alla Terra (si adotta per comodità il linguaggio dell'apparenza [§. 102]) è un ellisse, e le velocità angolari di esso sono in ragione inversa de' quadrati delle distanze dalla Terra; 2.° perchè le projezioni sull'equatore degli archi descritti dal Sole col moto proprio nell'ecclittica non sono neppure proporzionali a questi archi. In fatti, considerando un piccolo arco $b\text{♎}$ descritto dal Sole in vicinanza dell'equinozio, e la sua projezione $b'\text{♎}$ sull'equatore, nel triangolo rettangolo $b\text{♎}b'$ si avrà, $\cot b\text{♎} = \cot b'\text{♎} \times \cos b\text{♎}b'$, ovvero, $\tan b'\text{♎} = \tan b\text{♎} \cos b\text{♎}b'$. E poichè gli archi si sono supposti piccolissimi, come le velocità diurne del Sole, si potrà fare $b'\text{♎} = b\text{♎} \cos b\text{♎}b'$; cioè l'arco sull'equatore è minore dell'arco sull'ecclittica nel rapporto del coseno dell'obliquità dell'ecclittica al raggio. Il contrario

avviene per un archetto MM' vicino al solstizio; perocchè nel triangolo $M'\simeq m'$ si ha, cot $M'\simeq$ = cot $m'\simeq$ cos. *obliq.*; ed essendo $M\simeq = E\simeq = 90°$, si avrà, cot$(90° - MM')$ = cot$(90° - Em')\times$ cos. *obliq*; tan MM' = tan Em' cos. *obliq*; $MM' = Em'$ cos. *obliq*; da cui apparisce che l'arco dell'equatore Em' è maggiore di quello dell'eclittica nello stesso rapporto dell'unità al coseno dell'obliquità dell'eclittica.

§. 147. Per le accennate due cagioni il tempo vero non è uniforme, e gli astronomi per servirsi del tempo solare, hanno immaginato un sole fittizio che avesse un movimento equabile, e facesse le veci del Sole vero. Ecco la loro ipotesi.

Il Sole descrive intorno alla Terra T l'ellisse $MaNp$ [*fig.* 32.] ed apparisce descrivere in cielo il cerchio massimo, $\Upsilon A\simeq P$, ossia l'eclittica. L'asse maggiore ap dell'orbita, ovvero la linea degli *apsidi*, prolungata sino alla sfera celeste la incontra nei punti A, P chiamati *apogeo* e *perigeo* [§. 95, e segu.]. Supponendo che nel suo corso il Sole parta dall'apogeo, esso descrive con moto vario la semi-ellisse aNp, ed in cielo il semicerchio $A\simeq P$, aumentandosi sempre la sua velocità angolare da A sino in P. Da questo punto, nel descrivere il secondo semicerchio $P\Upsilon A$, riprende il Sole le medesime velocità che aveva avuto nel primo semicerchio, ma in ordine inverso. Ora, indicando il Sole vero con S, si suppone che un Sole fittizio S' parta insieme con S dall'apogeo, e descriva la prima metà dell'ecclittica $A\simeq P$, con moto uniforme, e con una velocità media di quelle che ha il Sole vero nel semigiro $A\simeq P$. I due soli saranno perciò uno innanzi e l'altro dopo nel loro movimento, e siccome la velocità di S è minima nel punto A, così nella semieclittica $A\simeq P$ il Sole S' andrà sempre avanti ad S. Nel punto P i due soli ritorneranno insieme, e partendo uniti da questo punto, il Sole S, che cammina ora con velocità massima, si troverà sempre avanti ad S', e non si congiungerà con esso che in A. Ciò premesso, supponsono gli astronomi che un secondo sole fittizio S'' percorra con moto uniforme l'equatore, partendo dall'equinozio Υ nel momento in cui vi passa il sole S', e tornando in quel punto insieme con lo stesso S'. Questo secondo sole fittizio è il *Sole medio*, ed il tempo che da esso deriva dicesi *tempo medio*. È evidente che con la doppia ipotesi ora esposta gli astronomi hanno voluto rimediare alle due disuguaglianze del sole vero; il sole S' corregge la disuguaglianza del moto nella orbita, ed il sole S'' la disuguaglianza nascente dalla obliquità dell'ecclittica. Il paragone del Sole vero S col secondo sole fittizio S'', dà origine alla *equazione del tempo*.

§. 148. Il Sole S', come si è accennato, va avanti del Sole S nella semi-ecclittica $A\simeq P$, ed il contrario accade nell'altra metà dell'ecclittica $P\Upsilon A$. L'angolo fra i due raggi vettori diretti ai luoghi

che occupano nel medesimo istante i due soli S, S' dicesi *equazione del centro;* tale è per esempio l'angolo STS', ossia l'arco SS' dell'ecclittica. Considerando questa posizione dei due primi soli, sia S'' il luogo del terzo sole, o sia del sole medio, nello stesso momento. È chiaro in generale che, siccome i due soli S', S'' partono insieme dal punto Υ, e descrivono con moto uniforme due cerchi eguali, i quali sono l'ecclittica e l'equatore, in tempi eguali, le loro distanze dall'equinozio dovranno essere sempre eguali considerate nei rispettivi loro circoli. Così $\Upsilon S'$ sarà eguale a $\Upsilon S''$, cioè la longitudine del sole S', che dicesi *longitudine media del Sole*, sarà eguale all'ascensione retta di S'', che si chiama *ascensione retta media del Sole*. Ora, poichè due astri qualunque passano insieme pel meridiano quando hanno la medesima ascensione retta, se l'ascensione retta del sole vero S sarà eguale all' AR del sole S'', ossia del sole medio, quelli due astri passeranno insieme al meridiano. Generalmente non avviene così, perchè l'equazione del centro e la difformità delle projezioni degli archi dell'ecclittica sull'equatore sono due disuguaglianze che non si compensano se non quattro volte in un anno. In tutti gli altri giorni l' AR del sole vero essendo diversa da quella del sole medio, e potendo essere maggiore o minore, il sole medio non passerà insieme col sole vero pel meridiano, e potrà passare prima o dopo. L'intervallo di tempo frapposto tra i due passaggi del sole vero e del sole medio pel meridiano dicesi *equazione del tempo;* e propriamente *si chiama equazione del tempo ciò che deve aggiungersi al tempo vero per avere il tempo medio.*

*§. 149. Indicando con L la longitudine ΥS del Sole vero, con t la longitudine media $\Upsilon S'$, o l'AR media $\Upsilon S''$, e con α l'ascensione retta del Sole vero, sarà $L-t$ l'equazione del centro, ed $L-\alpha$ la differenza fra la longitudine e l'ascensione retta del Sole vero, differenza che per comodità chiameremo *equazione dell'obliquità*. In generale l'equazione del tempo è la differenza fra l'equazione del centro e l'equazione della obliquità. In fatti, se si suppone l'ascensione retta α del Sole vero S maggiore dell'ascensione retta t del sole medio S'', quest'ultimo passerà al meridiano prima del Sole vero per un tempo eguale ad $\frac{\alpha-t}{15}$; ed al momento del passaggio di S l'ora vera sarà *zero*, e l'ora media $\frac{\alpha-t}{15}$. La differenza $\frac{\alpha-t}{15}$ rappresenta dunque l'equazione del tempo, che indicheremo con E, onde si avrà, $E=\frac{\alpha-t}{15}=\frac{(L-t)-(L-\alpha)}{15}$, e tralasciando

il denominatore, che serve soltanto a cambiar l'arco in tempo, sarà;

$$E=(L-t)-(L-\alpha);$$

cioè *l' equazione del tempo è la differenza fra l' equazione del centro e l' equazione dell' obliquità.*

*§. 150. Questa espressione dell'equazione del tempo serve a dar ragione de' mutamenti cui va soggetta una siffatta quantità. Da ciò che si è detto di sopra risulta che l'equazione del centro $L-t$ è nulla due volte l'anno nei punti A,P, ed è positiva nella metà dell' ecclittica $P♈A$, negativa nell' altra metà. Da un'altra parte, poichè le longitudini del Sole sono eguali alle sue ascensioni rette nei punti equinoziali e nei solstiziali, l'equazione dell'obliquità sarà nulla nei quattro punti ♈, ♋, ♎, ♑. Inoltre da ♈ a ♋ la longitudine è maggiore dell' ascensione retta, perchè nel triangolo sferico rettangolo $S♈m$, che ha i lati minori del quadrante l' ipotenusa è maggiore di un cateto; e quindi la differenza $L-\alpha$, o sia l'equazione dell'obliquità è positiva. Da ♋ a ♎, la longitudine è minore dall'ascensione retta, perchè nel triangolo rettangolo KL♎, l'ipotenusa K♎ è maggiore di L♎, ed una relazione contraria si verifica fra i supplementi di questi archi $♈♋K, ♈EL$, onde nel quadrante ♋♎ l'equazione dell'obliquità è negativa. Nel quadrante ♎♑, le longitudini essendo maggiori delle ascensioni rette l'equazione ritorna ad essere positiva, e nell'ultimo quadrante ♑♈ dell' ecclittica l'equazione è nuovamente negativa. Da tutto ciò si desume che;

1.° Le differenze $L-t$, ed $L-\alpha$, non annullandosi mai insieme, l'equazione del tempo, $E=(L-t)-(L-\alpha)$ non sarà nulla in nessuno de' punti ♈, ♋, A, ♎, ♑, P della ecclittica.

2.° Non potrà l'equazione del tempo divenir nulla se non quando le equazioni $L-t, L-\alpha$ sono dello stesso segno; e quindi potrà divenir nulla nell' arco ♈♋, in cui l' equazioni del centro e della obliquità sono ambedue positive, nell'arco A♎, e nell'altro ♑P, in cui sono ambedue negative. Nei rimanenti tre archi dell' ecclittica ♋A, ♎♑, P♈, l'equazioni del centro e della obliquità essendo di segni contrarii, vengono ad essere aggiunte insieme per formare l'equazione del tempo, la quale per questa ragione può in quelle parti dell'ecclittica giungere al suo valor massimo.

Nel fatto poi l' eccentricità dell' orbita solare, e la sua inclinazione sull' equatore sono tali, che l' equazione dell' obliquità, la quale comincia da zero e finisce a zero in ogni quadrante, nel suo massimo aumento è sempre maggiore della equazione del centro; essendo il maggior valore di questa eguale ad 1°. 55'. 33'' circa, laddove la massima equazione dell' obliquità giunge a 2°. 28'. 20''. Il calcolo della prima dipende dalle formole del moto ellittico, e ci allontaneremmo troppo dal nostro scopo se volessimo quì esporlo; ma il calcolo della seconda è molto facile.

Nel triangolo rettangolo ΥSm si ha, $\cot \Upsilon S = \cot m\Upsilon \cos S\Upsilon m$, da cui, indicando con ε l' obliquità dell' eclittica si ottiene,

$\cot L = \cot \alpha \cos \varepsilon$; e quindi $\tan \alpha = \tan L \cos \varepsilon$,

$\tan L - \tan \alpha = \tan L (1 - \cos \varepsilon) = 2 \tan L \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varepsilon$;

$\frac{\operatorname{sen}(L-\alpha)}{\cos L \cos \alpha} = 2 \tan L \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varepsilon$, e prendendo il valore di $\operatorname{sen}(L-\alpha)$,

$\operatorname{sen}(L-\alpha) = 2 \operatorname{sen} L \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varepsilon$

$= \{\operatorname{sen}(L+\alpha) + \operatorname{sen}(L-\alpha)\} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varepsilon$,

$\operatorname{sen}(L-\alpha)\{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varepsilon\} = \operatorname{sen}(L+\alpha) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varepsilon$; ed in fine

$\operatorname{sen}(L-\alpha) = \operatorname{sen}(L+\alpha) \tan^2 \frac{1}{2} \varepsilon$.

Ora, essendo $L-\alpha$ un piccolo arco, esso sarà massimo quando è massimo il suo seno: prendendo perciò il coefficiente differenziale del secondo membro della equazione precedente, ed uguagliandolo a zero, si conoscerà il valore di $L+\alpha$ corrispondente al massimo valore di $L-\alpha$. Sarà,

$$\cos(L+\alpha) \tan^2 \tfrac{1}{2} \varepsilon = 0;$$

la quale eguaglianza, essendo ε costante, deve esser soddisfatta da $\cos(L+\alpha) = 0$, ossia da $L+\alpha = 90°$. Ripigliando dunque l' equazione superiore,

$$\operatorname{sen}(L-\alpha) = \operatorname{sen}(L+\alpha) \tan^2 \tfrac{1}{2} \varepsilon,$$

si avrà nel caso del massimo

$$\operatorname{sen}(L-\alpha) = \tan^2 \tfrac{1}{2} \varepsilon,$$

da cui, facendo $\varepsilon = 23°.28'$, si ottiene,

$$L-\alpha = 2°.28'.20'',$$

come è detto di sopra; e di più

$L = \frac{1}{2}(L+\alpha) + \frac{1}{2}(L-\alpha) = 45° + 1°.14'.10.''$

$L = 46°.14'.10''$.

*§. 151. Posti questi principii, ecco l'andamento della equazione del tempo in tutta la periferia dell'ecclittica. Nel primo quadrante Υ♋, l'equazione del tempo risulta dalla differenza delle due quantità positive $L-t, L-\alpha$, delle quali la seconda comincia da zero nel punto Υ, cresce e perviene al suo massimo, che è sempre maggiore di $L-t$, e da quel punto diminuisce per terminare di nuovo a zero nel punto ♋. Per la qual cosa, la medesima quantità $L-\alpha$ deve uguagliare due volte $L-t$, una nel crescere verso il suo massimo, l' altra nel decrescere verso lo zero; il che accade appunto nel 15 aprile e nel 15 giugno, siccome è indicato sulla figura, dove si è preso $S''\Upsilon = S'\Upsilon$. Dunque da Υ sino al 15 aprile, $L-t$ essendo maggiore di $L-\alpha$, l'equazione del tempo

sarà positiva; nel 15 aprile sarà nulla, e dal 15 aprile al 15 giugno sarà negativa perchè $L-\alpha$ è maggiore di $L-t$. In maggio, per esempio, prendendo sulla figura $o\Upsilon=S\Upsilon$, ed $S''\Upsilon=S'\Upsilon$, si osserva essere l'equazione del tempo $S''m$ differenza fra l'equazione om dell'obliquità e l'equazione del centro $SS'=oS''$. Nel 15 giugno l'equazione del tempo ritornerà nulla, e da quel giorno sino al solstizio si cambierà nuovamente in positiva.

Nell'arco ♋A compreso fra il solstizio e l'apogeo, $L-t$ è positiva ed $L-\alpha$ negativa, per cui l'equazione del tempo $E=(L-t)-(L-\alpha)$ è positiva. Continuerà poi ad esserlo dopo l'apogeo, perchè, quantunque $L-t$ divenga negativa, è però minore di $-(L-\alpha)$, che continua ad essere una quantità positiva. Più innanzi, la stessa equazione $L-\alpha$, dopo esser passata pel suo massimo, deve andar diminuendo per indi annullarsi nell'equinozio ♎, ed in questa diminuzione giungerà nel 1.° settembre ad eguagliare $L-t$; onde l'equazione del tempo sarà nulla in quel giorno; e diverrà poscia negativa dal 1.° settembre sino all'equinozio di autunno, per essere in tale intervallo di tempo $L-\alpha < L-t$, fatta astrazione dai segni.

In tutto il quadrante ♎♑ l'equazione del tempo è negativa, ed acquista il suo massimo valore numerico verso i principii di novembre, siccome è indicato dalla figura, dove l'equazione del tempo $S''m$ si vede risultare dalla somma delle due equazioni oS'', om del centro e della obliquità. Fra il solstizio d'inverno ed il perigeo, siccome l'equazione del centro diminuisce, e cresce l'equazione dell'obliquità, esse si uguagliano nel dì 24 decembre, ed avendo lo stesso segno annullano l'equazione del tempo in quel giorno. Finalmente dal perigeo all'equinozio di primavera le equazioni del centro e dell'obliquità prendono segni diversi, e sommandosi insieme, producono verso la metà di febbrajo la massima equazione del tempo positiva.

*§. 152. In quanto al massimo valore numerico della equazione del tempo, per averne una idea basta osservare che esso non potrebbe esser maggiore della somma delle massime equazioni del centro e della obliquità, cioè di $\dfrac{1^{\circ}.55'.30''+2^{\circ}.28'.20''}{15}=17^{m}.35^{s}$ di tempo; ma siccome le massime equazioni del centro e dell'obliquità non si verificano insieme, così il maggior valore numerico dell'equazione del tempo è di $16^{m}.16^{s}$ circa, verso il 3 del mese di novembre.

Del tempo sidereo.

§. 153. Abbiamo già fatto osservare che l' ascensione retta di un astro divisa per 15 rappresenta il tempo sidereo del suo passaggio pel meridiano; onde il tempo sidereo corrispondente ad un istante qualunque eguaglia l' *AR* di un astro che in quell' istante trovasi nel meridiano, o sia l' *AR* del meridiano stesso, che si chiama ancora ascensione retta del mezzo del cielo, o dello zenit [§§. 32, 33]. Partendo da questo principio, sarà facile trovare la relazione che passa fra il tempo sidereo ed il tempo vero, e fra il tempo sidereo ed il tempo medio. L' *AR* del Sole vero, nel momento in cui l' astro passa pel meridiano, o sia a mezzo giorno vero, divisa per 15 rappresenta il *tempo sidereo a mezzodì vero;* e similmente l' *AR* del Sole medio, quando passa pel meridiano, cioè a mezzogiorno medio, eguaglia il *tempo sidereo a mezzodì medio.* L' ascensione retta del Sole vero, si chiama *ascensione retta apparente* (visibile, attuale) *del Sole,* e l' ascensione retta del Sole medio è, come abbiamo veduto, [§. 148] l' *AR* media del Sole; e poichè la longitudine media del Sole eguaglia la sua *AR* media [§. ivi] si potrà dire che il tempo sidereo a mezzogiorno medio è eguale alla longitudine media del Sole in quell' istante divisa per 15. Se non che la longitudine media del Sole, dovendo essere proporzionale al tempo per poter servire di base al calcolo di un luogo del Sole ad un' epoca qualunque, si conta dall' *equinozio medio,* affinchè non vada soggetta alle mutazioni periodiche dell' equinozio apparente [§. 135]: ed al contrario l' ascensione retta media, che deve paragonarsi all' *AR* apparente del Sole, per ottenere l' equazione del tempo, è necessariamente contata dall' *equinozio apparente.* Dunque l' *ascensione retta media del Sole eguaglia la longitudine media accresciuta della nutazione*, e quindi le due formole che stabiliscono le relazioni del tempo sidereo col tempo vero e col tempo medio saranno;

$$\textit{Tempo sidereo a mezzogiorno vero} = \frac{AR\ \textit{apparente}\odot}{15}$$

$$\textit{Tempo sid. a mezzog. medio} = \frac{AR\,\textit{media}\odot}{15}$$

$$= \frac{\textit{Long. media}\odot + \textit{Nutazione}}{15}$$

§. 154. In quanto alla durata del giorno sidereo messa in rapporto con quella del giorno medio, osserviamo che gli astronomi contano 24^h sideree fra due consecutivi passaggi dell' equi-

nozio *apparente* pel meridiano, e 24^h medie fra due consecutivi passaggi del sole medio. Ora, supponendo che nel giorno 21 Marzo il sole medio e l'equinozio apparente passino insieme per un dato meridiano, in questa ipotesi cominceranno contemporaneamente un giorno sidereo ed un giorno medio; e quando, dopo 24^h siderее, il punto equinoziale sarà tornato al meridiano, non vi si troverà ancora il sole medio, ma la sfera celeste per ricondurvelo dovrà continuare a girare per un angolo eguale all' *AR* acquistata nelle 24 ore dal sole medio [§. 146], la quale deve considerarsi eguale al moto medio diurno del Sole in longitudine, senza incaricarsi della nutazione [§§. 148, 153] che affetta egualmente il tempo sidereo ed il tempo medio, e nella loro differenza svanisce. Dunque 24^h medie equivalgono a 24^h sideree più un intervallo di tempo sidereo eguale al moto medio diurno del Sole in longitudine diviso per 15. E siccome il Sole compie in un anno tropico il giro dell' ecclittica rispetto all' equinozio, o sia la sua longitudine cresce di 360^o, in $365^{gior},242220$, così il moto medio diurno del Sole in longitudine si otterrà [§§. 107, 108] dalla divisione di $360^o = 21600'$ per 365,242220, e sarà

$$\textit{moto medio diurno del Sole} = \frac{360^o}{365,242220} = 59'.8'',33020.$$

Dividendo questo numero per 15 si ha $3'.56'',55535$, e però *il giorno medio equivale ad ore sideree* $24^h.3'.56'',55535$. Riduciamo i minuti e secondi in frazione decimale di ora, ed indi di giorno con la divisione per 24, ed avremo ancora

$$1^{gior.med} = 1^{gior.sid} + 0^{g.s},0027379091 = 1^{g.s}\{1,0027379091\}$$

da cui si desume,

$$1^{g.s} = \frac{1^{g.m}}{1,0027379091} = 0^{g.m},9972695666$$

E riducendo inversamente questa frazione di giorno medio in ore minuti e secondi, potremo stabilire le seguenti relazioni,

$$24^{h.s} = 23^{h.m}56'.\ 4'',09055$$
$$24^{h.m} = 24^{h.s}\ 3'.56'',55535\ ;$$

dalle quali si cavano le altre

$$1^{h.s} = 0^{h.m}59'.50'',17\ ;\ 1^{h.m} = 1^{h.s}.0'.9'',86$$
$$1'^{.s} = 0'^{.m}59'',836\quad ;\ 1'^{.m} = 1'^{.s}.0'',164$$

È chiaro poi che il rapporto di ogni frazione di tempo medio alla simile frazione di tempo sidereo è costante, ed è quello che si è trovato per i giorni, che sono quantità egualmente moltiplici delle frazioni di tempo simili. Per la qual cosa, indicando con *t*

una durata di tempo medio e con Σ la simile durata di tempo sidereo si avrà,

$$\frac{t}{\Sigma}=1,0027379091\ ;\ \frac{\Sigma}{t}=0,9972695666$$

Queste formole servono a ridurre in tempo sidereo un dato intervallo di tempo medio, e viceversa; così 15′ di tempo medio equivalgono a $15'\times1,0027379...$ di tempo sidereo, e 50′ di tempo sidereo corrispondono a $50'\times0,997269...$ di tempo medio. Siffatte riduzioni si eseguono più agevolmente per mezzo di una tavola, che si trova in quasi tutte le effemeridi astronomiche, ed è facile a costruirsi.

*§. 155. Da quanto precede si possono dedurre alcune importanti relazioni fra i tre tempi, vero, medio, e sidereo. Rappresentino NN' il meridiano [*fig.* 33], ΥE l'equatore, S il punto dell'equatore che ha la medesima ascensione retta del Sole vero, (e che, trattandosi del tempo, è permesso di porre in luogo del Sole stesso) S'' il sole medio; sarà ΥS l'AR apparente del Sole a mezzodì vero, e $\Upsilon S''$ l'AR media per lo stesso istante, e quindi l'arco SS'' dinoterà l'equazione del tempo [§. 149.]. Facciamo $\Upsilon S=\alpha$, $\Upsilon S''=t$, $SS''=E$, ed avremo $t=\alpha-E$, la quale eguaglianza dà l'ascensione retta media del Sole a mezzogiorno vero espressa per l'ascensione retta apparente e l'equazione del tempo. Ma volendo l'ascensione retta media a mezzodì medio, bisogna considerare che, nel caso della figura, mezzogiorno medio precede mezzogiorno vero, e però situando il sole medio nel meridiano, l'ascensione retta media richiesta che è rappresentata da $\gamma s''$ deve esser minore di $\Upsilon S''$, perchè l'AR media cresce proporzionalmente al tempo. Per la medesima ragione, la differenza fra $\Upsilon S''$ e $\gamma s''$ è l'aumento che riceve l'AR media nel tempo interposto fra mezzogiorno medio e mezzogiorno vero, cioè nel tempo $\frac{E}{15}$; e poichè l'AR media in 24^h medie cresce di $59'.8'',33$, il suo aumento nel tempo $\frac{E}{15}$ sarà dato dalla proporzione;

$$24^h:\frac{E}{15}::59'.8'',33:x=E\frac{59'.8'',33}{15\times24}=E(0,0027379..),\ [\text{§. prec.}].$$

Quindi si avrà,

$$\begin{aligned}\gamma s''&=\Upsilon S''-E(0,0027379...)\\&=\alpha-E-E(0,0027379...)\\&=\alpha-E(1,0027379...).\end{aligned}$$

Indicando con t' l'ascensione retta media $\gamma s''$ a mezzogiorno me-

dio, dividendo per 15, e riprendendo anche l'eguaglianza precedente sarà,

$$(k)\ldots\begin{cases}\dfrac{\alpha}{15}=\dfrac{t}{15}+\dfrac{E}{15}\\[2mm]\dfrac{\alpha}{15}=\dfrac{t'}{15}+\dfrac{E}{15}(1{,}0027379\ldots)\end{cases}$$

Ma $\frac{\alpha}{15}$ rappresenta il tempo sidereo a mezzogiorno vero, $\frac{t}{15}$ l'*AR* media del Sole a mezzogiorno vero ridotta in tempo, $\frac{t'}{15}$ il tempo sidereo a mezzogiorno medio, $\frac{E}{15}$ l'equazione del tempo a mezzodì vero, ed il coefficiente 1,0027379... è quello che si adopera per ridurre un intervallo di tempo medio in tempo sidereo [§. 154.]; dunque le equazioni (k) potranno enunciarsi come segue:

1.° *Il tempo sidereo a mezzodì vero, o sia l' AR apparente del Sole espressa in tempo, è eguale all' AR media del Sole accresciuta dell' equazione del tempo, calcolate ambedue per mezzogiorno vero.*

2.° *Il tempo sidereo a mezzodì vero eguaglia il tempo sidereo a mezzodì medio accresciuto dell' equazione del tempo a mezzogiorno vero ridotta in tempo sidereo.*

La figura 33 dà pure l'eguaglianza $\gamma s''=\gamma s-ss''$, che può tradursi così in linguaggio comune;

3.° *Il tempo sidereo a mezzogiorno medio risulta dalla differenza fra l' AR apparente del Sole e l' equazione del tempo calcolate per quell' istante.*

S'intende già che nelle tre precedenti relazioni bisogna sempre adoperare l'equazione del tempo col proprio segno; così in Ottobre, quando l'equazione del tempo è negativa, il tempo sidereo a mezzogiorno vero eguaglia il tempo sidereo a mezzogiorno medio *diminuito* dell'equazione del tempo, fatta attrazione dal segno.

*§. 156. A maggior chiarezza delle cose dette sinora dobbiamo avvertire che l'equazione del tempo SS'' varia ad ogni istante, ma varia (come è evidente) della differenza degli aumenti che ricevono contemporaneamente l'*AR* apparente del Sole e l'*AR* media. La differenza fra $\Upsilon S''$ e $\gamma s''$ trovata di sopra è perciò molto maggiore della differenza fra SS'' ed ss'', e non ha con essa alcuna immediata relazione; dimodochè la differenza $\Upsilon S''-\gamma s''$ è sempre positiva (quando il Sole medio precede il Sole vero nel meridiano), laddove la differenza $SS''-ss''$ potrebbe essere positiva e negativa.

La discussione precedente intorno ai tempi *vero*, *medio* e *sidereo* basta per comprendere il significato delle quantità contenute nelle prime due pagine di ciascun mese dell' *Almanacco nautico.*

Del Calendario.

§. 157. L'anno tropico è il ritorno del Sole al punto equinoziale di primavera, ed equivale a $365^{gior},242220$. Esso non contiene perciò un numero intero di giorni, e non potendosi negli usi della vita troncare un giorno dopo che n' è trascorsa una parte, per dar principio ad un nuovo giorno e ad un nuovo anno, l'idea più semplice è quella di fare l'anno di 365 giorni, trascurando la frazione, che vale poco meno di 6 ore. Ma supponendo che in un dato anno e per un dato luogo il Sole si trovi nel pnnto equinoziale precisamente a mezzodì del 21 di Marzo, l' anno seguente vi si troverà 6 ore dopo, il secondo anno 12^h dopo, il terzo anno 18^h dopo, ed il quarto 24^h dopo; per modo che, se ciascuno de' quattro anni si facesse di 365 giorni, in soli 4 anni l' istante dell' equinozio ritarderebbe di un giorno, ed in un secolo la primavera in vece di cominciare il 21 di Marzo, incomincerebbe il 15 di Aprile. Continuando così, le stagioni dalla nascita di Gesù Cristo sinora avrebbero compito il giro di tutti i mesi dell' anno, e sarebbero in un secondo periodo del loro perpetuo rivolgimento. *Giulio Cesare* sentì primo il bisogno di una correzione del calendario, e col consiglio di *Sosigene* introdusse gli anni *bisestili*; cioè fece tre anni consecutivi di 365 giorni, ed il quarto che chiamò *bisestile* di 366, prolungando di un giorno il mese di Febbrajo, affinchè il mese di Marzo cominciasse un giorno più tardi, e l'equinozio si mantenesse sempre nel giorno 21 dello stesso mese. Questo modo di computare il tempo è detto *calendario giuliano*, e suppone l' anno di $365^g \frac{1}{4}$ esattamente, il che non è rigorosamente vero, poichè la frazione di giorno che compie l' anno non è $0^g,25$ ma $0^g,242220$. L' errore in più di $0^g,00778$ produsse nel corso di 15 secoli, da Cesare sino a *Papa Gregorio XIII*, un notabile movimento retrogrado nel giorno dell' equinozio, il quale in quell' epoca accadeva il giorno 11 Marzo in vece del giorno 21. Il pontefice propose perciò ai matematici il problema della riforma del calendario, la quale dovesse abbracciare anche il calendario lunare per la celebrazione delle feste mobili della chiesa; e la soluzione datane dal dottor *Lilio* medico calabrese fu preferita ad ogni altra ed approvata.

Rispetto al calendario solare, si osservò che la frazione $0^g,24222$ moltiplicata per 400 dà $96^g,888$, vale a dire che in 400 anni i giorni da aggiungersi in vece di essere 100, secondo il calendario giuliano (uno ogni 4 anni), dovevano essere 97, con un piccolo errore; e però nell' indicato periodo di 400 anni

dovevano sopprimersi tre anni bisestili. La regola semplicissima data per l'*intercalazione* de' bisestili fu la seguente;

In ogni 4 anni si faccia un anno bisestile, secondo la regola giuliana, eccettuando però in 400 anni gli anni secolari primo, secondo e terzo, che dovranno esser comuni, e facendo bisestile il quarto anno secolare.

Siccome nell'anno 1582, in cui fu eseguita la riforma, l'equinozio era accaduto, come si è detto, il dì 11 Marzo in vece del 21, per rimediare a questo errore il decreto pontificio comandò ancora la soppressione di 10 giorni, ed il dì 5 ottobre fu chiamato 15. Approssimandosi inoltre l'anno secolare 1600 fu stabilito che dovesse essere il bisestile secolare voluto dall'intercalazione; per modo che la riforma gregoriana potette essere posta a cognizione di tutti formulandola come segue;

Tutti gli anni dell'era volgare la cui cifra è divisibile per 4 saranno bisestili, come pure tutti gli anni secolari divisibili per 4; e si faranno comuni gli anni secolari non divisibili per 4. Per esempio è stato *bisestile* il 1844 e lo sarà il 1848: sono stati *comuni* gli anni secolari 1700 e 1800, perchè 17 e 18 non sono divisibili per 4, e sarà comune anche il 1900, e bisestile il 2000.

Paragonando il calendario giuliano col gregoriano è da notare che *nel secolo attuale differiscono di 12 giorni,* cioè 10 giorni soppressi per decreto di Papa Gregorio, e due per la soppressione de' bisestili secolari 1700, e 1800.

Si è veduto che il numero de' giorni da intercalarsi in 400 anni non era precisamente 97 ma 96,888. Questo piccolissimo errore produrrà un giorno di più in 3571 anni, e però ogni 4000 anni circa converrà sopprimere un nuovo bisestile.

§. 158. *Ciclo solare.* Il numero 365 diviso per 7 dà per quoziente 52 e per resto 1; e quindi ogni anno comune contenendo 52 settimane ed un giorno, finisce con lo stesso giorno della settimana col quale è cominciato. Per questa ragione se un anno comune incomincia da domenica il seguente anno dovrà incominciare da lunedì, il terzo anno da martedì etc, e senza l'intervento dei bisestili, ogni sette anni si ristabilirebbe il principio dell'anno agli stessi giorni della settimana; i bisestili turbano la regola, ed è facile persuadersi che se un anno bisestile è incominciato con un dato giorno della settimana, non potrà un altro anno bisestile incominciare con lo stesso giorno se non dopo 28 anni, prodotto di 7 per 4. Così l'anno bisestile 1820 incominciò con sabato, e non vi è stato, e non vi sarà prima del 1848 altro anno bisestile che abbia lo stesso principio. A questo periodo di 28 anni, che riconduce i bisestili insieme ai giorni della settimana con i quali incominciano, si è dato il nome di *ciclo solare.* Essendosi fatto incominciare un primo ciclo solare 9 anni innanzi l'era volgare, da quella epoca in poi sono trascorsi molti cicli,

ed ogni anno dell' era volgare ha avuto un anno di ciclo che gli corrispondeva; così il 1846 corrisponde al *settimo* anno di un ciclo solare. Questo numero si ottiene facilmente *aggiungendo all' anno proposto il numero 9, e dividendo la somma per 28, la quale divisione dà per quoziente il numero de' cicli interi trascorsi, e per resto l' anno del ciclo, che prende anche il nome di* ciclo solare, *e si trova notato in ogni calendario.*

Con un calcolo analogo si risolve il problema molto più importante di *trovare il giorno della settimana col quale incomincia un anno proposto.* Sapendosi che l' anno 1 dell' era volgare cominciò con *sabato*, non sarà difficile dar ragione della seguente regola.

Sia n l' anno proposto; dividete $n-1$ per 4, e *la parte intera del quoziente rappresenterà il numero di bisestili revoluti nell' ipotesi del calendario giuliano. Aggiungete a questo numero l' altro $n-1$, indicante il numero de' giorni superanti le settimane complete in $n-1$ anni comuni. Dalla somma togliete i giorni soppressi dalla riforma gregoriana (che nel secolo attuale sono 12); dividete la differenza per 7, e portate il resto della divisione accresciuto dell' unità nella seguente tavoletta, che rappresenta la prima settimana dell' anno* 1 *dell' era volgare; troverete a fianco del numero il nome del giorno della settimana col quale comincia l' anno proposto.*

1	*Sabato*	4	*Martedì*	7, *o* zero	*Venerdì*
2	*Domenica*	5	*Mercordì*		
3	*Lunedì*	6	*Giovedì*		

Per esempio, volendo conoscere il giorno della settimana col quale comincerà l'anno 1848, si dividerà 1847 per 4, ed al quoziente 461 aggiunto lo stesso 1847 si avrà 2308, da cui tolto 12 si otterrà 2296, che diviso per 7 darà per resto *zero,* al quale aggiunta l' unità, si avrà infine il numero 1 che nella tavoletta corrisponde a *Sabato.*

§. 159. *Lettera domenicale.* I primi sette giorni dell' anno sono per convenzione contrassegnati dalle prime sette lettere dell' alfabeto, e siccome cambia continuamente il giorno della settimana col quale comincia l' anno, cambiano pure ogni anno i giorni della settimana corrispondenti a quelle lettere. Così, quando l'anno incominciasse da sabato, la seguente *domenica* sarebbe segnata con la lettera *B*, e continuando dopo la prima settimana, a notare tutte le altre con le medesime lettere, tutte le *domeniche* dell'anno sarebbero segnate con la lettera *B*. Ecco cosa deve intendersi per *lettera domenicale* ed è chiaro che, conoscendosi il giorno della settimana col quale incomincia l' anno, si trova subito la lettera domenicale che gli compete.

L' anno seguente a quello comune che incominciò con sabato

deve, per ciò che si è detto di sopra, cominciare da domenica, onde la lettera domenicale per quest' anno sarebbe *A*. Le lettere domenicali variano dunque per i diversi anni, e vanno retrogradando di un luogo nella serie *A,B,C,D,E,F,G*. Gli anni bisestili, contenendo un giorno di più de' comuni, fanno retrogradare la lettera domenicale di due luoghi, e però sogliono darsi a quelli anni due lettere domenicali.

§. 160. *Epatta*. Si è veduto che ogni lunazione contiene $29^{gior.}12^{h}.44'.2'',86$ [§. 109] cioè 29 giorni e mezzo circa. Questo periodo di tempo si chiama *mese lunare*, e se si volesse comporre l' anno di 12 mesi lunari, esso non avrebbe più di 354 giorni. L' anno solare comune eccede dunque l'anno lunare di 11 giorni, per modo che, se un anno qualunque incominciasse insieme con una lunazione, ossia nell' istante del novilunio, terminerebbe con l' undecimo giorno della lunazione, o come suol dirsi, quando la Luna ha 11 giorni di *età*. Si chiama *Epatta* di un anno l' età della Luna alla fine dell' anno precedente, ossia al *zero* Gennajo dell' anno che si considera. Se la lunazione fosse esattamente di 29 giorni e mezzo, è chiaro che, conoscendo l'epatta di un dato anno, si potrebbe con facilità trovare quella di un altro anno qualunque, tenendo conto degli 11 giorni di differenza fra l' anno lunare e l' anno solare comune e dei giorni aggiunti dai bisestili intermedi. Data poi l' epatta dell' anno si ottengono subito i giorni del novilunio e del plenilunio nei diversi mesi dell' anno medesimo, facendo le lunazioni di 30 giorni e di 29 alternativamente, secondo la convenzione; ed a questo uso propriamente furono immaginate le *epatte*.

§. 161. *Ciclo lunare*. La lunazione eccede 29 giorni e mezzo di $44'.2'',86$, e questa differenza moltiplicandosi col tempo, rende necessaria una correzione agli 11 giorni di cui annualmente crescono le epatte. *Metone* trovò un periodo di tempo che fu detto *ciclo lunare*, il quale riconduce le lunazioni agli stessi giorni dell' anno con un piccolo errore. Moltiplichiamo la rivoluzione sinodica della Luna per 235, e l' anno giuliano di $365^{g}.\frac{1}{4}$ per 19, ed avremo

235 *lunazioni medie*................ $= 6939^{g}.16^{h}.32'.12''$
19 *anni giuliani*.................. $= 6939^{g}.18\,.\;0\,.\;0$

Differenza............... $1^{h}.27'.48''$

Da questa notabile coincidenza si desume che, se in un determinato giorno di un dato anno accade un novilunio, dopo 19 anni giuliani il novilunio si verificherà nello stesso giorno, anticipando soltanto di $1^{h}.27'.48''$. Per la qual cosa, supponendo che nel corso di 19 anni giuliani, o sia di un intero ciclo, si notino i giorni e gli anni del ciclo ne' quali accadono le varie

fasi della Luna, è evidente che nei cicli seguenti la Luna riprenderà le medesime fasi negli stessi giorni de' rispettivi anni; così, per esempio, se nel zero Gennajo dell'anno 4 di un ciclo l'età della Luna fu di 3 giorni, dopo 19 anni giuliani, cioè al zero Gennajo dell'anno 4 del ciclo seguente, l'età della Luna sarà anche di tre giorni. Ed in generale le fasi della Luna si succederanno con lo stesso ordine in tutti gli anni corrispondenti dei successivi cicli; e poichè il numero indicante l'anno di un ciclo si chiama *numero d'oro*, o *aureo numero*, le fasi della Luna saranno le stesse per tutti gli anni che avranno il medesimo aureo numero. Questa regola si applica specialmente alle epatte, per modo che determinate le epatte per tutti i 19 anni di un ciclo, esse rivengono le stesse nel ciclo seguente; e però sapendosi un dato anno dell'era cristiana a quale anno del ciclo lunare corrisponde, o sia conoscendosi il numero d'oro dell'anno proposto, sarà conosciuta l'epatta che gli compete.

Ma anche il piccolo errore di $1^h.27'.48''$ del ciclo lunare diviene apprezzabile col volgere de' secoli, e se n'è tenuto conto nel calcolo delle epatte aggiungendo ad esse un giorno in ogni 300 anni, o più esattamente 8 giorni in 2500 anni, e questa correzione si è chiamata *equazione lunare*.

È da avvertire che quantunque il computo delle epatte ora accennato si faccia dipendere dal calendario giuliano, pure l'epatta giuliana si cambia subito in gregoriana sottraendone i giorni soppressi dalla riforma, che nel secolo attuale sono 12.

§. 162. *Celebrazione della Pasqua.* Quanto precede ha una immediata relazione con la celebrazione della Pasqua secondo la chiesa. Imperocchè il concilio di Nicea stabilì che *la Pasqua dovesse celebrarsi la domenica seguente il giorno XIV della Luna posteriore al 21 Marzo di ciascun anno.* La celebrazione della Pasqua dipende dunque dalla conoscenza del giorno di Marzo o di Aprile che segue l'equinozio e corrispoude al giorno XIV della Luna. Determinato un siffatto giorno, deve anche conoscersi il suo nome fra i giorni della settimana, affinchè dato il giorno del mese e della settimana che coincide col giorno XIV della Luna posteriore all'equinozio, possa stabilirsi la celebrazione della Pasqua per la seguente domenica. Laonde il calcolo della Pasqua si riduce a determinare l'epatta ed il giorno della settimana col quale comincia l'anno; perocchè dall'epatta si desume immediatamente il novilunio di Gennajo e quindi quello di Marzo, e dal giorno della settimana corrispondente al 1.° di Gennajo si può subito dedurre il giorno della settimana corrispondente a qualunque altro giorno dell'anno. Calcolata la Pasqua, si hanno ancora tutte le altre feste mobili, per essere determinate le loro distanze da quella festa principale. Lo scopo di quest'opera non ci permette di entrare in altri particolari, e ci basta solo di aver

date ai giovani le principali definizioni del calendario. Nondimeno aggiungeremo la seguente semplicissima regola del celebre Dottor *Gauss* per calcolare la Pasqua.

Regola di Gauss per calcolare la Pasqua.

Si *divida*	*per*	*e si chiami il resto*
L'anno dato	19	. . . a
L'anno dato	4	. . . b
L'anno dato	7	. . . c
Il numero $19a+M$	30	. . . d
Il numero $2b+4c+6d+N$	7	. . . e

La Pasqua si celebrerà nel giorno $22+d+e$ *di Marzo*, essendo i numeri M, N dati dalla seguente tavola;

Dal 1600	*al* 1699	$M=22, N=2$
1700	1799	$M=23, N=3$
1800	1899	$M=23, N=4$
1900	1999	$M=24, N=5$
2000	2099	$M=24, N=5$
2100	2199	$M=24, N=6$
2200	2299	$M=25, N=0$
2300	2399	$M=26, N=1$
2400	2499	$M=25, N=1$
	etc. etc.	

Questa regola soffre due eccezioni

1.ª *Se il calcolo dà la Pasqua al 26 di Aprile si prenderà in vece il 19.*

2.ª *Se il calcolo dà il 25 Aprile, e si abbia nello stesso tempo* $d=28$, $e=6$, *si prenderà in vece il* 18 *Aprile*.

Vogliasi, per esempio, conoscere la Pasqua dell' anno 1848, sarà $a=5$, $b=0$, $c=0$, $d=28$, $e=4$; e quindi la Pasqua dovrà celebrarsi il giorno $22+28+4=54$ di Marzo, ossia il 23 Aprile.

È da avvertire che il calcolo delle epatte, sul quale è fondato quello della Pasqua, fu sin da principio regolato col *moto medio* della Luna, e con le ingegnose intercalazioni di cui si è fatto un cenno di sopra. Ma il novilunio ottenuto dalle epatte può differire notabilmente dal novilunio *vero* astronomico ed anche dal novilunio *medio*, a cagione della necessaria imperfezione delle intercalazioni. Queste differenze possono giungere sino ad uno o due giorni. Ciò non ostante il sistema delle epatte ecclesiastiche è stato immaginato per regolare la celebrazione della Pasqua a perpetuità, senza dipendere dalle effemeridi astronomiche, cui si dovrebbe ri-

correre volta per volta, se si volessero regolare le festività della chiesa col moto vero della Luna (*).

§. 163. *Indizione romana.* Sotto l'imperatore *Costantino*, e dopo ancora per molto tempo, fu adoperato negli atti pubblici l'*indizione romana* che è un periodo di 15 anni. Dall'anno 312 dell'era volgare in cui fu introdotto l'uso delle indizioni, risalendo al principio dell'era stessa, si vede che una indizione dovette incominciare tre anni avanti Gesù Cristo. Quindi per trovare l'indizione si usa la seguente regola =

All' anno proposto aggiungete 3, e dividete la somma per 15; il resto della divisione indicherà l'anno dell' indizione romana corrispondente all' anno dato, che ne' calendarii prende anche il nome d' indizione. *Se il resto è zero l' indizione sarà 15.*

§. 164. *Periodo giuliano.* Moltiplicando fra loro i numeri 28, 19, e 15, cioè il ciclo solare, il ciclo lunare e l'indizione romana, si ottiene il numero 7980, che fu detto *periodo giuliano* da *Scaligero*, il quale lo immaginò per facilitare i calcoli della cronologia, e lo fece incominciare 4713 anni avanti l'era volgare. Suppose dunque Scaligero che nell'anno 4713 avanti Gesù Cristo fossero cominciati insieme un ciclo solare, un ciclo lunare, ed una indizione, e poichè i numeri 28, 19, 15 sono primi fra loro, è chiaro che i tre periodi non potranno terminare insieme se non colla fine del periodo giuliano. Quindi si ha una regola molto facile per dedurre dal periodo giuliano il ciclo solare, il numero d'oro e l'indizione romana appartenenti ad un dato anno dell'era volgare.

All' anno proposto aggiungete 4713, *ed avrete l' anno corrispondente del periodo giuliano. Dividete la somma successivamente per 28, 19, e 15, ed i resti delle rispettive divisioni indicheranno il ciclo solare, il numero d' oro e l' indizione romana. Se il resto è zero, si porrà in sua vece il divisore.*

Così, all'anno 1846 aggiunto 4713, si ottiene il periodo giuliano 6559 per quell'anno. Dividendo 6559 per 28, per 19, e per 15, si hanno i resti 7, 4, e 4, che sono il ciclo solare, l'aureo numero e l'indizione romana per lo stesso anno 1846.

(*) Veggasi l'*Abrégé d' Astronomie* di Delambre pag. 645.

CAPO DECIMO.

Della parallasse e del diametro degli astri, e quindi della loro distanza dalla Terra e della loro grandezza.

Della parallasse.

§. 165. Nel CAPO TERZO abbiamo già accennato che per gli astri la cui distanza dalla Terra, comunque grande, è paragonabile al raggio terrestre, le osservazioni fatte alla superficie della Terra hanno bisogno di una correzione per essere riferite al centro, la quale dicesi *parallasse*. Ritornando sopra siffatto argomento, esporremo ora come si determina la parallasse, e quali conseguenze possono dedursi dalla conoscenza di questo importante elemento dei calcoli astronomici.

Indichiamo con z la distanza *vera* $S'CZ$ dell'astro S' dallo zenit [*fig.* 8], con z' la distanza *apparente* $S'HZ$ [§. 46], e con p la parallasse $HS'C$; e chiamiamo r il raggio terrestre, e d la distanza $S'C$ del centro dell'astro dal centro della Terra. Il triangolo $S'HC$ darà, $r : d :: \text{sen}\,p : \text{sen}\,(180° - z')$, onde

$$(1) \ldots\ldots \text{sen}\,p = \frac{r}{d}\,\text{sen}\,z'$$

Ma la parallasse, essendo sempre un angolo piccolissimo, per lo più si pone l'arco in vece del seno, dimodochè si ha

$$(1)' \ldots\ldots p = \frac{r}{d}\,\text{sen}\,z'$$

Quando $z' = 90°$, cioè quando l'astro si trova in S sull'orizzonte sensibile HA dell'osservatore, si ha $\text{sen}\,z' = 1$, e $\text{sen}\,p = \frac{r}{d}$. Il quale valore, nella supposizione di r e d invariabili, è il massimo di quelli che può acquistare la parallasse del dato astro per un luogo H, e quindi si dice che *la parallasse orizzontale è massima*. Indicando con ϖ questa parallasse, si avrà

$$(2) \ldots\ldots \text{sen}\,\varpi = \frac{r}{d}$$

e per conseguenza,

$$(3) \ldots\ldots \text{sen}\,p = \text{sen}\,\varpi\,\text{sen}\,z',$$

ovvero, per la piccolezza di ϖ,

$$(3)' \ldots\ldots\ldots p = \varpi\,\text{sen}\,z'.$$

La parallasse p dicesi *parallasse di altezza*, e però, *il seno della parallasse di altezza eguaglia quello della parallasse orizzontale moltiplicato per il seno della distanza apparente dell'astro dallo zenit*; o altrimenti, *la parallasse di altezza si ottiene moltiplicando la parallasse orizzontale per il seno della distanza apparente dallo zenit.*

Se indichiamo con a, a' le altezze vera ed apparente dell'astro, siccome le altezze sono complementi delle distanze dallo zenit, le formole (1), (3), si cambieranno in,

$$(4)\ldots\ldots \operatorname{sen} p = \frac{r}{d} \cos a', \operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \pi \cos a'.$$

§. 166. La parallasse orizzontale, sarebbe costante per i diversi luoghi della Terra se questa fosse una perfetta sfera, ma la Terra essendo sferoidica, il raggio terrestre r cambia di lunghezza al variare della latitudine geografica, ed è massimo all'equatore; per la qual cosa il rapporto $\frac{r}{d}$ ossia *la parallasse orizzontale, per una data distanza* d *dell'astro, è massima all'equatore.*

Parlando della figura della Terra, mostreremo come per ogni latitudine si può calcolare il raggio r in parti del raggio equatoriale, ed indicando ora questo raggio con l'unità, e la *parallasse equatoriale* con ϖ, sarà

$$(5)\ldots\ldots \varpi = \frac{1}{d}, \text{ e quindi } \pi = \varpi r.$$

Questa differenza fra la parallasse orizzontale e l'equatoriale è sempre piccolissima, e riesce apprezzabile soltanto per la Luna, la quale per la sua vicinanza alla Terra ha fra tutti gli altri astri la massima parallasse. Nelle effemeridi astronomiche si trova notata la parallasse equatoriale della Luna, da cui si deduce l'orizzontale per ogni dato luogo con la formola $\pi = \varpi r$.

§. 167. La parallasse di altezza dipende dalla parallasse orizzontale, e questa dalla equatoriale; onde, se sarà determinata la parallasse equatoriale, si conosceranno subito le altre due, e si potranno calcolare le correzioni da applicarsi alle distanze dallo zenit misurate in un dato luogo per ridurle al centro della Terra. La parallasse equatoriale si determina con l'osservazione nel modo seguente.

Siano A, B [*fig.* 34] due luoghi della Terra molto distanti fra loro, e posti sotto lo stesso meridiano terrestre BAp; avranno essi lo stesso meridiano celeste $Z'hZ$, sulla circonferenza del quale saranno situati i rispettivi loro zenit Z', Z. Un astro L, la cui distanza dalla Terra sia piccola in confronto del raggio della sfera celeste, quando passa pel meridiano dei luoghi A, B, sarà dall'osserva-

tore A riferito al punto m del meridiano stesso, e dall'osservatore B al punto n, laddove per un osservatore che si trovasse al centro C della Terra sarebbe riferito al punto h. Supponiamo che nell'istante del passaggio pel meridiano gli osservatori A,B misurino rispettivamente le distanze mAZ,nBZ' dell'astro L dal loro zenit, e contemporaneamente (ovvero poco prima, o poco dopo) misurino ancora le distanze meridiane $ZS,Z'S$ di una stella S dagli zenit rispettivi. Saranno per tal modo conosciuti gli archi ZS,Zm e quindi la loro differenza Sm, e similmente sarà dato l'arco Sn, differenza de' due $Z'n,Z'S$. Presa di nuovo la differenza degli archi determinati Sn,Sm, risulterà cognito l'arco mn, che si potrà indicare con M. Ora, per la piccolezza di LC rispetto ad hC, gli angoli ALC,BLC, che eguagliano i loro verticali hLm,hLn, si possono supporre misurati dagli archi mh,nh del meridiano celeste; e quindi l'arco M conosciuto rappresenterà la somma degli angoli ALC,BLC, ossia la somma delle parallassi di altezza dell'astro L sugli orizzonti de' luoghi A,B. Indicando dunque con z,z' le distanze apparenti dell'astro L dagli zenit Z,Z', con r,r' i raggi terrestri alle latitudini di A,B, e con ϖ la parallasse equatoriale dell'astro L, saranno $r\varpi,r'\varpi$ le parallassi orizzontali per i luoghi A,B, ed $r\varpi \operatorname{sen} z, r'\varpi \operatorname{sen} z'$ le parallassi di altezza; e però si avrà l'eguaglianza $M=r\varpi \operatorname{sen} z+r'\varpi \operatorname{sen} z'$, da cui si ottiene,

$$(6)\ldots\ldots \varpi=\frac{M}{r \operatorname{sen} z+r' \operatorname{sen} z'}$$

§. 168. Questo metodo per determinare la parallasse equatoriale suppone che i due osservatori si trovino esattamente sullo stesso meridiano terrestre, condizione difficile a verificarsi. Ma se i due osservatori si trovassero sopra meridiani alquanto differenti non sarà difficile correggere la distanza dallo zenit dell'astro L misurata da uno di essi, per ridurla a quella che egli avrebbe ottenuto dall'osservazione se, conservando la sua latitudine geografica, avesse misurata siffatta distanza precisamente sul meridiano dell'altro osservatore. Supponiamo, per esempio, che l'osservatore B si trovi all'occidente di A, e vegga passare l'astro L al proprio meridiano un'ora dopo di A, tale essendo la differenza di longitudine dei due luoghi; in questo caso l'osservatore B dovrà misurare le distanze meridiane dell'astro L dal suo zenit per tre o quattro giorni consecutivi, e non trovandole eguali, determinerà con una facile interpolazione l'aumento o la diminuzione della distanza dallo zenit in un'ora di tempo, che è l'intervallo frapposto tra il passaggio dell'astro al meridiano di A ed il passaggio al meridiano di B. Applicata questa correzione alla distanza dallo zenit misurata da B, nello stesso giorno dell'osservazione di A, sarà eliminato l'errore dipendente dalla differenza de' meridiani.

Si è supposto nella *fig.* 34 che l'astro L, si trovasse compreso fra le verticali de' due osservatori, ma potrebbe accadere che fosse fuori dell'angolo $Z'CZ$: allora l'arco mn eguaglierà la *differenza* in vece della *somma* delle parallassi di altezza, ed in tutto il di più sussisterà il precedente ragionamento.

§. 169. Il metodo ora esposto si applica principalmente alla Luna di cui la parallasse equatoriale si può anche determinare in altro modo; ma per trovare la parallasse orizzontale del Sole con estrema precisione, gli astronomi preferiscono ad ogni altro procedimento quello fondato sull'osservazione del passaggio di Venere sul disco del Sole. Ci allontaneremmo troppo dal nostro scopo se volessimo entrare in ulteriori particolari su questo soggetto, e ci basterà accennare che la parallasse orizzontale del Sole alla sua distanza media dalla Terra, dedotta con i calcoli del ch. signor *Encke* dai passaggi di Venere sul disco del Sole negli anni 1761 e 1769, è risultata di $8'',5776$.

§. 170. La parallasse equatoriale, come apparisce dalla formola (5), varia al variare della distanza dell'astro dalla Terra, ma dalla stessa formola si scorge che quando si è determinata la parallasse ad una data distanza, si trova subito quella ad un'altra distanza qualunque, essendo le parallassi in ragione inversa delle distanze. Non è poi necessario che le distanze siano conosciute *assolutamente*, e basta che siano noti i loro rapporti, affinchè presa una di esse per unità, le altre siano date in parti della medesima. I rapporti delle distanze dipendono, come altrove si è accennato [§§. 99, 105], dalla misura de' diametri.

Del diametro lunare.

§. 171. Un occhio O [*fig.* 27] situato in un punto qualunque dello spazio vede l'astro T sotto l'angolo aOc compreso fra le tangenti visuali condotte a due punti opposti del disco apparente atc. Quest'angolo, che si ottiene facilmente con misure micrometriche, è chiamato dagli astronomi *diametro* dell'astro, e varia per lo stesso astro al variare della sua distanza TO dall'occhio; di modo che non può servire a far conoscere la vera grandezza dell'astro se non quando si conosce la distanza. In conseguenza di ciò, astri di differentissime grandezze possono esser veduti sotto lo stesso diametro, e la *fig.* 27 mostra come un occhio situato al vertice del cono ombroso della Terra vedrebbe il Sole (di questa immensamente più grande) tutto coperto dal globo terrestre; il qual fenomeno si verifica spesso negli ecclissi di Sole per l'interposizione della Luna, anche molto più piccola della Terra. Ora, dal triangolo rettangolo TaO si ha,

$\operatorname{sen} aOT = \frac{aT}{TO}$; e per la piccolezza dell' angolo aOT, si può dire che quest' angolo, o sia *il semidiametro è eguale al rapporto* $\frac{aT}{TO}$ *del raggio lineare dell'astro alla distanza dall'occhio.*

Posto questo principio, se chiamiamo Δ il semidiametro dell' astro S' [*fig.* 8] veduto dal centro C della Terra, e Δ' quello dello stesso astro veduto dal luogo H dell' osservatore, ed indichiamo con l il raggio lineare dell' astro, avremo,

$$\Delta = \frac{l}{S'C}, \Delta' = \frac{l}{S'H}, \text{ onde}, \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{S'C}{S'H}.$$

Ma il triangolo $S'HC$ dà $S'C : S'H :: \operatorname{sen} S'HC : \operatorname{sen} S'CH$, ovvero $S'C : S'H :: \operatorname{sen} z' : \operatorname{sen}(z' - p)$ [§. 165]; dunque,

$$(7) \ldots\ldots \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\operatorname{sen} z'}{\operatorname{sen}(z' - p)}.$$

Da questa relazione si desume,

$$\Delta = \Delta' \frac{\operatorname{sen}(z' - p)}{\operatorname{sen} z'} = \Delta' \cos p - \frac{\operatorname{sen} p \cos z'}{\operatorname{sen} z'} \Delta';$$

e poichè $\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} z'$, sarà

$$(8) \ldots\ldots \Delta = \Delta' \cos p - \Delta' \operatorname{sen} \pi \cos z'.$$

In questa espressione facendo $\cos p$ eguale all' unità, e ponenpo π in luogo di sen π, con le quali sostituzioni non si vengono a trascurare nello sviluppo se non termini di terzo e di quarto ordine rispetto alle piccole quantità Δ', p, π, si avrà

$$(8)' \ldots\ldots \Delta = \Delta' - \Delta' \pi \cos z'$$

da cui si ottiene,

$$\Delta' = \frac{\Delta}{1 - \pi \cos z'} = \Delta (1 - \pi \cos z')^{-1}, \text{ e quindi}$$

$$(9) \ldots\ldots \Delta' = \Delta (1 + \pi \cos z' \ldots)$$

Le formole (8)', (9), provano che il semidiametro dell' astro veduto dal centro della Terra, che vien detto *semidiametro vero*, è minore del semidiametro *apparente*, ossia di quello veduto dal luogo H dell' osservatore; e di più, quest' ultimo semidiametro cresce con l' elevarsi dell' astro sull' orizzonte, poichè il termine $\pi \cos z'$ cresce al diminuire di z'. Quando l'astro è all' orizzonte, si ha $z' = 90°$, e la parallasse p si cambia in π; onde la formola (8) dà $\Delta' = \frac{\Delta}{\cos \pi}$. E poichè $\cos \pi$ si può confondere con

l'unità, anche per la Luna la cui parallasse è grandissima rispetto a quella di ogni altro astro, ne segue che il *semidiametro orizzontale di un astro è eguale al semidiametro vero.* Nel fatto queste due quantità differiscono per la Luna, ma meno di 0'',2.

§. 172. Siccome, esclusa la Luna, la parallasse del Sole e de' pianeti è piccolissima, e quindi nella formola (9) il termine $\Delta\varpi\cos z'$ è assolutamente nullo per questi astri, così rispetto ad essi il semidiametro *vero*, *l'apparente*, e *l'orizzontale* si confondono, nel modo stesso che si è veduto essere per gli astri medesimi piccolissima la differenza fra la parallasse orizzontale e la equatoriale.

Apparisce quindi da ciò che precede che le formole (7), (8)', (9) si applicano soltanto alla Luna, per la quale il semidiametro vero si può confondere con l'orizzontale, ma non col semidiametro apparente o di altezza. Malgrado però questa differenza, il *semidiametro vero della Luna e l'apparente impiegano lo stesso tempo a passare per un dato meridiano*, perchè l'astro che si muove è lo stesso per i due osservatori posti alla superficie ed al centro della Terra, quantunque la sua apparenza sia diversa.

Della distanza degli astri dalla Terra e della loro grandezza.

§. 173. Si è accennato in qual modo può misurarsi la parallasse equatoriale di un astro [§. 167]; per cui, supponendola conosciuta, la formola $\varpi=\frac{1}{d}$ dà immediatamente $d=\frac{1}{\varpi}$, o con maggiore esattezza, $d=\frac{1}{\operatorname{sen}\varpi}$, cioè: *la distanza di un astro dal centro della Terra espressa in raggi terrestri equatoriali è eguale al raggio dell'equatore terrestre diviso per il seno della parallasse equatoriale dell'astro.*

Per la Luna, si è determinata la parallasse equatoriale alla sua distanza *media* dalla Terra, ed *al seno della parallasse equatoriale ridotto in secondi* (con la moltiplicazione per R'') *si è dato il nome di* costante *della parallasse.* La *costante della parallasse*, secondo le ultime determinazioni è 57'.2'',24, onde la distanza *media* della Luna dalla Terra in raggi equatoriali risulta,

$$d=\frac{1\times R''}{3422'',24}=60,27$$

ed in miglia geografiche italiane,

distanza media della Luna dalla Terra = 207500 *miglia.*

Inoltre, essendosi dimostrato nel §. 171 che $\Delta=\frac{l}{S'C}$, se indi-

chiamo, come sopra, con d la distanza della Terra dalla Luna, e riteniamo sen Δ in vece di Δ, avremo

$$(10).....\ l = d \operatorname{sen}\Delta = \frac{\operatorname{sen}\Delta}{\operatorname{sen}\omega} = costante.$$

Il rapporto del seno del semidiametro vero a quello della parallasse equatoriale è dunque *costante,* perchè eguaglia il raggio lineare dell' astro. Questo rapporto dedotto dall' osservazione ripetuta de' diametri e delle parallassi, si è trovato per la Luna eguale a 0,2725, cioè a $\frac{3}{11}$ circa; ed esso rappresenta il raggio lunare espresso in parti del raggio terrestre equatoriale. Dunque,

$$\textit{raggio lineare della Luna} = 0{,}2725 = \frac{3}{11} = 938{,}3 \ \textit{miglia}.$$

I volumi delle sfere essendo proporzionali ai cubi de' raggi, il volume della Terra serberà a quello della Luna la ragione de' numeri $(11)^3 : (3)^3 :: 1331 : 27 :: 49 : 1$; cioè *il volume della Terra è 49 volte quello della Luna*. Le masse non sono però nello stesso rapporto, perchè la Luna è meno densa della Terra; e l' osservazione delle maree, dalla quale gli astronomi hanno dedotto il rapporto dell' azione della Luna a quella del Sole sulle acque, tenendo conto delle distanze, ha fatto conoscere il rapporto delle masse de' due astri, e quindi dalla massa del Sole già determinata [§. 92] si è ottenuta quella della Luna, che è risultata $\frac{1}{80}$ della massa terrestre.

§. 174. Rispetto al Sole, la sua parallasse orizzontale equatoriale alla distanza *media* dalla Terra è 8,5776 [§. 169]. Stando a questo risultamento del signor *Encke*, la distanza media del Sole dalla Terra in raggi terrestri equatoriali è

$$d = \frac{1}{8{,}5776 \operatorname{sen} 1''} = 24047 \ \textit{rag. ter. equ.}$$

ovvero in miglia geografiche italiane,

$$\textit{distanza media del Sole dalla Terra} = 82{,}800000 \ \textit{miglia}.$$

E chiaro che un solo centesimo di secondo d' incertezza sulla parallasse fa variare questa distanza di quasi centomila miglia.

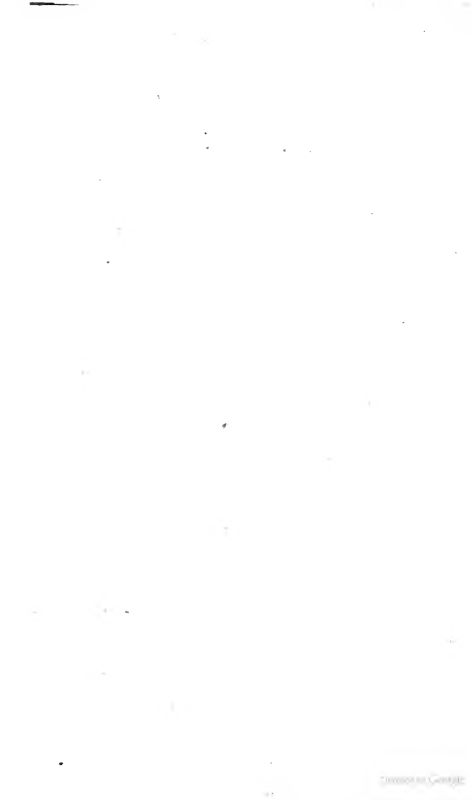
Determinata la distanza media del Sole dalla Terra, la formola (10) [§. 173] fa conoscere la grandezza dell' astro. Infatti, il semidiametro del Sole alla distanza media dalle più recenti misure è $16'.0'',9$, e quindi il

$$\begin{aligned}\textit{raggio lineare del Sole} &= 24047 \operatorname{sen} 16'.0'',9 \\ &= 112{,}02 \ \textit{rag. ter. equ.} \\ &= 385730 \ \textit{miglia}.\end{aligned}$$

I volumi della Terra e del Sole sono dunque nella ragione

de' numeri $1:(112,02)^3::1:1405800$; cioè *il volume del Sole è un milione e quattrocentomila volte quello della Terra.* Si è veduto però che la massa del Sole è 354936 volte quella della Terra [§. 92, *Sist. Mond.* di Laplace, ed *Alm. Naut.*], e però la densità della Terra è 3,96 volte quella del Sole. Ma la densità della Terra è 5,53 volte quella dell' acqua, secondo le esperienze de' fisici, dunque la densità del Sole sta a quella dell' acqua $::1\frac{2}{5}:1$.

§. 175. Un rapporto curioso darà, meglio de' numeri, un'idea adeguata dell' enorme grandezza del Sole. Il raggio lineare di questo astro essendo 112 raggi terrestri, laddove la distanza della Luna dalla Terra è di soli 60 raggi, ne segue che, se si paragona l' aja di un cerchio massimo solare a quella dell' orbita della Luna considerata circolare, le due superficie saranno $::(112)^2:(60)^2::12544:3600::3\frac{1}{2}:1$. Dunque *la superficie di un cerchio massimo del Sole è 3 $\frac{1}{2}$ volte quella dell' orbita che la Luna descrive intorno alla Terra.*

§. 176. Per determinare le distanze de' pianeti dalla Terra e la loro grandezza, la teoria di tali astri offre, oltre ai procedimenti indicati ne' §§. precedenti, altri metodi, la cui esposizione non può entrare nel disegno di quest' opera.

LIBRO TERZO

PROBLEMI DI GEOGRAFIA MATEMATICA.

CAPO PRIMO

Della determinazione grafica del meridiano, e degli orologi solari.

Problema i. *Segnare una linea meridiana.*

Nell' introduzione abbiamo accennato che per costruire una carta topografica era indispensabile determinare con le osservazioni astronomiche la *latitudine* e la *longitudine* di uno o più punti principali, e l' *azimut* di uno o più lati della triangolazione. Di questa ricerca ci occuperemo nel presente libro, ed a questo fine specialmente sono diretti i problemi astronomici che ci proponiamo di risolvere.

§. 1. Prima operazione per chiunque imprende a fare osservazioni astronomiche in un dato luogo è il riconoscere la direzione del meridiano; la quale si determina, secondo il bisogno, o con una linea segnata sopra un piano orizzontale, o con una visuale diretta ad un punto lontano. Si adopera il primo modo per situare graficamente nel meridiano un *istrumento de' passaggi* o *cannocchiale meridiano* [II. §. 32], il quale, rettificato poi con l'osservazione delle stelle, serve a determinare con grande esattezza il tempo; ed il secondo modo si adopera per orientarsi con precisione, onde prepararsi alle osservazioni astronomiche.

Per segnare una linea meridiana sopra un piano orizzontale poco esteso si fa uso delle ombre solari. Supposto che il Sole descriva col suo moto diurno un cerchio parallelo all' equatore, esso prende sempre sull' orizzonte posizioni simmetriche a destra ed a sinistra del meridiano, e quindi ad altezze eguali dell'astro nei due emisferi orientale ed occidentale corrispondono azimuti

eguali, ed angoli orarii eguali [II. §. 14]. Partendo da questo principio, sul dato piano orizzontale *HK* [*fig.* 1.] s' innalza uno stiletto perpendicolare *ab*, e col suo piede *b* come centro si descrivono nel piano varii cerchi concentrici. Tre o quattro ore prima di mezzogiorno si aspetta che l' ombra dello stiletto, accorciandosi gradatamente con l' elevarsi del Sole, tocchi la circonferenza del primo cerchio, e si segna il punto d' incontro *m*; si fa lo stesso col secondo cerchio, e si segna il punto *n*, e così di seguito. Dopo mezzogiorno, cominciando ad allungarsi di nuovo le ombre, si segnano gl' incontri corrispondenti *n'*,*m'*, che ritorneranno in ordine inverso, e si avranno così gli angoli *mbm'*, *nbn'*..., ciascuno de' quali rappresenta il doppio azimut del Sole nelle sue successive posizioni, perchè ad ombre eguali corrispondono altezze eguali del Sole, e ad eguali altezze, eguali azimuti. Per la qual cosa, dividendo ciascuno di quelli angoli per metà, le rette dividenti saranno altrettante linee meridiane; le quali o caderanno una sull' altra esattamente, o pochissimo allontanandosi da una direzione unica (per l' inesattezza che sempre accompagna l' esperienze fisiche), serviranno a determinare una direzione media che rappresenterà con sufficiente esattezza la linea meridiana. Questo metodo, essendo fondato sull' ipotesi che la distanza del Sole dal polo fosse invariabile durante l' esperienza, richiede che l' operazione si faccia nelle vicinanze del solstizio, quando la declinazione dell' astro si mantiene quasi costante nel corso di molte ore [II. §. 23]. È chiaro poi che se si conserverà lo stiletto nella sua posizione, siccome esso e la linea meridiana giacciono insieme nel piano del meridiano che passa pel suo piede, ogni volta che l' ombra gettata dallo stiletto combacerà con la linea meridiana sarà mezzogiorno.

§. 2. Per segnare una linea meridiana sul terreno ovvero sopra un piano indefinito, si dirigerà il cannocchiale di un *teodolite* ad una stella quando si trova fuori del meridiano nell' emisfero orientale, e si noterà a quale punto della graduazione orizzontale dell' istrumento corrisponde la projezione della visuale diretta all' astro. Conservando il cannocchiale alla medesima altezza si dirigerà nuovamente alla stella, allorchè torna ad acquistare quell' altezza nell' emisfero occidentale, e si noterà il nuovo punto della graduazione orizzontale. I due punti della graduazione così determinati saranno egualmente distanti dal meridiano, e diviso per metà l' arco fra essi compreso, il punto intermedio sarà nel meridiano; per la qual cosa se si farà prendere al cannocchiale questa posizione media, esso pure sarà nel piano del meridiano, e potrà servire a scoprire qualunque oggetto si trovi in quella direzione, o a fissare un segno nel piano medesimo. Questo cenno dell' operazione sarà meglio compreso dopo che nel LIBRO QUINTO avremo data una descrizione particolarizzata degli strumenti; e la

maniera di misurare l'azimut di un oggetto terrestre, che sarà esposta fra poco, offrirà pure un mezzo più esatto per determinare la direzione del meridiano.

Problema II. *Costruire un orologio solare sopra un piano orizzontale.*

*§. 3. La conoscenza del tempo per mezzo delle ombre solari è un'utile applicazione de' principii di astronomia, e se n'è formata una scienza a parte chiamata *Gnomonica*. Le ombre del Sole possono indicare il mezzo del giorno non meno che qualunque altra ora, quando combaciano con linee segnate convenientemente sopra una data superficie; ed all' insieme di queste linee si dà il nome di *orologio solare*, chiamandosi *gnomone* il corpo che getta l'ombra. Noi ci occuperemo soltanto della descrizione di un orologio solare sopra un piano orizzontale, o sopra un piano verticale comunque inclinato al meridiano.

Rappresenti *OR* l'orizzonte [*fig.* 2], *C* il suo centro, *CP* l'asse del mondo, *MPN* un cerchio di declinazione su cui si trova il Sole in una data ora del giorno. Un asse materiale *Cm* disposto nella direzione dell' asse del mondo getterà nel piano del cerchio di declinazione un'ombra, la quale raccolta sul piano orizzontale *OR*, o sopra qualunque altra superficie, servirà ad indicare l'ora del giorno corrispondente all' angolo orario del Sole *ZPS*, quando combacerà con la traccia *CN*, che il cerchio di declinazione lascia sull' orizzonte, o sulla superficie scelta per la descrizione dell'orologio solare. È evidente che, qualunque sia la declinazione del Sole, quante volte questo astro si troverà sul cerchio di declinazione *MPN*, avrà sempre lo stesso angolo orario, e l'ombra dello stiletto, combaciando con la traccia suddetta, segnata anticipatamente, indicherà la medesima ora vera. È questo il principio generale che regola la costruzione degli orologi solari, la quale si riduce perciò a *situare uno stiletto nella direzione dell' asse del mondo, e segnare sul piano o sulla superficie su cui deve descriversi l' orologio, le comuni sezioni di questa superficie o di questo piano con i successivi cerchi di declinazione che fanno col meridiano angoli orarii crescenti di mezz' ora in mezz' ora, secondo l' estensione che vuol darsi all' orologio*. Le comuni sezioni da costruirsi diconsi *linee orarie*.

*§. 4. Supponiamo che l'orologio debba costruirsi sul piano orizzontale *OR*, [*fig.* 2.] e sia *MPN* un qualunque cerchio di declinazione; per segnare la linea oraria *CN*, basterà conoscere l'angolo *NCR* che essa fa con la meridiana *CR*, o sia il suo azimut, il quale si ottiene subito dalla risoluzione del triangolo rettangolo sferico *NPR*. In questo triangolo sono dati il lato *PR*, altezza del polo, o sia latitudine geografica del luogo, e l'angolo

$NPR = ZPS$, angolo orario o inclinazione del dato cerchio di declinazione col meridiano; e si avrà

$$\operatorname{sen} PR = \frac{\tan NR}{\tan NPR}, \text{ da cui } \tan NR = \operatorname{sen} PR \tan NPR.$$

E ponendo $NR = z, PR = L, NPR = H$, sarà,

$$(1) \ldots. \tan z = \operatorname{sen} L \tan H$$

Questa formola serve a calcolare gli azimuti di tutte le linee orarie, sostituendo ad H successivamente gli angoli orarii, i quali si ottengono moltiplicando per 15 le ore che si considerano. Ma per le ore della mattina, le quali si contano da mezzanotte secondo l'uso civile, prima di moltiplicarle per 15 bisognerà prenderne il complemento a 12^h, perchè gli angoli orarii si riferiscono sempre al passaggio superiore del Sole. Per tal modo le ore della mattina $5^h; 5^h.30'; 6^h; 6^h.30'; 7^h; 7^h.30' \ldots$ daranno i valori di $H = 105°; 97°.30'; 90°; 82°.30'; 75° \ldots$; e le ore della sera, $0^h.30'; 1^h; 1^h.30'; 2^h \ldots$ danno gli angoli orarii $H' = 7°.30'; 15°; 22°.30'; 30°$ etc.

* §. 5. Dopo aver calcolati gli azimuti delle linee orarie, la costruzione grafica dell'orologio procederà a questo modo. Rappresenti HK [*fig.* 3] il piano orizzontale dell' orologio, e CM la linea meridiana segnata sopra di esso nel modo indicato precedentemente [§. 1.] Si prenda sulla meridiana un punto C da servire per *centro dell' orologio*, o sia per quel punto dal quale debbono partire tutte le linee orarie, non meno che la retta materiale che getta l'ombra, e deve esser disposta nella direzione dell'asse del mondo. Al punto C si costruiscano con la retta CM gli angoli MCV, $MCVI, MCVII, MCVIII \ldots$ eguali rispettivamente agli azimuti z delle linee orarie $CV, CVI, CVII \ldots$ della mattina calcolati con la formola (1); ed a sinistra della meridiana CM si facciano gli angoli. $MCI, MCII, MCIII, MCIV \ldots$ eguali ai precedenti ma in ordine inverso, i quali serviranno a segnare le linee orarie pomeridiane. La figura risulterà simmetrica intorno alla meridiana CM, che si estenderà dal punto C verso il nord. Per situare poi lo *gnomone* nella direzione dell' asse del mondo, si costruirà un triangolo di metallo mCm', tale che l' angolo mCm' sia esattamente eguale alla latitudine L del luogo; e si eleverà siffatto triangolo verticalmente all' orizzonte, ed in modo che il vertice C coincida col centro dell' orologio, ed il lato Cm' con la linea meridiana. Con questa disposizione il lato Cm del triangolo sarà nella direzione dell' asse del mondo, e la sua ombra caderà a mezzo giorno sulla meridiana CM, ad 1^h caderà in CI, a 2^h in CII, e così di seguito.

Per segnare le linee orarie con esattezza non si dovrà adoperare il semicerchio da tavolino, ma si costruiranno gli angoli per mezzo delle loro tangenti. A tal fine si faranno a destra ed a sinistra della meridiana CM due quadrati eguali CN, CL, il lato di

ciascuno de'quali sia assegnato con precisione in parti di una scala. Supposto che valga, per esempio, 50 millesimi di passo (92^{mm},60), si moltiplicherà per questo numero il secondo membro della equazione (1), ed in vece di cercare nelle tavole l' angolo z in gradi, si cercherà il numero corrispondente a $50 \operatorname{sen} L \tan H$, il quale rappresenterà la tangente di quell'angolo espressa in millesimi di passo, nell' ipotesi del raggio eguale a 50 millesimi. Le tangenti così calcolate si prenderanno sopra una scala geometrica, e portate da M verso L, determineranno con molta esattezza i punti I, II, III... i quali si uniranno col centro C e daranno le direzioni delle linee orarie. Quando l'angolo z è maggiore di 45°, come avviene per le ore IV,V..., si calcolerà la sua cotangente con la formola $\cot z = \frac{50 \cot H}{\operatorname{sen} L}$, e si porterà da G verso L; e quando $z > 90°$, come per le ore al di là della VI, si userà la stessa formola $\cot z = \frac{50 \cot H}{\operatorname{sen} L}$ per calcolare la cotangente, la quale si porterà da G verso F.

***§. 6.** Si sogliono sull' orologio solare notare i segni dello zodiaco, ed anche la *linea equinoziale EQ*. Questa linea è quella che descrive l' ombra del vertice m dello gnomone nel giorno dell' equinozio, e rappresenta la comune sezione dell'orizzonte con un piano parallelo all' equatore condotto per il punto m. I segni dello zodiaco si situano sulla linea meridiana, come ♑, e servono ad indicare i punti ai quali perviene a mezzodì l' ombra dello gnomone ne' giorni in cui il Sole entra nei diversi segni dell'ecclittica. Sarà facile determinare questi punti, e segnare la linea equinoziale, quando si saprà calcolare la lunghezza dell' ombra meridiana dello gnomone per una data declinazione del Sole.

Si voglia, per maggiore generalità, determinare la lunghezza di un' ombra qualunque Cn [*fig.* 2.] fuori del meridiano. Dal triangolo rettangolo sferico PNR si ha $\cot NP = \cot PR \cos NPR$, ovvero, indicando l' arco $NP = mCn$ con D,

$$(2)\ldots\ \cot D = \cot L \cos H.$$

Il triangolo rettilineo Cmn, in cui ora si conoscono lo gnomone Cm, l' angolo C, e l' angolo $Cmn = SmP$, complemento della declinazione del Sole, darà la proporzione, $\operatorname{sen} n : \operatorname{sen} m :: Cm : Cn$, ovvero $\operatorname{sen}\{180° - (C+m)\} : \operatorname{sen} m :: Cm : Cn$. Ed indicando la declinazione del Sole con δ e lo gnomone con l, si avrà

$$\operatorname{sen}(D + 90° - \delta) : \cos\delta :: l : ombra, \text{ onde}$$

$$(3)\ldots\ ombra = \frac{l.\cos\delta}{\cos(\delta - D)}.$$

Nel caso dell'ombra meridiana si ha $H=o$, e quindi dall'equazione (2) si desume che $D=L$, e la (3) si cambia in

$$(3)' \ldots\ \textit{ombra merid.} = \frac{l.\cos\delta}{\cos(\delta - L)}.$$

Quest' ultima formola serve a calcolare le ombre meridiane, e quindi il luogo de' *segni*, e della *linea equinoziale*, la quale s'innalzerà perpendicolarmente alla meridiana CM [*fig.* 3] dal punto q estremo dell' ombra meridiana equinoziale. Il punto q si otterrà poi facendo $\delta=o$ nella formola (3)', il che darà

$$(3)'' \ldots\ \textit{ombra merid. equinoz.} = l \operatorname{seg} L.$$

*§. 7. Calcolando con le formole (2), (3) la lunghezza delle ombre per tutto il tempo che il Sole sta sull' orizzonte, si osserva che nel solo giorno dell' equinozio l'estremità dell' ombra cammina sopra una linea retta ed in tutti gli altri giorni dell' anno descrive una iperbola. Infatti, immaginando unito il vertice dello gnomone con i varii punti della circonferenza del parallelo descritto dal Sole col moto diurno, si viene a formare una superficie conica, e prolungando le rette congiungenti dall' altra parte se ne forma un' altra opposta al vertice; e poichè tanto l'uno che l'altro cono sono intersegati dall' orizzonte, la sezione dev' essere una iperbola, di cui il ramo opposto al Sole è formato dagl' incontri delle indicate rette con l' orizzonte, o sia dalle estremità delle ombre diurne dello gnomone.

*§. 8. Le formole (1), (2), (3) possono adoperarsi per costruire la curva detta *meridiana del tempo medio*. È questa una curva a forma di 8 allungato (come si vede accennata nella *fig.* 3), la quale rappresenta graficamente tutte le variazioni dell' equazione del tempo. Essa intersega perciò la linea meridiana in quattro punti, che dinotano i quattro giorni dell' anno in cui l'equazione è zero, e per tutti gli altri giorni serve ad indicare l'istante di mezzogiorno medio, il quale si verifica quando l'ombra dell' estremità dello gnomone cade sulla curva. Per descriverla per punti, si prende nelle effemeridi l'equazione del tempo per un dato giorno, e si considera come un angolo orario H, il quale introdotto nell' equazione (1) determinerà l' azimut della linea oraria (hC per esempio) corrispondente all' istante di mezzodì medio per quel giorno. Dopo di ciò si calcola la lunghezza dell' ombra hC con le formole (2), (3), nelle quali si dà alla declinazione δ il valore conveniente al giorno stesso, e rimane così determinato un punto h della curva. Operando similmente per i giorni seguenti (o da 10 in 10 giorni, come meglio parrà conveniente, secondo l' andamento dell' equazione) si eseguirà l'intera costruzione della curva per mezzo di coordinate polari, le quali per maggiore esattezza potranno cambiarsi in rettangolari, con la risoluzione di un triangolo rettangolo.

*§. 9. In vece di costruire l'orologio solare sul piano fisso sopra del quale sia stata prima segnata la linea meridiana, si può con maggior comodità ed esattezza costruire in camera sopra una lastra di marmo o di lavagna. Segnate le linee orarie, e disposto lo gnomone perpendicolarmente alla lastra e sulla linea scelta per meridiana, non rimane che a situare l'orologio nel luogo designato, per la quale ultima operazione bisognerà che siano adempite due condizioni, cioè: 1.° il piano dell'orologio dovrà ridursi perfettamente orizzontale, il che si eseguirà per mezzo di livelli; 2.° l'orologio dovrà essere bene orientato, per modo che l'ombra dello gnomone cada esattamente sulla linea meridiana nel punto di mezzogiorno. Questa seconda condizione si potrà ottenere in due maniere, o per mezzo di un orologio astronomico ben regolato, il quale faccia conoscere l'istante preciso di mezzogiorno, o mediante una linea meridiana segnata vicino al luogo dell'orologio solare nel modo indicato di sopra [§. 1.]. L'uso di situare gli orologi solari servendosi della bussola è assolutamente da proscriversi.

Problema iii. *Costruire un orologio solare sopra un muro verticale.*

*§. 10. Sia KK' il piano verticale del muro [*fig.* 4] sul quale deve costruirsi l'orologio solare, ed SA uno stiletto innalzato perpendicolarmente ad esso piano. Si supponga unito il punto S col polo P della sfera celeste e per la retta SP, che rappresenta l'asse del mondo, si faccia passare un piano verticale NM'. Sarà questo il meridiano celeste, il quale passerà per lo zenit Z, ed intersegando il piano del muro, segnerà in esso una retta verticale MN, che sarà la linea meridiana, ossia quella retta su cui cadrà sempre l'ombra della estremità S dello stiletto nel punto di mezzogiorno. Pel piede A dello stiletto si conduca nel piano del muro una orizzontale OR, che incontrerà la meridiana in Q, e si uniscano SQ,AC. Si formerà così una piramide triangolare che avrà per vertice l'estremità S dello stiletto e per base il triangolo ACQ rettangolo in Q, esistente nel piano del muro: le due facce SAC,SAQ della piramide saranno perpendicolari al piano del muro e la terza faccia SCQ sarà un prolungamento del piano del meridiano. Quindi l'angolo CSQ, giacente in questo piano e formato dalla orizzontale SQ e dall'asse del mondo SC, eguaglierà l'altezza del polo, ossia la latitudine geografica del luogo. La retta AC, che rappresenta la proiezione dell'asse del mondo sul piano del muro dicesi *sostilare*.

*§. 11. Siccome la costruzione dell'orologio dipende, come è chiaro, dall'angolo che il piano del muro fa col meridiano, così bisogna prima di tutto determinare quest'angolo, il quale è

rappresentato sulla figura dall'inclinazione delle due rette orizzontali SQ, AQ perpendicolari alla meridiana NM, comune sezione del piano del muro e del meridiano. Nel triangolo SAQ rettangolo in A si avrà perciò, $\tan SQA = \frac{SA}{AQ}$, ovvero chiamando s la lunghezza dello stiletto, d la distanza AQ ed i l'angolo che il muro fa col meridiano, sarà

$$(4)\ldots\ldots \tan i = \frac{s}{d}.$$

Per conoscere l'angolo i dovrà dunque esser nota la lunghezza dello stiletto e la distanza AQ del suo piede dalla linea meridiana MN. Questo secondo dato si ottiene dall'esperienza; s'innalza, cioè, lo stiletto SA perpendicolare al piano del muro, e si aspetta l'ora precisa di mezzogiorno; in quell'istante si segna l'estremità dell'ombra, e per questo punto si fa passare una verticale MN, che rappresenterà la meridiana, sulla quale abbassata la perpendicolare AQ dal piede A dello stiletto, si avrà la distanza cercata. L'istante preciso di mezzogiorno non si può ottenere che in due modi, o per mezzo di un orologio astronomico ben regolato, o per mezzo di una meridiana orizzontale. Si potrebbe anche misurare direttamente l'azimut SQA del muro con osservazioni astronomiche, ed allora il valore della retta AQ risulterebbe in vece dalla conoscenza dell'angolo i, e si avrebbe $d = s\cot i$.

*§. 12. Prolungati i piani dell'angolo solido $CSAQ$ sino alla sfera celeste, si formerà su di essa il triangolo sferico ZPF che conterrà gli stessi elementi dell'angolo triedro da cui deriva. Questo triangolo sarà rettangolo in F, per essere il piano $FPCAS$ che passa per lo stiletto AS perpendicolare al piano $ZFCAQ$ del muro, e conoscendosi in esso triangolo il lato ZP complemento della latitudine del luogo, e l'angolo $PZF = i$, si potranno determinare tutti gli altri elementi. Facciasi $FZ = S, FP = \lambda, FZP = i, ZP = 90° - L, ZPF = P$, e si avranno per calcolare λ, S, P, le relazioni,

$$(5)\ldots\ldots \text{sen}\,\lambda = \cos L\,\text{sen}\,i$$

$$(6)\ldots\ldots \tan S = \cos i \cot L$$

$$(7)\ldots\ldots \cot P = \text{sen}\,L \tan i.$$

A queste formole, che si deducono facilmente dal triangolo sferico rettangolo ZFP [I. §. 40], si potranno aggiungere per verificazione de' calcoli le altre due qui appresso, che si ottengono pure da quel triangolo;

$$(8)\ldots \begin{cases} \cos\lambda \cos S = \text{sen}\,L \\ \text{sen}\,S = \cos L\,\text{sen}\,P. \end{cases}$$

La formola (6) serve a determinare l'angolo $ZCF=ACQ$ che la meridiana fa con la sostilare, e quindi a stabilire la posizione di quest'ultima retta, dopo avere scelto il punto C per centro dell'orologio e la verticale CM per meridiana. La formola (5) serve a calcolare l'angolo $\lambda=FP=SCA$ che l'asse del mondo fa con la sostilare. Con questo angolo e con l'altezza data SA dello stiletto si costruirà un triangolo rettangolo materiale, e situandolo perpendicolarmente al muro sulla sostilare AC, l'ipotenusa SC rappresenterà l'asse del mondo, e l'ombra di essa coprirà la linea meridiana nell'istante di mezzogiorno, come ancora tutte le linee orarie, una dopo l'altra. Imperocchè queste linee, essendo le comuni sezioni de' cerchi di declinazione col piano del muro [§. 3.], ciascuna di esse deve contenere i punti comuni alle superficie che s' intersegano, e quindi tutte debbono passare per il punto C comune al piano del muro ed ai cerchi di declinazione. Dunque, dopo aver segnata la linea meridiana MN, costrutto l'angolo ACQ per determinare la posizione della sostilare, elevato su questa il triangolo materiale SCA, ossia lo *gnomone;* per compire la costruzione dell'orologio non si dovrà far altro che determinare gli angoli delle linee orarie con la sostilare, e descrivere quelle linee.

*§. 13. Sia CDP un qualunque cerchio di declinazione di cui si vuol determinare la comune sezione DCB col piano del muro, e si ponga l'angolo orario $ZPD=H$. Essendosi con la formola (7) già calcolato l'angolo $ZPF=P$, sarà conosciuta la differenza $DPF=P-H$; e però nel triangolo rettangolo DPF saranno dati l'angolo DPF, ed il lato $FP=\lambda$, e potranno determinarsi tutti gli altri elementi, come l'arco DF che misura l'angolo $DCF=ACB$ fra la sostilare e la linea oraria CB, e l'arco DP che misura l'angolo SCB fra la linea oraria e l'asse del mondo. Pongasi $DF=X$, $DP=Q$, e per calcolare questi angoli si avranno dal triangolo DFP le relazioni,

$$(9)\dots\ \tan X=\operatorname{sen}\lambda\tan(P-H)$$

$$(10)\dots\ \cot Q=\cot\lambda\cos(P-H);$$

alle quali si potrà aggiungere la formola di verificazione

$$(11)\dots\ \cos Q=\cos X\cos\lambda.$$

Introducendo successivamente nella equazione (9) in vece di H i valori 7°.30';15°;22°.30'... si avranno gli angoli X che la sostilare fa con le linee orarie; nel calcolo de' quali bisogna osservare che quando $P<H$, come per l'angolo orario ZPD'', $\tan X$ diviene negativa, il che vuol dire che la linea oraria CG deve cadere a sinistra della sostilare AC, laddove prima cadeva a dritta. Qui ancora si deve avvertire, che per le ore antimeridiane gli angoli orarii si ottengono moltiplicando per 15, non

le ore date, ma i loro complementi a 12^h [§. 4.]. Per le ore pomeridiane poi gli angoli orarii dovranno considerarsi negativi nella formola (9), siccome apparisce anche dalla figura, essendo nel triangolo $D'FP$ l'angolo $D'PF = ZPF + D'PZ = P + H$, in vece di $P - H$ della formola.

*§. 14. Quanto precede basta per la costruzione dell'orologio solare, la quale procederà nel modo seguente. Sia KK' [*fig.* 5] il muro verticale, che supponiamo *declinante* verso oriente come nella *fig.* 4. Si conduca una retta verticale NM, che rappresenti la linea meridiana, ed in essa si prenda il punto C per centro dell'orologio, avvertendo che il luogo della verticale e del punto sul muro sono arbitrarii, ma debbono scegliersi in modo che le linee orarie abbiano il conveniente sviluppo. Si faccia al punto C l'angolo $MCE = S$ (formola (6)), e sarà CE la sostilare, sulla quale s'innalzerà il triangolo materiale SAC perpendicolare al muro, costruendo l'angolo $SCA = \lambda$ (formola (5)). Alla retta EC ed al punto C s'inclineranno le rette $Cn, Cn', Cn''\ldots Cm, Cm'\ldots$ sotto gli angoli X calcolati con la formola (9), introducendo in essa i successivi valori di H, siccome è detto quì sopra, e saranno così descritte le linee orarie. Per la costruzione di tutti gli angoli S, λ, X si dovranno adoperare le loro tangenti valutate in parti di un raggio di lunghezza determinata nel modo accennato per l'orologio orizzontale [§. 5.].

*§. 15. Non sarà difficile indicare su questo orologio la linea equinoziale ed i segni, come per l'orologio orizzontale, ma quì pure sarà necessario calcolare prima la lunghezza delle ombre dello gnomone. Supponendo il Sole in L quando il suo angolo orario è ZPD [*fig.* 4], e la linea oraria è CB, è chiaro che l'estremità dell'ombra dello gnomone sarà determinata dalla retta LS prolungata sino in B. Ora, nel triangolo rettilineo CSB si conoscono SC, lunghezza dello gnomone, $SCB = Q$, dato dalla formola (10), e $CSB = 180° - CSL = 180° - (90° - \delta) = 90° + \delta$, indicando con δ la declinazione del Sole; si potrà dunque calcolare il lato CB, o sia la lunghezza dell'ombra, e sarà

$$CB = \frac{CS \operatorname{sen}(90° + \delta)}{\operatorname{sen}\{180° - (90° + \delta + Q)\}} = \frac{CS \cos\delta}{\cos(\delta + Q)}.$$

Chiamiamo l la lunghezza CS dello gnomone ed avremo

$$(12)\ldots\ ombra = \frac{l \cos\delta}{\cos(\delta + Q)}$$

Per l'ombra meridiana si ha $H = o$, e quindi la formola (10), diviene $\cot Q = \cot\lambda \cos P$; ma nel triangolo sferico rettangolo ZPF si ha $\cot ZP = \cot FP \cos P = \cot\lambda \cos P$, dunque sarà $Q = ZP = 90° - L$; e però

$$(12)'\ldots\ ombra\ meridiana = \frac{l \cos\delta}{\operatorname{sen}(L - \delta)}.$$

Nel giorno dell' equinozio è pure $\delta = o$, onde

$$(12)'' \ldots \textit{ombra meridiana equinoziale} = \frac{l}{\operatorname{sen} L}$$

Dalla formola (12) apparisce che per un dato valore di δ, o sia per un dato giorno dell' anno l' ombra minima si verifica per il minimo valore di Q, e poichè, per la formola (10), Q è minimo quando $P - H = o$, e $Q = \lambda$, l'ombra minima accaderà per un angolo orario $H = P$, cioè sulla sostilare, e si avrà

$$(12)_{,} \ldots \textit{ombra minima} = \frac{l \cos \delta}{\cos(\delta + \lambda)}$$

Per il giorno dell' equinozio sarà ancora,

$$(12)_{,,} \ldots \textit{ombra minima equinoz.} = \frac{l}{\cos \lambda}.$$

*§. 16. Le formole $(12)''$ ed $(12)_{,,}$ potranno servire a segnare sull' orologio la linea equinoziale, poichè si taglierà sulla sostilare una parte $CE = \frac{l}{\cos \lambda}$ [*fig.* 5], e sulla meridiana una parte $CM = \frac{l}{\operatorname{sen} L}$, ed uniti i punti E, M, sarà EM la linea equinoziale, che deve essere una linea retta perchè risulta dall' intersezione del piano dell' equatore col piano del muro. Dai valori di EC e di CM si ha $\frac{EC}{CM} = \frac{\operatorname{sen} L}{\cos \lambda}$; ma per le formole (8), $\frac{\operatorname{sen} L}{\cos \lambda} = \cos S = \cos ECM$, dunque $\frac{EC}{CM} = \cos ECM$, cioè il triangolo CEM è rettangolo in E, il che vuol dire che la *linea equinoziale è perpendicolare alla sostilare*. Questa conseguenza risulta ancora dalla considerazione che l' equatore essendo perpendicolare all'asse del mondo, la sua traccia sul piano del muro deve esser perpendicolare alla projezione dell' asse, cioè alla sostilare.

La formola $(12)'$ servirà ad indicare sulla meridiana i punti di entrata del Sole ne' segni dello zodiaco, e quindi a notare questi segni accanto alla meridiana, come si è accennato per l'orologio orizzontale.

*§. 17. Per segnare sull' orologio verticale la curva del tempo medio si seguirà interamente il procedimento indicato per l' orologio orizzontale; cioè si costruirà la curva per punti, ed ogni punto si otterrà costruendo la linea oraria corrispondente alla data equazione del tempo considerata come angolo orario, e tagliando sulla linea oraria una lunghezza eguale all' ombra calcolata per quell' angolo orario, e per la declinazione del Sole di quel giorno.

*§. 18. Al pari dell'orologio orizzontale, l'orologio verticale si costruisce con maggiore esattezza in camera sopra una lastra di marmo o di lavagna, e dopo terminato si situa sul muro destinato a riceverlo. Ma per la costruzione dell'orologio verticale si richiede, oltre alla latitudine del luogo, sufficiente per l'orologio orizzontale, anche la conoscenza dell'azimut del muro, il quale si determina prima nel modo indicato al §. 11. Per situare poi l'orologio già costrutto nel luogo designato bisognerà osservare tre condizioni; 1.° il piano dell'orologio dovrà ridursi esattamente verticale, 2.° la linea meridiana dovrà essere in questo piano una linea verticale, 3.° si dovrà orientare l'orologio in modo che a mezzogiorno l'ombra dello gnomone copra la linea meridiana. Quest'ultima condizione potrà essere adempita mediante un orologio astronomico ben regolato, ed in mancanza di esso, per mezzo di una linea meridiana descritta antecedentemente sopra un piano orizzontale in vicinanza dell'orologio [§§. 9, 11].

CAPO SECONDO

Degli elementi de' calcoli astronomici dedotti dalle Effemeridi.

Posizioni degli astri.

Problema iv. *Ridurre le ascensioni rette degli astri, o le longitudini geografiche in tempo, e viceversa.*

§. 19. La divisione o la moltiplicazione per 15 basterebbe per eseguire la *riduzione* delle ascensioni rette o delle longitudini terrestri in tempo e viceversa; ma siccome occorre spesso la conversione dell'arco in tempo, o del tempo in arco, è necessario accennare le abbreviazioni che si possono usare in queste operazioni.

Siano 245°.27'.54'',3 da ridursi in tempo. Dal rapporto di 15 : 1 fra l'arco ed il tempo si ha ancora che 1° vale 4 minuti di tempo, ed 1' di arco vale 4 secondi di tempo; perciò si userà la divisione per 15, e la moltiplicazione per 4, come segue.

È da avvertire primamente che *dai gradi contenuti nell'arco proposto si cavano ore e minuti di tempo*; *dai minuti di arco, minuti e secondi di tempo, e dai secondi di arco, secondi e frazione decimale di secondo:* al quale effetto *si divide per 15 il dato numero di gradi, ed il quoziente indica ore, il resto*

moltiplicato per 4 indica minuti di tempo: similmente si divide il proposto numero di minuti di arco per 15, ed il quoziente dà minuti di tempo, il resto moltiplicato per 4 dà secondi: finalmente i secondi di arco divisi per 15 danno secondi e frazione di secondo di tempo. Si sommano tutte le parti così ridotte, e si ottiene il tempo domandato. Ecco il quadro dell' operazione

$$
\begin{array}{ll}
245^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & 16^h.20^m \\
27' \ldots\ldots\ldots\ldots & 1.48^s \\
54'',3 \ldots\ldots\ldots & 3,62 \\
\hline
\textit{Somma}\ 245\,.27\,.54\ ,3 \ldots\ldots & 16\,.21\,.51,62
\end{array}
$$

Per la riduzione del tempo in arco, *si moltiplicano le ore per 15 e si hanno gradi: si dividono i minuti di tempo per 4 ed il quoziente dà gradi, il resto moltiplicato per 15 dà minuti di arco: si dividono i secondi di tempo per 4 ed il quoziente dà minuti di arco, il resto moltiplicato per 15 dà secondi. Si sommano tutte le parti ridotte e si ottiene l'arco domandato.* Segue l'esempio;

$$
\begin{array}{ll}
16^h \ldots\ldots\ldots\ldots & 240^\circ \\
21^m \ldots\ldots\ldots\ldots & 5.15' \\
51^s,62 \ldots\ldots\ldots & 12.54'',3 \\
\hline
\textit{Somma}\ 16\,.21\,.51\,,62 \ldots\ldots & 245\,.27.54\ ,3
\end{array}
$$

PROBLEMA V. *Calcolare la posizione media, e l'apparente di una stella per una data epoca.*

§. 20. *Posizione media.* I cataloghi delle stelle contengono le ascensioni rette *medie*, e le declinazioni *medie* di esse per una data epoca [II. §. 141], non che le *variazioni annuali* di queste coordinate; intendendosi per variazione annuale di una stella, in *AR* o in declinazione, la somma algebrica della precessione annuale e del *moto proprio*. Ecco come sono formati simili quadri;

Posizioni medie per il 1.° Gennajo 1848 (dall' Almanacco nautico)

Nome della Stella.	*Grandezza.*	*Ascensione retta.*	*Var. an.*	*Declinazione.*	*Var. an.*
ε Orsa min.	4.5	$17^h.1^m.44^s,009$	$-6^s,5267$	$+82^\circ.16'.42'',35$	$-5'',048$
β Aquario	3	21 .23.33 ,154	+3 ,1677	− 6 .14 .12 ,97	+15 ,592

dove è da avvertire che il segno — posto innanzi alla declinazione indica che essa è australe.

Volendo la posizione media di una stella per un'epoca diversa da quella del catalogo, si moltiplicano le variazioni annuali per la differenza de' tempi, e si aggiungono o si tolgono i prodotti dall'*AR* e dalla declinazione, secondo che l'epoca proposta è posteriore o anteriore alla data del catalogo. Così la posizione di *ε Orsa minore* pel 1.° Gennajo 1840 si dedurrà dalla precedente nel modo qui appresso indicato.

AR. ε Ors. min. al 1. Gen. 1840 $=17^h.\ 1^m.44^s,009+6^s,5267\times 8$
$=17^h.\ 2^m.36^s,22$
Declinazione idem .... $=+82^\circ.16'.42'',35+5'',048\times 8$
$=82^\circ.17'.22'',73.$

§. 21. Ma questa maniera di calcolare le posizioni medie delle stelle suppone che la precessione sia proporzionale al tempo, il che non è vero a rigore, ed in molti casi non può ammettersi, specialmente quando la stella è vicinissima al polo, e l'epoca per la quale si calcola è molto lontana dalla data del catalogo. Per le stelle che sono lontane dal polo più di cinque o sei gradi si potrà operare a questo modo. Si determina mediante le variazioni annuali del catalogo la posizione della stella per un'epoca intermedia fra la data del catalogo ed il tempo proposto: indi si calcolano le *costanti* m, n della precessione [II. pag. 119) per la stessa epoca media, ed i loro valori, insieme a quelli dell'*AR* e della declinazione già calcolate per l'epoca stessa, s'introducono nelle formole (P) [*ivi*]. Così si otterranno le precessioni annuali in *AR* ed in declinazione, le quali combinate col moto proprio dell'astro daranno le variazioni annuali per l'epoca media, che potranno considerarsi come costanti, e servire a dedurre dal catalogo la posizione della stella per il tempo domandato.

Riprendendo l'esempio precedente, la posizione di *ε Orsa minore*, calcolata come qui sopra per il principio del 1844, epoca media fra la data del catalogo ed il 1840 risulta,

AR ε Ors. min. $= 17^h.2^m.10^s,12$; *Decl. ε Ors. min.* $= 82^\circ.17'.2'',54$

Per lo stesso anno 1844, le *costanti* m,n della precessione, dedotte dalle formole del 1830, riportate nel LIBRO II pag. 119, con porre $t=14$, sono

$$m=46'',05726;\ n=20'',05530.$$

Se dunque riduciamo l'ascensione retta in arco, 255°.32'.31'',8, ed introduciamo tutti questi dati nelle formole (*P*) [II. pag. 119] avremo,

$$\begin{array}{ll}
\log n = 1{,}3022227 + & \ldots\ldots\ldots\; 1{,}3022292 + \\
\quad\quad 65 & \\
l.\mathrm{sen}\,\alpha = 9{,}9860231 - & l.\cos\alpha = 9{,}3972949 - \\
\quad\quad 10 & \quad\quad 670 \\
l.\tan\delta = 0{,}8680558 + & \quad 0{,}6995911 - \\
\quad\quad 402 & d\delta = -5'',007 \\
\quad 2{,}1563493 - & \\
\quad -143'',334 & \\
m = + \;\; 46\;,057 & \\
d\alpha = - \;\; 97\;,277 &
\end{array}$$

Calcolate così le *precessioni annue* in *AR* ed in declinazione per il 1844, si riduca $d\alpha$ in tempo, e si combinino $d\alpha, d\delta$ con i moti proprii della stella, che sono, $-0^s,055$ in *AR*, e $0'',00$ in declinazione; si avranno in tal modo le variazioni annuali per l'epoca media cioè,

$$var.\,an.\,\text{in}\,AR = -6^s,540;\; var.\,an.\,\text{in decl.} = -5'',007.$$

Si prendano queste *variazioni* col segno contrario, perchè l'epoca proposta è anteriore a quella del catalogo, e si avrà in fine;

$$\begin{array}{lll}
AR\,\varepsilon\,Ors.min.\,\text{il }1.^\circ\,Gen. & 1840 & = 17^h.1^m.44^s,009 + 6^s,540 \times 8 \\
 & & = 17^h.2^m.36^s,33 \\
Decl.\,\varepsilon\,Ors.min. & \text{idem} & = 82^\circ.16'.42'',35 + 5'',007 \times 8 \\
 & & = 82^\circ.17'.22'',41;
\end{array}$$

la quale posizione è identica a quella notata nel catalogo del 1840 dell' *Almanacco nautico*.

*§. 22. Il procedimento esposto nel §. precedente non è sufficientemente esatto per le stelle molto vicine ai poli, per le quali le variazioni annuali in *AR* cambiano notabilmente da un anno all'altro. Il metodo più diretto per calcolare le posizioni medie di siffatte stelle è quello di applicare le formole (*P*), (*p*) [II, §. 134] di precessione anno per anno successivamente, cominciando da quello del catalogo, e progredendo sino all'epoca proposta. Siano per esempio da calcolarsi l'*AR* e la declinazione della *Polare* per il 1.° Gennajo 1848, essendo data dal catalogo del 1840 la seguente posizione;

$$\begin{array}{l}
AR.\,Polare\,\text{il }1.^\circ\,Genn.\,1840\ldots\alpha = 1^h.2^m.10^s,93; \\
\qquad\qquad var.\,an. = 16^s,4559;\; mot.\,prop. = 0^s,090 \\
Decl.\,Polare\;\ldots\;\text{idem}\;\ldots\;\delta = 88^\circ.27'.22'',2; \\
\qquad\qquad var.\,an. = 19'',322;\; mot.\,prop. = 0'',02.
\end{array}$$

Dai valori di m,n per il 1830 [II. pag. 119], ponendo successivamente $t=10$, $t=11$, $t=12$..., si dedurranno quelli per gli anni 1840, 1841 etc.; e si avrà la seguente tavoletta;

1840... $m=46''0560280$; $n=20''0556882$
1841... $m=46,0563366$; $n=20,0555912$
1842... $m=46,0566452$; $n=20,0554942$
1843... $m=46,0569538$; $n=20,0553972$
1844... $m=46,0572624$; $n=20,0553002$
1845... $m=46,0575710$; $n=20,0552032$
1846... $m=46,0578796$; $n=20,0551062$
1847... $m=46,0581882$; $n=20,0550092$

Ridotta la data ascensione retta in arco, sarà $\alpha=15°.32'.43'',95$; ed introdotti i valori di α,δ nelle formole (P), insieme a quelli di m,n relativi al 1840, si calcoleranno, come sopra, le precessioni in AR ed in declinazione, le quali si aggiungeranno all'AR ed alla declinazione del 1840, e si otterrà la posizione del 1841. Con questa nuova posizione, e con i valori di m,n del 1841 si calcoleranno da capo le precessioni per quell'anno, ed esse aggiunte all'AR ed alla declinazione già ottenute per l'anno medesimo, daranno la posizione per il 1842, e così di seguito. Con questo progresso abbiamo calcolate le posizioni medie della polare sino al 1848, che quì appresso riportiamo, avvertendo che non sono corrette del *moto proprio*.

ASCENSIONI RETTE.

	Diff. 1.e	*Diff. 2.e*	*Diff. 3.e*
1840....15°.32'.43''9500			
	+4'. 5''4887		
1841. . . .36 .49 ,4387		+1''5516	
	4 . 7 ,0403		+0''0156
1842. . . .40 .56 ,4790		1 ,5672	
	4 . 8 ,6075		0 ,0160
1843. . . .45 . 5 ,0865		1 ,5832	
	4 .10 ,1907		0 ,0163
1844. . . .49 .15 ,2772		1 ,5995	
	4 .11 ,7902		0 ,0163
1845. . . .53 .27 ,0674		1 ,6158	
	4 .13 ,4060		0 ,0166
1846. . . .57 .40 ,4734		1 ,6324	
	4 .15 ,0384		0 ,0167
1847....16 . 1 .55 ,5118		1 ,6491	
	4 .16 ,6875		
1848. . . . 6 .12 ,1993			

DECLINAZIONI.

	Diff. 1.e	*Diff. 2.e*
1840...88°.27'.22''2		
	+19''3220	
1841. . . .27 .41 ,5220		—0''0065
	19 ,3155	
1842. . . .28 . 0 ,8375		0 ,0066
	19 ,3089	
1843. . . . . .20 ,1464		0 ,0066
	19 ,3023	
1844. . . . . .39 ,4487		0 ,0067
	19 ,2956	
1845. . . . . .58 ,7443		0 ,0068
	19 ,2888	
1846. . . .29 .18 ,0331		0 ,0069
	19 ,2819	
1847. . . . . .37 ,3150		0 ,0069
	19 ,2750	
1848. . . . . .56 ,5900		

Onde ottenere la posizione della polare corretta di tutto per l'anno 1848, si ridurrà l'*AR* di quell'anno in tempo, e vi si aggiungerà $0^s,090 \times 8 = 0^s,72$ per il moto proprio; si aggiungerà pure alla declinazione il moto proprio $0'',02 \times 8 = 0'',16$, e si avrà;

$$AR.\ Polare \text{ il 1. Gen. } 1848 = 1^h.4^m.25^s,534;$$
$$Decl.\ Polare = 88^\circ.29',56'',75.$$

*§. 23. Il calcolo della posizione media di una stella eseguito nel modo ora indicato sarebbe troppo penoso, ma l'esempio che ne abbiamo dato ci apre la strada alle abbreviazioni qui appresso dichiarate.

Le ascensioni rette della *Polare* per gli anni 1840, 41, 42...48 formano una serie di valori le cui differenze *terze* essendo molto piccole e poco disuguali possono considerarsi come costanti. Se dunque si avrà modo di determinare la prima differenza di ogni ordine sino al terzo, sarà dato di poter calcolare il termine generale della serie mediante la formola d'interpolazione (*i*) dimostrata nel LIBRO II. pag. 25: la quale, chiamando α' l'*AR* da calcolarsi, α l'*AR* del 1840 o il termine iniziale, $d\alpha, d^2\alpha, d^3\alpha$, le prime differenze de' diversi ordini, e t l'anno, o in generale il tempo corrispondente alla domandata ascensione retta α', prende la forma;

$$(i)' \ldots \alpha' = \alpha + t.\, d\alpha + \frac{t(t-1)}{2} d^2\alpha + \frac{t(t-1)(t-2)}{2.3} d^3\alpha \ldots$$

Ora, le differenze $d^2\alpha, d^3\alpha$ possono dedursi *a priori* dalla formola $d\alpha = m + n \operatorname{sen} \alpha \tan \delta$, che esprime già il valore della differenza *prima* di α, ossia la precessione annuale in *AR*. Infatti ricordandosi che le quantità m, n variano annualmente (e si può ritenere costantemente) delle piccolissime frazioni dm, dn [II, pag. 119], e nell'espressione $m+n \operatorname{sen} \alpha \tan \delta$ ponendo $m+dm$, $n+dn$, $\alpha+d\alpha$, $\delta+d\delta$ in vece di m, n, α, δ, sviluppando, e sottraendo dallo sviluppo la quantità proposta $m+n \operatorname{sen} \alpha \tan \delta$, si otterrebbe l'espressione generale della differenza *seconda* $d^2\alpha$. Ma limitando lo sviluppo alle quantità di 2.° ordine rispetto ad $m, n, d\alpha, d\delta$, la quale approssimazione è sempre sufficiente per la cercata differenza $d^2\alpha$, che nella formola $(i)'$ è moltiplicata per la seconda potenza del tempo t, siffatta *differenza* si cambia naturalmente nel *differenziale primo di* $d\alpha$ e *secondo* di α, e similmente la differenza terza estesa nello sviluppo sino ai termini di 3.° ordine, perchè va moltiplicata nella formola per la terza potenza del tempo, si cambia nel *differenziale secondo* di $d\alpha$, come potrebbesi anche verificare col fatto: dunque le espressioni di $d^2\alpha, d^3\alpha$ si otterranno prendendo i differenziali successivi di $d\alpha = m + n \operatorname{sen} \alpha \tan \delta$, in cui si

faranno variare tutte le quantità m, n, α, δ; e ricordandosi che dm, dn sono costanti, sarà

$$d^2\alpha = dm + dn \operatorname{sen}\alpha \tan\delta + n \tan\delta \cos\alpha\, d\alpha + n \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta\, d\delta$$

$$\begin{aligned} d^3\alpha = {} & dn(\cos\alpha \tan\delta\, d\alpha + \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta\, d\delta) \\ & + dn(\tan\delta \cos\alpha\, d\alpha + \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta\, d\delta) \\ & - n \tan\delta \operatorname{sen}\alpha (d\alpha)^2 + n \cos\alpha \sec^2\delta\, d\alpha\, d\delta \\ & + n \cos\alpha \sec^2\delta\, d\alpha\, d\delta + 2n \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta \tan\delta (d\delta)^2 \\ & + n \tan\delta \cos\alpha\, d^2\alpha + n \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta\, d^2\delta \end{aligned}$$

Riducendo, ristabilendo l'omogeneità, e facendo per brevità di scrittura, $\operatorname{sen}\alpha \tan\delta = r$, $\operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta = s$, $\tan\delta \cos\alpha\, d\alpha + \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta\, d\delta = S$, si avrà

$$(A)\ldots \begin{cases} d^2\alpha = dm + r\,dn + \dfrac{n}{R''} S \\ d^3\alpha = \dfrac{2\,dn}{R''} S + \dfrac{nr}{(R'')^2} \{ \cot\alpha\, d^2\alpha\, R'' - (d\alpha)^2 \} \\ \qquad + \dfrac{ns}{(R'')^2} \{ d^2\delta R'' + 2 \cot\alpha\, d\alpha\, d\delta + 2 \tan\delta (d\delta)^2 \}. \end{cases}$$

In queste formole tutto è conosciuto, poichè $d\delta$ è data dalla seconda formola (P), e $d^2\delta$ si deduce da $d\delta$ con la differenziazione, come si dirà qui appresso; laonde calcolando in numeri i valori di $d\alpha, d^2\alpha, d^3\alpha$, ed introducendoli nella formola $(i)'$ si avrà l'AR della stella per un tempo qualunque t.

*§. 24. Nei cataloghi fondamentali riprodotti da 10 in 10 anni dall'*Almanacco nautico* si trovano calcolati, oltre alla precessione annuale $d\alpha$, anche i suoi differenziali $d^2\alpha, d^3\alpha$, affine di poterne dedurre la posizione della stella per un dato tempo t. Le quantità notate nell'*Almanacco* sono propriamente, $d\alpha$, $\dfrac{100\,d^2\alpha}{2}, \dfrac{100\,d^3\alpha}{6}$, ed il moto proprio della stella; le quali vengono indicate con $c, p, q, \Delta c$; quindi, adottando questa notazione, la formola $(i)'$, che serve a determinare l'AR media della stella per il dato tempo t, con tener conto anche del moto proprio, diviene,

$$\alpha' = \alpha + (c + \Delta c)t + \frac{p}{100} t(t-1) + \frac{q}{100} t(t-1)(t-2)$$

Le quantità $c, p, q, \Delta c$ calcolate per la *polare* al principio dell'anno **1840**, ed espresse in tempo, sono, quali le riporta l'*Almanacco nautico*, $c = 16^s{,}3659$, $p = +5^s{,}1542$, $q = +0^s{,}01734$; e se si sostituiscono nella formola precedente e si fa $t = 8$, si avrà l'AR della polare per il 1.° Gen. 1848 dedotta da quella del 1840. Eseguito il calcolo si ha $1^h.4'.25'',522$, il quale risultamento non differisce che di $0^s{,}012$ da quello ottenuto di sopra direttamente col calcolo progressivo delle precessioni.

Per verità la formola di cui fa uso l' *Almanacco nautico* nel calcolo delle ascensioni rette è la seguente;

$$\alpha' = \alpha + (c + \Delta c)t + \frac{p}{100}t^2 + \frac{q}{100}t^3, \text{ (Alm. naut. 1834)}$$

e rappresenta lo sviluppo dell'ascensione retta α', funzione del tempo, eseguito col teorema di *Taylor*. Essa, applicata all'esempio precedente, dà $1^h.4^m.25^s,965$ per *AR* della *polare* al 1.° Genn. 1848, e quindi una differenza di $0^s,431$ con l'*AR* calcolata direttamente. Noi (non senza grande esitazione) abbiamo proposto la leggiera modificazione esposta qui sopra, perchè abbiamo pensato che trattandosi di accrescimenti abbastanza notabili della variabile t, potesse meglio convenire all'oggetto la formola d'interpolazione che quella di *Taylor*, e perchè l'applicazione alla polare ha sembrato confermare la nostra idea. Ma gl'illustri uomini che dirigono quel classico annuario faranno di questa nostra rispettosa osservazione quel conto che crederanno.

*§. 25. Quanto si è detto per l'ascensione retta vale ancora per la declinazione, e solo le formole riescono più semplici. La precessione in declinazione è indicata da $d\delta = n\cos\alpha$, della quale espressione i differenziali successivi sono,

$$d^2\delta = dn\cos\alpha - n\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha$$
$$d^3\delta = -dn\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha - dn\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha - n\cos\alpha\,(d\alpha)^2 - n\,\text{sen}\,\alpha\, d^2\alpha$$

e ristabilendo l'omogeneità,

$$(D)\ldots\begin{cases} d^2\delta = dn\cos\alpha - \dfrac{n}{R''}\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha \\[2ex] d^3\delta = -\dfrac{2\,dn}{R''}\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha - \dfrac{n}{R''}\,\text{sen}\,\alpha\, d^2\alpha - \dfrac{n}{(R'')^2}\cos\alpha\,(d\alpha)^2. \end{cases}$$

Se ora indicheremo con c', p', q', le quantità $d\delta, \dfrac{100\,d^2\delta}{2}, \dfrac{100\,d^3\delta}{6}$, e con $\Delta c'$ il moto proprio in declinazione, secondo l'uso dell' *Almanacco nautico*, la formola generale per calcolare la declinazione della stella sarà,

$$\delta' = \delta + (c' + \Delta c')t + \frac{p'}{100}t(t-1) + \frac{q'}{100}t(t-1)(t-2)$$

*§. 26. L'applicazione delle formole (A), (D) per determinare la posizione media delle stelle vicine ai poli è ancora abbastanza laboriosa, ma il termine dipendente dalle differenze *terze*, essendo sempre piccolissimo, si può trascurare quando il tempo t non è molto grande; e per compensare questa mancanza, si potrà calcolare la differenza *seconda* per l'epoca media fra

la data del catalogo ed il tempo proposto, analogamente a ciò che si è praticato con la differenza *prima* per le stelle non tanto vicine ai poli [§. 21.]. Rispetto alla declinazione si farà lo stesso, tanto più che le differenze terze possono considerarsi nulle quasi sempre; anzi nella maggior parte de' casi la declinazione potrà calcolarsi col procedimento esposto nel §. 21. Riprendiamo l'esempio della *Polare* per chiarire meglio le idee.

È data la posizione seguente della *Polare*;

AR. *Polare* il 1.° Gen. 1840 $=1^h.2^m.10^s,93$; *Decl.* $=88^\circ.27'.22'',2$

e si cerca quella del 1.° Genn. 1848.

Con le formole (P) e con i valori di m, n per il 1840 si calcoleranno le precessioni $d\alpha$, $d\delta$ come nel §. 21, e si avrà, $d\alpha=245'',4887$, $d\delta=19'',322$. La posizione approssimata della polare per il 1.° del 1844 sarà dunque [§. 20].

$$AR(1844)=15^\circ.32'.43'',95+4\times 245'',49=15^\circ.49'.10''$$
$$Decl.(1844)=88^\circ.27'.22'',2\ +4\times\ 19'',32=88^\circ.28'.40''$$

Introduciamo questi valori nelle espressioni di $d^2\alpha$, $d^2\delta$, ed il calcolo numerico procederà come segue

Calcolo di $d^2\alpha$

$l.dn\ =5,98686$	$l.n\ =1,30223$	
$l.\text{sen}\,\alpha=9,43554$	$C.l.R''=4,68557$	
$l.\tan\delta=1,57554$	$5,98780$	$5,98780$
$6,99794$	$l.\cos\alpha=9,98323$	$l.\text{sen}\,\alpha=9,43554$
$-0'',0009953$	$l.d\alpha=2,39003$	$l.d\delta=1,28605$
$+1\ ,59025$	$l.\tan\delta=1,57554$	$C.l.\cos\delta=1,57570$
$d^2\alpha=1'',58925$	$9,93660$	*Idem* $=1,57570$
$d^2\alpha=0^s\ ,10595$	$+0'',86418$	$9,86079$
	$+0\ ,72576$	$+0'',72576$
	$dm=+0\ ,00031$	
	$1\ ,59025$	

Calcolo di $d^2\delta$ | *Calcolo di $d\delta$ media*

$l.dn\ =5,98686$	$l.\frac{n}{R''}=5,98780$	$\log.n=1,30223$
$l.\cos\alpha=9,98323$	$l.d\alpha=2,39003$	$l.\cos\alpha=9,98323$
$5,97009$	$l.\text{sen}\,\alpha=9,43554$	$1,28546$
$-0'',0000933$	$7,81337$	$d\delta=19'',296$
$-0\ ,006507$		
$d^2\delta=-0'',006600$		

Ciò premesso, l'AR della polare per il 1.° del 1848 sarà data dalla formola

$$(a)\ldots\ldots\ \alpha'=\alpha+(d\alpha+\Delta c)t+d^2\alpha\frac{t(t-1)}{2}$$

in cui si farà $d\alpha = 245'',4887$, ed in tempo $d\alpha = 16^s,3659$, $\Delta c = 0^s,090$; $d^2\alpha = 0^s,10595$, $t = 8$; si avrà cioè,

$$\alpha' = 1^h.2^m.10^s,93 + 16^s,4559 \times 8 + 0^s,10595 \times 28 = 1^h.4^m.25^s,544.$$

Similmente la declinazione si calcolerà con la formola,

$$(d) \ldots\ldots \delta' = \delta + (d\delta + \Delta c')\,t + d^2\delta \frac{t(t-1)}{2}$$

nella quale $d\delta = 19'',322$; $d^2\delta = -0'',0066$; $\Delta c' = 0'',02$; $t = 8$; e quindi,

$$\delta' = 88^\circ.27'.22'',2 + 19'',342 \times 8 - 0'',0066 \times 28 = 88^\circ.29'.56'',75$$

Ma questo stesso risultamento per la declinazione si poteva ottenere calcolando, come qui sopra, la precessione annuale per l'epoca *media* ed applicandola insieme col moto proprio alla declinazione data. Infatti

$$\delta' = 88^\circ.27'.22'',2 + (19'',296 + 0'',02)\,8 = 88^\circ.29'.56'',73.$$

E qui bisogna avvertire che quando si fa uso delle differenze seconde $d^2\alpha$, $d^2\delta$, bisogna adoperare le $d\alpha$, $d\delta$ calcolate per l'origine del tempo t, e sarebbe errore calcolarle per l'epoca media, come vorrebbe il *Puissant*. (Géodésie II. vol. pag. 83). È anche da notare che, se l'epoca per la quale si deve calcolare la posizione della stella fosse anteriore alla data del catalogo, in tutte le formole precedenti il tempo t dovrebbe prendersi *negativamente*.

*§. 27. Termineremo questo, già troppo lungo, articolo sul calcolo delle posizioni medie, con accennare il modo da tenersi quando il tempo t contenesse oltre agli anni anche un numero di giorni. Se si tratterà di una stella per la quale si può supporre costante la variazione annuale del catalogo, o quella calcolata per l'epoca media [§§. 20, 21], basterà ridurre il dato numero di giorni in frazione decimale di anno e moltiplicare il tempo così espresso per la variazione adottata. Se poi nel calcolo della posizione richiesta dovranno adoperarsi le precedenti formole, s'introdurrà in esse il tempo t espresso in anni e decimali di anno. Volendo, per esempio, l'*AR* della *Polare* per il 10 Aprile 1848, si rifletterà che fra il 1 Gennajo ed il 10 Aprile 1848 sono compresi 100 giorni, e quindi la frazione di anno sarà $\frac{100}{365} = 0,137$, e nella formola (a) del §. precedente si dovrà porre $t = 8,137$, e si avrà

$$\alpha' = 1^h.2^m.10^s,93 + 16^s,4559 \times 8,137 + 0^s,10595 \times \frac{8,137 \times 7,137}{2}$$

$$= 1^h.2^m.10^s,93 + 2^m.33^s,902 + 3^s,076 = 1^h.4^m.27^s,91.$$

Si potrebbe anche calcolare la formola facendo $t = 8$, ed aggiungere al risultamento ottenuto il prodotto della variazione annuale per la frazione di anno 0,137. Si dovrebbe però adottare la variazione per il 1848, e senza calcolarla espressamente si potrebbe ottenerla a questo modo. Dall' *AR* del 1. Gen. 1848 già calcolata si tolga quella data per il 1840; la differenza $2^m.14^s,61$ si divida per 8, e si avrà la variazione annuale *media* per gli otto anni trascorsi, che sarà $16^m,826$; si prenda la differenza fra questa variazione e quella $16^s,4559$ del 1840, e si avrà $0^s,370$; si aggiunga questa differenza alla variazione *media* $16^s,826$ e si avrà $17^s,196$, che rappresenterà con sufficiente approssimazione la variazione annuale per il 1848. Moltiplicata questa variazione per 0,137, ed aggiunto il prodotto all' *AR* del 1. Gen. 1848 si avrà per l' *AR* del 10 Aprile $1^h.4^m.27^s,90$.

§. 28. *Posizione apparente.* Calcolata la posizione media di una stella, l'applicazione delle formole (N), (n), (η), (A) [II, §§. 138, 139, 140] per calcolare la posizione apparente non offre alcuna difficoltà, e basterà soltanto osservare strettamente le regole de' segni ricordate nella Trigonometria [I, §. 53], e considerare negativa la declinazione della stella quando è *australe*. Noi tralasciamo perciò di dare un esempio dell'andamento di siffatto calcolo, e preferiamo un saggio di applicazione della *tavola generale di nutazione e di aberrazione* inserita a pag. 127 del LIBRO SECONDO.

Debba calcolarsi l' *AR* apparente della *Polare* per il 1.° Gennaio 1848. Gli elementi del calcolo sono

AR media Polare il 1. del 1848... $\alpha = 16°.\ 6'.28'',01 = 0^s.16°,11$
Declinazione idem idem ...... $\delta = 88\ .29\ .56\ ,75$
Longitudine del nodo lunare.... ☊ $= 184\ .52\ .24 \quad = 6^s.\ 4°,87$
Longitudine del Sole .... ☉ $= 280\ .16\ .20 \quad = 9\ .10\ ,27$
Longitudine della Luna .... ☾ $= 221\ .56\ .\ 5 \quad = 7\ .11\ ,93$

delle quali quantità l' *AR* e la declinazione media della stella sono state trovate ne' §§. precedenti, e le altre sono cavate dall' *Almanacco nautico* per il 1848, e si riferiscono al mezzogiorno del 1. Gennaio. Esse si veggono ridotte in *segni*, *gradi* e frazioni decimali di grado perchè debbono servire a formare gli *argomenti della Tavola.* Ecco il quadro del calcolo.

I | II | III

Nutazione lunare.

I

☊= 6ˢ. 4°,87
Arg. 6ˢ. 4°. . . +1″,11
p. p. per 0 ,87 23
+1″,34

II

☊+3ˢ= 9ˢ. 4°,87
α=12 .16 ,11
Arg. 3 .11 ,24
3 .12 . . . +7″,892
per 0, 76 22
+7″,914.

III

α= 0ˢ.16°,11
☊= 6 . 4 ,87
6 .20 ,98
Arg. 3 .20 ,98..+1″,103.

Nutazione solare.

I

2☉=18ˢ.20°,54
Arg. 6 .20 ,54..+0″,40

II

2☉+3ˢ=21 .20 ,54
α=24 .16 ,11
Arg. 2 .25 .57..+0″,521.

III

α= 0ˢ.16°,11
2☉=18 .20 ,54
19 . 6 ,65
16 . 6 ,65
Arg. 4 . 6 ,65..+0″,018.

Correzioni.

I

2☾=14ˢ.23°,86
Arg= 2 .23 ,86..—1″,14
sesta parte..—0 ,19

II

2☾+3ˢ=17ˢ.23°,86
α=24 .16 ,11
Arg. 6 .22 ,25..—0″,198
—0 ,033.

III

α= 0ˢ.16°,11
2☾=14 .23 ,86
15 . 9 ,97
Arg. 0 . 9 ,97..+0 ,004
+0 ,0007.

I

2☊=12ˢ. 9°,74
Arg. 6 . 9 ,74..+0″,20
+0 ,033

II

α+3ˢ=15 .16 ,11
2☊=12 . 9 ,74
Arg. 3 . 6 ,37..+0″,519
+0 ,0865.

III

α= 0 .16 ,11
2☊=12 . 9 ,74
12 .25 ,85
Arg. 3 .25 ,85..+0″,020
+0 ,0033.

Aberrazione.

II

☉+3ˢ=12ˢ.10 ,27
α=12 .16 ,11
Arg. 0 . 5 ,84
5 . . . +1″,701
per 0, 84. . .0 ,2848
1 ,9858*

III

α= 0ˢ.16°,11
☉= 9 .10 ,27
9 .26 ,38
Arg. 6 .26 ,38
6 .26 . . . +0″,369
per 0 ,38. 49
+0 ,3739*

Ricapitolazione.

I

+1″,34
+0 ,40
—0 ,19
+0 ,033
+1 ,583
+366 ,893
+ 90 ,201
Totale....458 ,677
in tempo+30ˢ ,578
α=1ʰ.4ᵐ.25 ,544
α app.ᵗᵉ=1 .4 .56 ,122

II

+7″,914.
+1 ,103.
+0 ,521.
+0 ,018.
—0 ,033.
+0 ,0007.
+0 ,0865.
+0 ,0033.
S=+9 ,6135
log. S= 0 ,9828815
l. tan δ= 1 ,5811283
5297
2 ,5645395
+366″,893

III

+1″,9858*
0 ,3739*
s= 2,3597
log s=0,3728568
C.l.cos δ=1,5820810
2739
1,9552117
+90″,201

A far pienamente comprendere il calcolo precedente osserviamo, che per il più comodo uso della *Tavola* gli archi *a*, ☊, ⊙, ☾ si sono, come è detto di sopra, ridotti in *segni*, gradi e centesimi di grado; si sono notate con un puntino le parti della correzione che dovevano esser moltiplicate per tan δ, e con un asterisco, quelle che avevano per moltiplicatore sec δ: e finalmente nella *ricapitolazione* si sono eseguite co' logaritmi quelle moltiplicazioni, si sono riuniti tutti i risultamenti, e si è ridotta la correzione totale in tempo.

Nell' *Almanacco nautico* si trovano per tutto l' anno calcolate alcune quantità ausiliari, che introdotte in un' apposita formola rendono molto semplice il calcolo delle posizioni apparenti delle stelle. Questo andamento è da preferirsi, ma noi ci siamo dilungati sopra siffatto argomento per coloro che non avessero la comodità di consultare quelle eccellenti effemeridi. Intanto, volendo paragonare il nostro risultamento con quello che si otterrebbe dai dati dell' *Almanacco* del 1848, avvertiamo che la correzione da applicarsi all' *AR* media calcolata con questi dati risulta eguale a $30^s,262$. Essa deve esser diminuita del piccolo termine $0^s,087$ dipendente dall' argomento 2 ☾, non considerato nelle formole dell' Almanacco [II, §. 143], ma che trovasi calcolato separatamente a *pag.* 488 per le stelle più prossime al polo. La correzione è dunque $30^s,175$, e siccome è riferita alla mezzanotte del 1. Gennajo, per la quale sono calcolate le quantità ausiliari f, g, G... (*Alm.* pag. 446), così deve accrescersi di $0^s,415$ per riportarla a mezzogiorno, essendo $0^s,83$ la diminuzione giornaliera dell' *AR* apparente della Polare (*Alm.* pag. 448). La correzione per mezzogiorno del 1. Gennaio risulta perciò $30^s,590$, e non differisce che di $0^s,002$ da quella ottenuta per la stessa ora dalla nostra *tavola generale*.

PROBLEMA V. *Determinare un qualunque elemento solare o lunare per una data ora di un dato luogo.*

§. 29. *Per dedurre dalle effemeridi astronomiche un elemento qualunque conveniente alla data ora del dato luogo, prima operazione è quella di valutare l' ora corrispondente del luogo pel quale sono calcolate le effemeridi; al che si perviene subito aggiungendo o togliendo dall' ora data la longitudine del luogo proposto rispetto al luogo delle effemeridi, considerato come primo meridiano.* Vogliasi, per esempio, calcolare la longitudine del Sole ad $8^h.15^m$ di tempo medio in Napoli il dì 19 Ottobre del 1846, sapendosi che la longitudine est di Napoli da *Greenwich* è 57^m. L' ora di Greenwich corrispondente al dato istante di Napoli sarà $8^h.15^m - 57^m = 7^h.18^m$; e però basterà calcolare la longitudine del Sole per quest' ora di Greenwich perchè sia data per l' ora proposta di Napoli.

Quando non è necessario determinare con grande esattezza l'elemento astronomico, si possono usare le effemeridi come le tavole de' logaritmi, *supponendo le variazioni dell' elemento cercato proporzionali agli aumenti del tempo;* il quale arbitrio è permesso qualche volta pel Sole anche trattandosi di posizioni esatte. Per fissare le idee cerchiamo, come si è proposto qui sopra, la longitudine del Sole per $8^h.15^m$ di tempo medio del giorno 19 Ottobre in Napoli, o siano $7^h.18^m$ di Greenwich. Si avrà dall' *Almanacco nautico*,

Long. ⊙	*a mezzodì medio del 19 Ottobre.* .	= 205°.43'.59'',8
Idem	*a mezzodì del giorno 20* . . .	= 206 .43 .43 ,5
	Aumento in 24 ore medie.	59 .43 ,7

e, supponendo l'aumento della longitudine proporzionale all'aumento del tempo, per trovare il numero di minuti e secondi da aggiungere alla longitudine del mezzodì del giorno 19 per avere la longitudine a $7^h.18^m$ di Greenwich, o siano $8^h.15^m$ di Napoli, si farà la proporzione,

$$24^h : 7^h.18^m :: 59'.43'',7 : x = 18'.10'',04,$$ e però

Long. ⊙ *del 19 Ottobre a mezzodì*	205°.43 .59 ,8
Long. ⊙ il 19 ad $8^h.15^m$ *t. m. di Napoli* .	206 . 2 . 9 ,84

Per trovare la parte proporzionale x, secondo le regole date nel LIBRO I, [§. 53,] bisognerebbe moltiplicare la differenza 59'.43'',7 della tavola per il *luogo* del numero, che qui sarebbe $\frac{7^h.18^m}{24^h}=\frac{7,3}{24}=0,30417$; ma l'uso del *prendere in parti* è spesso preferibile in questa specie di calcoli, e nel caso attuale l'operazione è come segue:

per	24^h	59'.43''7
per	6^h	14 .55, 925
	1	2 .29, 321
	15^m	37, 330
	3	7, 466
per	$7^h.18^m$. . . .	18'.10''04

La longitudine del Sole così determinata è più che esatta se deve usarsi come *argomento* per calcolare la posizione apparente di una stella [§. 28], o la correzione da applicarsi alle al-

tezze corrispondenti, come sarà detto in seguito; ma quando un elemento solare o lunare deve essere adoperato direttamente in qualche problema di astronomia è raro il caso in cui basti il porre a calcolo le sole *differenze prime*. Allora è inevitabile l'uso della formola d'interpolazione (i) [II, §. 36], la cui applicazione si rende più facile nel modo esposto qui appresso.

*§. 30. Rappresentino A_1, A_2, A_3, A_4, i diversi valori di un elemento astronomico corrispondenti a tempi equidifferenti. Se l'intervallo costante di tempo viene indicato con l'unità, e si chiami h il tempo dato di un termine da interpolarsi fra A_2 ed A_3, contato dall'istante corrispondente al primo termine A_1, ed espresso in parti di quella unità, la formola d'interpolazione (i) prenderà l'aspetto,

$$(1)\ldots y = A_1 + h\Delta^1 + \frac{h(h-1)}{2}\delta^2 + \frac{h(h-1)(h-2)}{2.3}\delta^3\ldots$$

dove le differenze $\Delta^1, \delta^2, \delta^3$, sono quelle notate nel seguente quadro

$$\begin{array}{llll}
A_1 & & & \\
 & \Delta^1 & & \\
A_2 & & \delta^2 & \\
 & \delta^1 & & \delta^3 \\
A_3 & & \Delta^2 & \\
 & D^1 & & \\
A_4 & & &
\end{array}$$

Chiamiamo t il tempo che ha per origine l'istante corrispondente ad A_2, e cerchiamo una serie in cui entrino il tempo t in vece di h e la differenza δ^1 in vece della Δ^1. Sarà $h = t+1$, ed inoltre, ricordandosi che ogni differenza si ottiene sottraendo sempre il termine precedente dal seguente in ciascuna serie verticale, si avrà, $A_1 = A_2 - \Delta^1, \Delta^1 = \delta^1 - \delta^2$; i quali valori sostituiti nella serie (1) daranno con facili riduzioni,

$$(2)\ldots y = A_2 + t\delta^1 + \frac{t(t-1)}{2}\delta^2 + \frac{t(t-1)(t+1)}{2.3}\delta^3\ldots$$

Ponendo in questa espressione $\Delta^2 - \delta^3$ in vece di δ^2 sarà;

$$(3)\ldots y = A_2 + t\delta^1 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{2.3}\delta^3\ldots$$

La semisomma delle serie (2), (3) darà subito l'altra,

$$(4)\ldots y = A_2 + t\delta^1 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\frac{\delta^2 + \Delta^2}{2} + \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{2.3}\delta^3\ldots$$

Questa formola, è meglio di qualunque altra, appropriata al calcolo delle interpolazioni, perchè i termini dipendenti dalle differenze d' indice dispari (escluso quello relativo alla differenza *prima*, che rimane costante) risultano molto piccoli, siccome abbiamo dimostrato nella *Discussione* che precede una *Tavola generale d' interpolazione* da noi pubblicata nel 1843; dove si trova anche estesa la stessa formola (4) sino al termine dipendente dalle differenze *quinte*, cioè; (*).

$$(4)\ldots y = A_2 + t\delta^1 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\frac{\delta^2+\Delta^2}{2} + \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{2.3}\delta^3$$
$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t+1)}{2.3.4}\cdot\frac{\Delta^4+\delta^4}{2}$$
$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t+1)(t-\frac{1}{2})}{2.3.4.5}\delta^5\ldots$$

Per applicare questa serie ai casi particolari, bisognerà prendere nelle effemeridi astronomiche i termini A_1, A_2, A_3 ...., formare le differenze *prime*, *seconde*, *terze* etc. di siffatte quantità, e ridurre a numero astratto il tempo per cui si vuol calcolare il termine da interpolarsi, dividendolo per l' intervallo costante delle effemeridi. Ma il calcolo della serie può rendersi molto agevole mediante la *Tavola* sussidiaria qui appresso riportata.

(*) Veggasi la citata nostra Memoria.

TAVOLA D' INTERPOLAZIONE.

ARG.° ORA DATA		*H*	*Parti prop.*	*L*	*Differenze.*	*M*	*Differenze.*	*N*	*Differenze.*	*P*
0^h.00^m	12^h.00^m	0,000000		0,00000		0,0000		0,0000		0,0000
10	50	·013889		·00685	685	·0011	11	·0011	11	,0001
20	40	·027778		·01350	665	·0021	10	·0023	12	·0002
30	30	·041667		·01996	646	·0030	9	·0034	11	·0003
40	20	·055556		·02623	627	·0039	9	·0045	11	·0004
50	10	·069444		·03231	608	·0046	7	·0056	11	·0005
1 .00	11 .00	0,083333		0,03819	588	0,0053	7	0,0066	10	0,0006
10	50	·097222		·04388	569	·0059	6	·0076	10	·0006
20	40	·111111		04938	550	·0064	5	·0086	10	·0007
30	30	·125000		·05469	531	·0068	4	·0096	10	·0007
40	20	·138889		·05980	511	·0072	4	·0106	10	·0008
50	10	·152778		·06472	492	·0075	3	·0115	9	·0008
2 .00	10 .00	0,166667		0,06944	472	0,0077	2	0,0124	9	0,0008
10	50	·180556		·07398	454	·0079	2	·0132	8	·0008
20	40	·194444		·07832	434	·0080	1	·0141	9	·0009
30	30	·208333		·08247	415	·0080	0	·0149	8	·0009
40	20	·222222		·08642	395	·0080	0	·0156	7	·0009
50	10	·236111		·09018	376	·0079	1	·0164	8	·0009
3 .00	9 .00	0,250000		0,09375	357	0,0078	1	0,0171	7	0,0009
10	50	·263889		·09713	338	·0076	2	·0178	7	·0008
20	40	·277778		·10031	318	·0074	2	·0184	6	·0008
30	30	·291667		·10330	299	·0072	2	·0190	6	·0008
40	20	·305556		·10610	280	·0069	3	·0196	6	·0008
50	10	·319444		·10870	260	·0065	4	·0201	5	·0007
4 .00	8 .00	0,333333		0,11111	241	0,0062	3	0,0206	5	0,0007
10	50	·347222		·11333	222	·0058	4	·0210	4	·0007
20	40	·361111		·11536	203	·0053	5	·0214	4	·0006
30	30	·375000		·11719	183	·0049	4	·0218	4	·0005
40	20	·388889		·11883	164	·0044	5	·0222	4	·0005
50	10	·402778		·12027	144	·0039	5	·0225	3	·0004
5 .00	7 .00	0,416667		0,12153	126	0,0034	5	0,0227	2	0,0004
10	50	·430556		·12259	106	·0028	6	·0229	2	.0003
20	40	·444444		·12346	87	·0023	5	·0231	2	.0003
30	30	·458333		·12413	67	·0017	6	·0233	2	.0002
40	20	·472222		·12461	48	·0012	5	·0234	1	.0001
50	10	·486111		·12490	29	.0006	6	·0234	0	.0001
6 .00	6 .00	0,500000		0,12500	10	0,0000	6	0,0234	0	.0000

Parti prop.

MIN.	
1	1389
2	2778
3	4167
4	5556
5	6944
6	8333
7	9722
8	11111
9	12500

SEC.	
10	231
20	463
30	694
40	926
50	1157
60	1389
70	1620
80	1852
90	2083

Dichiarazione ed uso della Tavola.

La *Tavola* suppone che l'elemento astronomico che si domanda sia notato nelle effemeridi da 12^h in 12^h, e l'interpolazione debba eseguirsi per un dato istante intermedio. I numeri H, L, M, N, P registrati nella *Tavola* sono i coefficienti delle *differenze* de' diversi ordini sino al quinto, e si cercano nella tavola stessa con l'*argomento* dell'*ora data*. Il primo di essi, H, rappresenta il *luogo* del termine da interpolarsi, cioè il quoziente dell'*ora data* per 12^h. E siccome i segni di alcuni di siffatti coefficienti variano nel corso delle dodici ore, serviranno a regolare il calcolo le seguenti due formole, nelle quali H, L, M, N, P dinotano numeri astratti positivi;

$$\textit{Fra } 0^h \textit{ e } 6^h \ldots y = A_2 + H\delta^1 - L\frac{\delta^2 + \Delta^2}{2} + M\delta^3 + N\frac{\delta^4 + \Delta^4}{2} - P\delta^5$$

$$\textit{Fra } 6^h \textit{ e } 12^h \ldots y = A_3 - H\delta^1 - L\frac{\delta^2 + \Delta^2}{2} - M\delta^3 + N\frac{\delta^4 + \Delta^4}{2} + P\delta^5$$

Queste formole suppongono che si prendano nelle effemeridi sei termini $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, ed il termine da interpolarsi sia compreso fra A_2 ed A_3; e siano inoltre δ^1 la differenza *prima* centrale, δ^2, Δ^2 le due differenze *seconde* centrali, δ^3 la differenza *terza* centrale, Δ^4, δ^4 le due differenze *quarte* e δ^5 la differenza *quinta*, siccome apparisce dal quadro seguente;

$$\begin{array}{llllll}
A & & & & & \\
 & d^1 & d^2 & & & \\
A_1 & & & & & \\
 & \Delta^1 & & \Delta^3 & & \\
A_2 & & \delta^2 & & \delta^4 & \\
 & \delta^1 & & \delta^3 & & \delta^5 \\
A_3 & & \Delta^2 & & \Delta^4 & \\
 & D^1 & & D^3 & & \\
A_4 & & D^2 & & & \\
 & D^1 & & & & \\
A_5 & & & & &
\end{array}$$

Non sempre l'elemento richiesto si trova calcolato nelle effemeridi da 12^h in 12^h, ed in fatti gli elementi solari sono dati da 24^h in 24^h, e le distanze della Luna dal Sole e dalle stelle sono date da 3^h in 3^h. Nulladimeno la *Tavola* precedente potrà servire per qualunque interpolazione, modificando opportunamente l'*ora data*, che deve fare da argomento. Se l'intervallo delle effemeridi è di 24^h, *l'ora data si dividerà per metà*, affinchè *il luogo* del termine da interpolarsi fra i numeri della tavola non rimanga alterato; e se l'intervallo delle effemeridi è di 3^h, l'*ora data* si moltiplicherà per 4.

Avvertiamo finalmente; che per ottenere il secondo ed il terzo termine della formola sarà utile l'uso de' logaritmi; che per gli altri termini le moltiplicazioni potranno eseguirsi senza questo ajuto; e che l'ultimo termine dipendente dalla differenza *quinta* non ha un valore apprezzabile se non in casi molto rari.

Esempi.

*§. 31. Sia da trovarsi l'AR della Luna per il 25 Aprile 1839 a $9^h.49'.50'',3$ tempo medio di Napoli, servendosi della *Conoscenza de' tempi* di Parigi. La longitudine di Napoli da Parigi è $47^m.40^s,4$, e però il tempo medio di Parigi corrispondente al dato istante di Napoli sarà $9^h.2^m.9^s,9$. L'ascensione retta domandata è poi compresa fra quelle del 25 Aprile a mezzogiorno medio e a mezzanotte media, che sono $178°.34'.16'',5$ e $183°.47'.12'',0$; e le differenze dei diversi ordini fra queste ascensioni rette e le due che le precedono e le seguono sono quali si veggono qui appresso;

	Diff. 1.e	2.e	3.e	4.e	5.e
	+		+	−	+
	5°16′53″3	−2′56″3	1′54″8	5″,6	3″,3
178°.34′.16″,5	5.13.57,0	−1. 1.5	1.49,2	2 ,3	
183 .47 .12 ,0	5.12.55,5	+0.47,7	1.46,9		
	5.13.43,2	+2.34,6			
	5.16.17,8				

Siccome l'ora per la quale si cerca l'AR della Luna è maggiore di 6^h, la formola da adoperarsi nel calcolo sarà

$$y = A_2 - H\delta' - L\frac{\delta^2 + \Delta^2}{2} - M\delta^3 + N\frac{\delta^4 + \Delta^4}{2} + P\delta^5$$

nella quale $\delta' = 5°.12'.55'',5 = 18775'',5$; $\frac{\delta^2 + \Delta^2}{2} = -6'',9$; $\delta^3 = +109'',2$; $\frac{\delta^4 + \Delta^4}{2} = -3'',95$; $\delta^5 = +3'',3$. *Entrando nella tavola d'interpolazione con l'argomento* $9^h.2^m.9^s,9 = 9^h.2^m,16$ si prenderanno i seguenti valori di H, L, M, N; [LIB. I, §. 53, n.° III];

	H		L	M	N
per $9^h.10^m$...	0,236111	. . . . .	0,09018	0,0078	0,0164
per 7....	9722	*per* $7^m,83$...	294		6
per 50^s...	1157		0,09312		0,0170
0,1...	23				
	0,2469923				

laonde il calcolo sarà come segue,

$$
\begin{array}{r}
l.H=9,3926794\\
40\\
l.\delta'=4,2735799\\
116\\
\hline
3,6662749\\
4637'',40
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
L=0,093\\
\dfrac{\delta^2+\Delta^2}{2}=-6,9\\
\hline
837\\
558\\
\hline
-0,6417
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\delta^3=109,2\\
M=\cdot 0078\\
\hline
8736\\
7644\\
\hline
+0,852
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\dfrac{\delta^4+\Delta^2}{2}=-3,95\\
N=\cdot 017\\
\hline
2765\\
395\\
\hline
-0,067
\end{array}
$$

e quindi,

$$
\begin{array}{rl}
A_3 = & 183^\circ.47'.12'',00\\
-H\delta' = & -1\ .17\ .17\ ,40\\
-L\dfrac{\delta^2+\Delta^2}{2} = & \ldots\ldots +0\ ,64\\
-M\delta^3 = & \ldots\ldots -0\ ,85\\
+N\dfrac{\delta^4+\Delta^4}{2} = & \ldots\ldots -0\ ,07\\
\hline
AR☾\ \textit{domandata}\ \ldots\ldots & 182\ .29\ .54\ ,32
\end{array}
$$

*§. 32. Debba, per secondo esempio, trovarsi la declinazione del Sole a mezzodì *vero* in Napoli il giorno 8 Novembre 1846, servendosi dell'Almanacco nautico. Mezzodì vero di Napoli del giorno 8 corrisponde a $23^h.3^m$ vere del giorno 7 di Greenwich; e siccome la declinazione del Sole è calcolata ordinariamente per mezzodì medio nelle effemeridi, così per trovare la declinazione corrispondente al dato istante, bisognerà ridurre le $23^h.3^m$ vere in ore medie. Nel §. 34 mostreremo come si esegue questa conversione con tutta l'esattezza, ma qui basterà osservare che l'equazione del tempo a mezzodì vero del giorno 8 è $-16^m.6^s$ ed *aggiunta al tempo vero deve dare il tempo medio* [II, §. 148]; onde l'ora media per la quale converrà calcolare la declinazione del Sole è $23^h.3^m-16^m.6^s=22^h.46^m.54^s$ del giorno 7 Novembre a Greenwich. Questo istante essendo compreso fra il mezzodì medio del giorno 7 e quello del giorno 8, si prenderanno nell'effemeride i seguenti quattro termini;

		Diff. 1.ª	2.ª
Giorno 6...	$-15^\circ.58'.15''0$		
7	16 .16 . 8 ,4	$-17'.53''4$	
8	16 .33 .45 ,5	17 .37 ,1	$+16''3$
9	16 .51 . 5 ,9	17 .20 ,4	16 ,7

Per applicare la Tavola d'interpolazione si farà $\delta'=-17'.37'',1$ $=-1057'',1$; $\dfrac{\delta^2+\Delta^2}{2}=+16'',5$; e si cercheranno H, L con

l'argomento $\frac{22^h.46^m.54^s}{2} = 11^h.23^m.27^s. = 11^h.23^m,45$. Si avrà;

H	L
per $11^h.30^m$... 0,041667	 0,01996
per 6 ... 8333	*per* $6^m,55$... 411
30^s... 694	0,02407
3 ... 69	+ 16,5
0,050763	120
$Log.\,H = 8,7055473$	144
$Log.\,\delta' = 3,0241161$	24
1,7296634	$L\frac{\delta^2+\Delta^2}{2} = +0'',3960$
$H\delta' = -53'',662$	

$$A_3 = \ldots -16^\circ.33'.45''5$$
$$-H\delta' = \ldots\ldots \quad +53,662$$
$$-L\frac{\delta^2+\Delta^2}{2} = \ldots \quad -0,396$$
$$\textit{Declinazione cercata} = -16.32.52,23$$

Facendo uso dell'Almanacco nautico, si poteva calcolare questa declinazione più direttamente mediante le declinazioni riportate in quell'annuario per mezzodì vero di Greenwich. Prese quattro declinazioni per i giorni 6, 7, 8, 9, ed eseguito il calcolo per mezzodì vero di Napoli, ossia per $23^h.3^m$ di Greenw., la declinazione cercata risulta $-16^\circ.32'.52'',36$, differente di $0'',13$ dalla precedente. Questa diversità di risultamenti dipende da che nell'Almanacco nautico le declinazioni per mezzodì vero sono dedotte da quelle calcolate per mezzodì medio con semplici quarti proporzionali, senza tener conto delle differenze seconde; ed in fatti la declinazione del giorno 8 per mezzodì vero di Greenw. dedotta da quella per mezzodì medio, incaricandosi delle differenze seconde, risulta $-16^\circ.33'.33'',77$ in vece di $-16^\circ.33'.33'',9$ notata nell'Almanacco. Differenze così piccole sono però da trascurarsi, avuto riguardo ancora che il massimo loro valore si verifica appunto in Novembre quando l'equazione del tempo è massima; e noi ne abbiamo fatto parola solo per dar ragione della non perfetta coincidenza de' due risultamenti ottenuti per diverse vie.

*§. 33. Quando l'elemento solare da determinarsi è molto vicino a mezzogiorno, come avviene sempre allorchè si tratta di determinarlo per il mezzogiorno di un paese di Europa diverso da quello pel quale sono calcolate le effemeridi, si può con maggior semplicità e con sufficiente esattezza prendere nelle effemeridi solo tre termini, e, senza incaricarsi delle differenze seconde,

calcolare il quarto proporzionale servendosi della semisomma delle due differenze prime. Nell'esempio precedente adottando le declinazioni de' giorni 7, 8, 9, la semisomma delle due differenze prime sarà, $-\frac{17'.37'',1+17'.20'',4}{2}=-17'.28'',75$, ed il quarto proporzionale per $-1^h.13^m.6^s$, che è il tempo che manca per raggiungere il mezzodì medio del giorno 8, si calcolerà con la *Tavola*, o col prendere in parti, e risulterà $+53'',24$, che non differisce sensibilmente dalla correzione $+53'',27$ ottenuta qui sopra.

Conversione dei diversi tempi uno nell' altro.

PROBLEMA VI. *Convertire il tempo vero in tempo medio e viceversa.*

*§. 34. *L' equazione del tempo è ciò che deve aggiungersi al tempo vero per avere il tempo medio* [II, §, 148]. Essa si trova notata nelle effemeridi astronomiche per l'istante di mezzodì vero, e si può con l'interpolazione calcolare per qualunque altra ora del giorno. Ciò posto, voglia trovarsi il tempo medio corrispondente al tempo vero $12^h.38'.25'',6$ del 15 Novembre 1846 in Napoli, servendosi dell' *Almanacco nautico* calcolato per *Greenwich*. Si sa che la longitudine di Napoli da Greenwich è 57^m, e però l'ora di Greenwich corrispondente alla data ora di Napoli sarà $11^h.41^m.25^s,6$. Se, dunque, si calcolerà l'equazione del tempo per questa ora di Greenwich, sarà calcolata per l'ora proposta di Napoli, ed *aggiunta* all'ora stessa darà il tempo medio domandato.

L'equazione del tempo a mezzodì vero è il 15 Novembre a Greenwich, $-15^m.14^s,73$, e diminuisce numericamente dal 15 al 16 di $10^s,78$; si avrà perciò la proporzione

$$24^h : 11^h.41^m.25^s,6 :: 10^s,78 : x = 5^s,25 \text{, e quindi}$$

Equaz. tempo a mez. vero il 15 Nov. a Greenw.	$-15^m.14^s73$
Variazione per $11^h.41^m.25^s,6$	$+5,25$
Tempo vero *di Napoli*.	$12^h.38\ .25,60$
Tempo medio *di Napoli*	$12\ .23\ .16,12$

Per facilitare il calcolo della parte proporzionale l'*Almanacco nautico* dà la variazione dell'equazione del tempo per 1^h.

Qualche volta la variazione della equazione del tempo ottenuta con la semplice proporzione può contenere un piccolo errore dipendente dalle differenze *seconde* dell'equazione non abbastanza

piccole per trascurarne l'influenza. Allora bisogna adoperare la formola d'interpolazione,

$$(4)\ldots y = A_2 + t\delta' + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\frac{\delta^2+\Delta^2}{2}$$

limitata alle differenze seconde, o in sua vece la *Tavola* del §. 30. Nell'esempio precedente la correzione dovuta alle differenze seconde sarebbe $-0^s,85 \times 0,125 = -0^s,11$, come potrà verificarsi prendendo dalle effemeridi quattro termini, con l'avvertenza che il numero da interpolarsi si trovi sempre fra il secondo ed il terzo termine. Deve notarsi però che l'errore di $0'',11$ è forse il massimo che possa commettersi non incaricandosi delle differenze seconde.

*§. 35. Riguardo al problema inverso, debba convertirsi in tempo vero il tempo medio $12^h.23^m.16^s,01$ del giorno 15 Novembre 1846 in Napoli. Il tempo medio di Greenwich sarà $11^h.26^m.16^s$, e per ottenere il tempo vero bisognerà calcolare l'equazione del tempo per questa ora media, e *toglierla* dall'ora media proposta di Napoli. E poichè nelle effemeridi l'equazione del tempo è data generalmente per *mezzogiorno vero*, la parte proporzionale deve riferirsi a quell'istante, onde per calcolarla bisognerà conoscere l'ora vera corrispondente alla media $11^h.26^m.16^s$, il che sembra a primo aspetto includere un giro vizioso. Ma bisogna riflettere che l'ora vera necessaria per determinare la parte proporzionale non occorre che sia conosciuta con grande esattezza, poichè in generale *gli argomenti adoperati nel calcolo di qualunque correzione basta che siano approssimati, quando le variazioni della correzione sono piccolissime rispetto a quelle dell'argomento*. Per ottenere dunque l'ora vera approssimata *si toglierà* da $11^h.26^m.16^s$ l'equazione del tempo per mezzogiorno vero, $-15^m.15^s$, e si avrà $11^h.41^m.31^s$; dopo di che si farà la proporzione,

$$24^h : 11^h.41^m.31^s :: 10^s,78 : x = +5^s,25$$

la quale correzione aggiunta alla

Equaz. tempo a mez. vero il 15 Nov. a Greenw.	$= -15^m.14,73$

darà,

Equazione corretta (da togliersi)	$-15\ .\ 9,48$
Tempo medio *di Napoli il 15 Novembre*. . .	$12^h.23\ .16,01$
Tempo vero *corrispondente*	$12\ .38\ .25,49$

Incaricandosi, come sopra, delle differenze seconde nel calcolo dell'equazione del tempo, essa risulterebbe $-15^m.9^s,59$, ed il tempo vero sarebbe più esattamente $14^h.38^m.25^s,60$.

Si avverte di più che l'Almanacco nautico riporta l'equazione del tempo anche per mezzogiorno medio, e servendosi di questo dato la correzione dell'equazione si calcolerebbe per l'ora media $11^h.26^m.16^s$, senza aver bisogno dell'ora vera approssimata.

Molte effemeridi in vece dell'equazione del tempo per mezzogiorno vero danno il *tempo medio a mezzodì vero*, il quale non è altra cosa che il complemento dell'equazione del tempo a 24^h, e corrisponde al tempo che segnerebbe a mezzogiorno vero un orologio esattissimo *regolato sul tempo medio*, cioè un orologio che segnasse 0^h. quando il sole medio passa pel meridiano.

PROBLEMA VII. *Convertire il tempo medio in tempo sidereo e viceversa.*

*§. 36. Sia dato il tempo medio $12^h.23^m.16^s,01$ del giorno 15 Novembre 1846 in Napoli, e voglia trovarsi il tempo sidereo corrispondente. Tutte le effemeridi astronomiche danno il *tempo sidereo a mezzogiorno medio* per il luogo dove sono calcolate, e nel problema attuale prima operazione è il determinarlo per il luogo proposto. Questo calcolo è facile e non differisce da quello di qualunque altro elemento astronomico, che debba trasportarsi da un luogo ad un altro mediante la longitudine conosciuta. Osservando in fatti, che il mezzogiorno di Napoli precede di 57^m quello di Greenwich, e che il tempo sidereo a mezzodì medio cresce uniformemente e costantemente di $3^m.56^s,55$ al giorno (accelerazione diurna delle stelle sul sole medio), si vede che il tempo sidereo a mezzodì medio in Napoli deve esser minore che a Greenwich, e la quantità costante da togliersi dal numero dell'Almanacco nautico risulta, per il meridiano di Napoli, dalla proporzione

$24^h : 57^m :: 3^m.56^s,55 : x = 9^s,363$; ma il

Temp. sid. a mez. med. il 15 Nov. a Green. $= 15^h.36^m.45^s,59$ dunque il
Temp. sid. a mez. med. il 15 in Napoli. $= 15\ .36\ .36,23$

Ciò posto, riduciamo in ore, minuti e secondi siderei le ore, minuti e secondi medii contenuti nel tempo medio proposto $12^h.23^m.16^s,01$; e questa riduzione potrà farsi o col rapporto costante determinato nel LIBRO II, §. 154, o con la tavola di riduzione del tempo medio in tempo sidereo, e viceversa, che si trova in tutte le effemeridi. Servendoci della tavola dell'Almanacco nautico avremo,

12^h *medie*. . . .	$12^h.\ 1^m.58^s,278$ *sideree*
23^m.	23. 3,778
16^s	16,043
01	01
	12 .25 .18,11

Questo numero $12^h.25^m.18^s,11$ rappresenta il tempo sidereo trascorso da mezzodì medio in Napoli sino all'istante che si considera, e quindi, per avere il tempo sidereo assoluto di questo

istante, basterà aggiungere $12^h.25^m.18^s,11$ al tempo sidereo a mezzodì medio di Napoli; cioè sarà

Tempo sidereo a mezzodì medio in Napoli . .	$= 15^h.36^m.36^s,23$
Ore sideree trascorse dopo mezzodì medio . .	12 .25 .18 ,11
Tempo sidereo in Napoli	4 . 1 .54 ,34

dove è da avvertire che dalla somma si sono tolte 24^h. per contare il tempo sidereo dal più prossimo passaggio del punto equinoziale pel meridiano.

*§. 37. La risoluzione del problema inverso serve a chiarire maggiormente ciò che si è detto sinora. Sia dato il tempo sidereo $4^h.1^m.54^s,34$ il 15 Novembre 1846 in Napoli, e si voglia il tempo medio corrispondente; si troverà, come qui sopra, il tempo sidereo a mezzodì medio del giorno 15 in Napoli, cioè $15^h.36^m.36^s,23$, e si toglierà dalla data ora siderea, aumentata di 24, sapendosi che l'istante da essa indicato è posteriore a mezzodì medio. Il resto $12^h.25^m.18^s,11$ dinoterà le ore sideree trascorse dopo mezzodì medio, le quali ridotte in ore medie, daranno il tempo medio domandato. La riduzione eseguita con la tavola dell'Almanacco nautico sarà come segue;

12^h *sideree*	$11^h.58^m.\ 2^s,045$
25^m	24 .55 ,904
18^s	17 ,951
0,11	0 ,110
Tempo medio cercato . . .	12 .23 .16 ,01

PROBLEMA VIII. *Convertire un dato istante di tempo vero in tempo sidereo e viceversa.*

*§. 38. La soluzione di questo problema si ha riunendo quelle de' due precedenti; poichè se è dato il tempo vero, esso si cambierà prima in tempo medio e poi in sidereo, e se è dato il tempo sidereo, si convertirà prima in tempo medio e poi in tempo vero. Ma facendo uso di effemeridi le quali, come l'Almanacco nautico, danno l'*AR* apparente del Sole a mezzodì vero, si potrà abbreviare il calcolo del tempo sidereo, essendo dato il tempo vero.

Nella *fig.* 33 del LIBRO II rappresenti S'' il Sole vero (projettato sull'equatore) dopo il suo passaggio al meridiano, e sia Υ la posizione del punto equinoziale nell'istante in cui il Sole si trova in S''. Il tempo sidereo di questo istante è indicato dall'arco ΥS dell'equatore, o sia dall'*AR* del mezzo del cielo; ed il tempo vero è dinotato dall'angolo orario del Sole, equivalente all'arco SS''. E poichè $\Upsilon S = \Upsilon S'' + SS''$, è chiaro che per avere il tempo sidereo ΥS basterà aggiungere al dato tempo vero

SS'' l'ascensione retta apparente $\Upsilon S''$ del Sole calcolata per quell'istante.

Ciò posto, sia $12^h.38^m.25^s,60$ il tempo vero di Napoli del 15 Novembre 1846 da convertirsi in tempo sidereo. Il tempo vero corrispondente di Greenwich sarà $11^h.41^m.25^s,6$, e per quest'ora dovrà calcolarsi l'*AR* apparente del Sole mediante l'Almanacco nautico. L'ascensione retta a mezzodì vero del 15 Novembre per Greenwich è $15^h.21^m.28^s,36$, ed il suo aumento in 24^h, fra il 15 e il 16, è $4^m.7^s,36$; quindi l'aumento per $11^h.41^m.25^s,6$ si otterrà dalla proporzione,

$24^h : 11^h.41^m.25^s,6 :: 4^m.7^s,36 : x =$ $2^m.\ 0^s,49$; ma la

AR ⊙ *a mez. vero di Greenw.* . . . $= 15^h.21^m.28\ ,36$, dunque

AR ⊙ *per l'ora data di Napoli* . . $= 15\ .23\ .28\ ,85$,

cui aggiunto il

Tempo vero *di Napoli*. . . . . . $= 12\ .38\ .25\ ,60$, si ha il

Tempo sidereo *corrispondente* . . . $= 4\ .\ 1\ .54\ ,45$

Questo risultamento differisce di $0^s,11$ da quello ottenuto di sopra [§. 36], perchè l'aumento dell'*AR* del Sole non è, come si è supposto, esattamente proporzionale al tempo; e difatti, incaricandosi delle differenze seconde, con prendere nell'Almanacco nautico quattro ascensioni rette relative ai giorni 14, 15, 16, 17, [§. 34], si ottiene per *AR* del Sole all'ora data di Napoli $15^h.23^m.28^s,74$, e rimane corretto l'errore indicato.

Per la ricerca del tempo vero quando è dato il tempo sidereo non è conveniente servirsi dell'*AR* apparente del Sole, o sia del tempo sidereo a mezzodì vero, e val meglio convertire il tempo proposto in tempo medio ed indi in tempo vero.

Passaggi pel meridiano.

Problema ix. *Calcolare il tempo medio o sidereo del passaggio del Sole per un dato meridiano, ed il tempo vero o medio del passaggio di una stella.*

*§. 39. Questo problema, quando il tempo domandato si vuole con tutta l'esattezza, si riduce ad una conversione di tempi, onde la sua soluzione rientra in quella de'tre precedenti. Infatti, il passaggio del Sole in tempo medio per un dato meridiano si otterrà convertendo in tempo medio 0^h di tempo vero di quel luogo, ed il passaggio in tempo sidereo si avrà cambiando di più il tempo medio in tempo sidereo, o pure calcolando direttamente l'*AR* del Sole per mezzodì vero del dato luogo [§. 38], perchè si sa che l'*AR* di un astro quando si trova nel meridiano eguaglia il tempo sidereo del suo passaggio. Rispetto alle

stelle, la loro ascensione retta rappresenta egualmente il tempo sidereo del loro passaggio pel meridiano, il quale si potrà convertire in tempo medio o in tempo vero, secondo che si voglia il passaggio nell' uno o nell' altro tempo.

Occorre però qualche volta di avere l'ora approssimata di alcuno di questi passaggi, per prepararsi ad un' osservazione. In questo caso si eseguirà la conversione de' tempi facendo uso delle quantità contenute nelle effemeridi come stanno, senza incaricarsi delle correzioni. Ma rispetto alle stelle si potrà operare anche più celeremente.

Voglia trovarsi per esempio il tempo approssimato vero o medio del passaggio di α *Cigno* il giorno 7 Novembre 1846 in Napoli. Per ciò che si è detto nel §. 38, se supponiamo la stella sul meridiano nel punto S [LIB. II, *fig.* 33], si avrà l'eguaglianza,

$$AR\star = AR\odot + \textit{tempo vero del passaggio}$$

da cui,

$$\textit{Tempo vero del passaggio} = AR\star - AR\odot.$$

Che se, in vece di supporre nel punto S'' il Sole vero, si supponga esservi il sole medio, l'arco $\Upsilon S''$ rappresenterà allora l'AR del sole medio, e l'arco SS'' il tempo *medio* del passaggio della stella. E siccome l'AR del sole medio a mezzodì medio si trova nelle effemeridi sotto la denominazione di *tempo sidereo a mezzogiorno medio* [LIB. II, §. 155], così il tempo medio del passaggio si ha dall' altra eguaglianza,

$$\textit{Tempo medio del passaggio} = AR\star - \textit{Tempo sid. a mez. medio}.$$

Per il passaggio di α Cigno il giorno 7 Novembre 1846, si avrà, servendosi dell' Almanacco nautico,

$$\textit{Tempo vero del passaggio} = 20^h.36^m - 14^h.49^m = 5^h.47^m.$$
$$\textit{Tempo medio del passaggio} = 20\ .36\ \ - 15\ .\ 5\ \ = 5\ .31$$

PROBLEMA X. *Calcolare il tempo medio del passaggio della Luna pel meridiano del luogo per il quale sono calcolate le effemeridi.*

*§. 40. Rappresentino $AR☾$, $AR\odot m$ le ascensioni rette espresse in tempo della Luna e del sole medio all' istante di mezzogiorno medio, o sia a 0^h medie; e siano p, s le variazioni di queste ascensioni rette nel corso di 24^h medie. Chiamando t il tempo medio *incognito* del passaggio della Luna pel meridiano, da quanto precede apparisce chiaramente che le correzioni da applicarsi alle ascensioni rette medesime per ridurle all' istante del passaggio della Luna pel meridiano, sono espresse da $\frac{tp}{24^h}$, $\frac{ts}{24^h}$, nella ipotesi che gli aumenti delle ascensioni rette siano propor-

zionali. ai tempi. Dunque le AR del Sole medio e della Luna, quando questo astro si trova sul meridiano, sono approssimatamente, $AR\odot m + \frac{ts}{24}$, $AR☾ + \frac{tp}{24}$. Or, se nella *fig.* 33 del LIB. II si supponga rappresentare S'' il Sole medio, ed S la Luna, l'arco SS'' indicherà l'angolo orario del Sole medio, quando la Luna si trova nel meridiano, ossia il tempo medio del passaggio di essa. Laonde questo tempo medio si otterrà prendendo la differenza degli archi $\Upsilon S''$, ΥS, e si avrà perciò l'equazione,

$$t = AR☾ + \frac{tp}{24} - AR\odot m - \frac{ts}{24};$$

la quale risoluta rispetto a t darà

$$(5) \ldots \ldots t = \frac{AR☾ - AR\odot m}{24^h + s - p} \times 24^h$$

Ottenuto così il tempo medio approssimato del passaggio della Luna, si calcolerà da capo l'AR di essa per quell'istante, facendo uso della formola o della Tavola d'interpolazione. L'AR della Luna ridotta in tempo rappresenterà il tempo sidereo del passaggio dell'astro pel meridiano, il quale si convertirà in tempo medio e sarà risoluto il problema. Per lo più l'operazione termina qui; ma per assicurarsi se l'AR della Luna calcolata per il tempo approssimato t (dato dall'equazione (5)) è abbastanza esatta, spesso si ripete il calcolo dell'AR col tempo corretto del passaggio, e quando il nuovo calcolo conduce ad un tempo medio del passaggio eguale al precedente, si è sicuri che l'istante determinato è esatto, al pari dell'AR della Luna ottenuta dall'ultimo calcolo, la quale rappresenta il *tempo sidereo* del passaggio dell'astro.

*§. 41. Debba determinarsi il tempo medio del passaggio della Luna al meridiano di Greenwich il giorno 28 Settembre 1846. L'AR della Luna a mezzogiorno medio, e quella del sole medio, ovvero il *tempo sidereo a mezzodì medio*, presi nell'Almanacco nautico sono;

$AR☾$ *a mezzodì med. di Greenw.* . . $= 18^h.31^m.\ 5^s70$
$AR\odot m$ *allo stesso istante* . . . . . . $= 12\ .27\ .31{,}04$
differenza $= 6\ .\ 3\ .34{,}66$

L'aumento dell'AR della Luna da mezzodì medio a mezzanotte, ossia il *moto della Luna in ascensione retta*, è in dodici ore, $29^m.1^s$, e quindi in 24^h sarà $58^m.2^s$; ed il moto in AR del Sole medio in 24^h è, come si sa, costantemente $3^m.56^s{,}55$. Introdotti questi valori nella formola (5) si avrà il tempo medio approssimato del passaggio della Luna pel meridiano di Greenwich;

$$t = \frac{6^h.3^m.34^s{,}66 \times 24^h}{23^h.5^m.54^s{,}6} = 6^h.17^m.46^s.$$

Ciò premesso, si calcolerà l' *AR* della Luna per il giorno 28 Settembre e l'ora media $6^h.17^m.46^s$.; il quale calcolo sarà facilissimo servendosi dell' Almanacco nautico che dà le posizioni della Luna da ora in ora, ma si potrà in caso diverso eseguire con l' interpolazione nel modo indicato superiormente [§. 31]. L' ascensione retta calcolata risulta $18^h.46^m.18^s,43$, e siccome essa esprime il tempo sidereo del passaggio della Luna pel meridiano di Greenwich, si ridurrà in tempo medio, e sarà risoluto il problema; si avrà dunque [§., 37],

AR della Luna nel meridiano . . .	$= 18^h.46^m.18^s,43$
Tempo sid. a mez. medio	$= 12\ .27\ .31\ ,04$
Ore sid. trascorse dopo mez. medio.	$= 6\ .18\ .47\ ,39$
Ore medie corrispondenti	$= 6^h.17^m.45^s,33$

Il tempo medio esatto del passaggio della Luna pel meridiano di Greenwich è perciò $6^h.17^m.45^s,33$. Ma per esserne più sicuri si calcolerà nuovamente l' *AR* della Luna per questo istante, e si avrà, $18^h.46^m.18^s,41$; la quale considerata come un tempo sidereo e ridotta in tempo medio darà $6^h.17^m.45^s,31$, che non differisce sensibilmente dal risultamento precedente.

***§. 42.** Se si volesse calcolare l' istante del passaggio di uno de' lembi della Luna pel meridiano, è chiaro che dal tempo già determinato del passaggio del centro si dovrebbe togliere *il tempo che il semidiametro lunare impiega a passare pel meridiano*, ad ottenere il quale bisogna far uso dei seguenti principii.

1.° Se due punti D, m [LIB. II, *fig.* 1.] della circonferenza del parallelo di un astro si suppongono congiunti con un arco di cerchio massimo, si verrà a formare un triangolo sferico isoscele compreso fra que' due punti ed il polo celeste più prossimo; il quale triangolo sarà determinato se saranno conosciuti l' arco che unisce i due punti e la distanza dell' astro dal polo. Indicando con δ la declinazione dell' astro, e con Δ la base del triangolo isoscele o sia l' angolo al centro C della sfera fra gli anzidetti due punti, l' angolo opposto a questo lato, cioè l'angolo al polo, che chiameremo p, sarà dato dalla formola [I, §. 33],

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} p = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta}{\cos \delta}.$$

Ma l' angolo al polo è misurato dall' arco dE dell' equatore, e quest' arco contiene lo stesso numero di gradi dell' arco mD del parallelo, dunque l' eguaglianza precedente serve a determinare l' arco di parallelo compreso fra due successive posizioni che prende un astro col moto diurno.

Quando l' angolo Δ è molto piccolo, e la declinazione δ non sia tanto vicina a 90° che il numero $\frac{1}{\cos \delta}$ risulti molto grande,

anche p riesce abbastanza piccolo, e sarà permesso di porre $\frac{1}{2}\Delta$, $\frac{1}{2}p$ in luogo di sen $\frac{1}{2}\Delta$, sen $\frac{1}{2}p$, onde la formola (6) si cambia in $p=\frac{\Delta}{\cos\delta}$.

2.° Se l'astro che si considera è una stella che non può avere alcun moto proprio sensibile durante le 24 ore della rotazione diurna, l'arco *Dm* sarà percorso in un tempo *sidereo* rappresentato da $\frac{Dm}{15}$; il quale per due posizioni dell'astro molto vicine, e di cui sia conosciuta la distanza angolare al centro della sfera, si otterrà dividendo per 15 il valore dell'angolo p dato dalla espressione $\frac{\Delta}{\cos\delta}$. Questo metodo si applica a determinare il tempo che deve impiegare una stella a passare da un filo laterale dell'*istromento de' passaggi* (*) al filo centrale, o *meridiano*, avendo prima misurato l'intervallo angolare Δ de' due fili. La formola completa che dà quel tempo espresso in secondi quando Δ è dato in secondi di arco, è dunque

$$(6)' \quad . \; . \; . \; p_{t}=\frac{\Delta''}{15\cos\delta}.$$

Si avverte però che per le stelle vicinissime al polo, come la *Polare*, e σ *Ottante*, deve preferirsi, la formola (6), dalla quale si avrà con maggiore esattezza l'angolo p, che poi si dividerà per 15 onde ottenere il tempo sidereo domandato.

Se l'astro di cui si considera il movimento diurno ha un moto proprio in *AR* da occidente in oriente, come il Sole e la Luna, il tempo sidereo da esso impiegato a percorrere l'arco p del suo parallelo sarà maggiore di quello assegnato dalla formola (6)', perchè, mentre l'astro è trasportato dal moto diurno verso occidente, il moto suo proprio lo trattiene alquanto indietro verso oriente. Chiamando $d\alpha$ il moto proprio dell'astro in *AR* in un secondo di tempo sidereo, nel quale la sfera celeste descrive 15'' di arco, è chiaro che l'arco di equatore o di parallelo descritto dall'astro in un secondo di tempo sidereo, in forza de' due movimenti combinati, diurno e proprio, sarà espresso da $15''-d\alpha$. Per conseguenza l'arco $\frac{\Delta''}{\cos\delta}$ sarà percorso in un tempo sidereo

(*) La teoria dell'istrumento de' passaggi, o cannocchiale meridiano, del quale abbiamo fatto un cenno nel LIB. II, §. 32 sarà da noi esposta in una *Appendice* alla presente opera, in cui daremo ancora maggiore sviluppo ad alcuni articoli di questo III LIBRO, per uso degli ingegneri militari addetti alle operazioni geodetiche ed astronomiche.

espresso da $\frac{\Delta''}{(15-d\alpha)\cos\delta}$; onde la formola (6)′ modificata per gli astri che hanno un moto proprio diviene,

$$(6)'' \ldots p_t = \frac{\Delta''}{(15-d\alpha)\cos\delta} (*).$$

*§. 43. Tutto ciò premesso, indicando con Δ'' il semidiametro della Luna espresso in secondi, quest'arco si potrà considerare come uno spazio da percorrersi dal centro della Luna nelle vicinanze del meridiano, e però la formola (6)″ servirà a calcolare il *tempo che impiega il semidiametro lunare a passare pel meridiano.*

Riprendendo l'esempio del §. 41, si cercherà nell'Almanacco nautico il semidiametro della Luna per il giorno 28 Settembre 1846 e l'ora media $6^h.17^m.45^s$, e si avrà $\Delta''=958'',19$. Essendosi inoltre veduto che il moto diurno della Luna in *AR* era $58^m.2^s,24$ ed in arco $14°.30'.33'',6$, il moto in un secondo di tempo siderco si otterrà dividendo quest'arco per 86637, numero di secondi siderei contenuti in 24^h medie, ed il quoziente sarà $0'',603$. In fine la declinazione della Luna calcolata mediante l'Almanacco nautico per $6^h.17^m.45^s$ di tempo medio del giorno 28 Settembre risulterà $-17°.59'.50''$. Introducendo tutti questi dati nella formola (6)″, si avrà

$$p_t = \frac{958,19}{14,397 \cos 17°.59'.50''} = 69^s,98;$$

e quindi il semidiametro della Luna impiegherà $1^m.9^s,98$ di tempo sidereo a passare pel meridiano. Ma si è veduto che l'*AR* della Luna nel meridiano era $18^h.46^m.18^s,41$, la quale rappre-

(*) In verità per la Luna questa formola ha bisogno di una piccola correzione relativa alla parallasse, la quale modifica la declinazione δ ed il moto $d\alpha$ in *AR*. La formola esatta e semplice data dal ch. astronomo *Carlini* per calcolare il tempo impiegato dalla Luna ad attraversare un piccolo spazio Δ in vicinanza del meridiano è,

$$T = \frac{\Delta - \pi\Delta\cos z}{(15-d\alpha)\cos\delta};$$

in cui indicano π la parallasse orizzontale della Luna e z la sua distanza apparente dallo zenit. Questa correzione della formola (6)″, dovuta alla parallasse non è però necessaria quando l'osservazione della Luna fatta all'istrumento de' passaggi è *completa*, cioè quando si è osservato *l'appulso* del lembo lunare a due fili equidistanti dal meridiano; e non ha luogo neppure allorchè la formola (6)″ si applica, come qui appresso, a determinare il tempo che impiega il semidiametro lunare a passare pel meridiano, il quale tempo è lo stesso tanto pel semidiametro *vero* che per *l'apparente* [LIB. II, §. 172].

senta l'istante di tempo sidereo del passaggio del centro dell'astro; dunque l'istante sidereo del passaggio del *primo lembo*, o sia del lembo occidentale della Luna sarà dato dalla differenza $18^h.46^m.18^s,41 - 1^m.9^s,98 = 18^h.45^m.8^s,43$. Questo stesso risultamento si trova registrato a pag. 516 dell'Almanacco nautico del 1846.

CAPO TERZO

De' varii metodi per determinare con esattezza il tempo.

---

§. 44. Il miglior metodo per determinare il tempo è quello di osservare i passaggi del Sole e delle stelle pel meridiano, ma esso richiede un *istrumento de' passaggi* stabilmente situato nel piano del meridiano, ed è proprio di un osservatorio astronomico. Laonde è raro che se ne possano giovare gl'ingegneri geografi, i quali sono obbligati ordinariamente a far uso d'istrumenti movibili, e però debbono operare altrimenti.

Due sono i metodi principali per determinare il tempo con osservazioni fatte fuori del meridiano, 1.° le altezze corrispondenti del Sole o di una stella, 2.° le altezze assolute osservate quando gli astri si trovano nelle vicinanze del primo verticale.

Problema xi. *Determinare il tempo per mezzo delle altezze corrispondenti di un astro.*

§. 45. Se chiamiamo L la latitudine del luogo di osservazione, δ la declinazione di un astro qualunque, che consideriamo fuori del meridiano, P il suo angolo orario, ed h la sua altezza sull'orizzonte, i tre lati del triangolo sferico compreso fra il polo, lo zenit e l'astro [lib. ii, *fig.* 1] saranno $90^\circ - L$, $90^\circ - \delta$, $90^\circ - h$, e dalla formola fondamentale della trigonometria si avrà;

$$\cos P = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta}{\cos L \cos \delta}$$

Essendo L costante, il secondo membro di questa equazione varierà al variare di δ e di h, e quindi per un astro la cui declinazione rimanga invariabile per più ore, ad altezze eguali prima e dopo il passaggio pel meridiano, corrisponderanno angoli orarii eguali ne' due emisferi orientale ed occidentale [II. §. 14]. Se dunque si noteranno ad un orologio astronomico gl'istanti corrispondenti alle altezze eguali dell'astro ne' due emisferi, la differenza di

quelli istanti eguaglierà il doppio angolo orario, e si potrà avere l'istante del passaggio dell'astro pel meridiano aggiungendo alla prima ora osservata la metà della indicata differenza, ossia l'angolo orario; il che riviene allo stesso che *prendere la semisomma de' due istanti corrispondenti alle altezze eguali*, poichè essi, insieme all'istante del passaggio, formano una proporzione continua aritmetica. In ciò consiste il metodo delle altezze corrispondenti, col quale si determina l'ora che segna un orologio astronomico nel momento del passaggio di un astro pel meridiano, ad oggetto di conoscere l'accelerazione o il ritardamento dell'orologio stesso. Infatti, se si è osservato il Sole, e l'orologio deve indicare il tempo medio, si paragonerà il *tempo medio* calcolato del passaggio del Sole pel meridiano, [§. 39], con l'ora che segnava l'orologio al passaggio dell'astro, e la differenza sarà l'errore, o piuttosto la *deviazione* dell'orologio dal tempo medio [II, §. 33]. Se si è osservata una stella, e l'orologio è regolato sul tempo sidereo, si paragonerà l'ora che segnava l'orologio al passaggio della stella con l'*AR* apparente dell'astro ridotta in tempo, e la differenza sarà la *deviazione* dell'orologio dal tempo sidereo [ivi]. Quando poi l'orologio segnasse il tempo medio e si fosse osservata una stella, bisognerebbe paragonare il tempo indicato dall'orologio al momento del passaggio della stella, col tempo medio del passaggio di quell'astro, calcolato come è detto nel *Problema* IX [§. 39]; e viceversa, se l'orologio segnasse il tempo sidereo, e si fosse osservato il Sole, lo stesso problema IX servirebbe a calcolare il tempo sidereo del passaggio del Sole, il quale si paragonerebbe al tempo indicato dall'orologio al passaggio dell'astro.

§. 46. Il precedente modo di determinare l'istante del passaggio di un astro pel meridiano suppone che la sua declinazione rimanga costante nel tempo interposto fra le due osservazioni, ma non avviene esattamente così pel Sole e pei pianeti, le cui declinazioni variano sensibilmente nel corso di alcune ore. Per questo cambiamento gli angoli orarii corrispondenti ad altezze eguali non sono precisamente eguali, onde la semisomma degl'istanti osservati all'orologio deve soffrire una piccola correzione per dare l'effettivo istante del passaggio. Infatti, se chiamiamo P il primo angolo orario, $P+dP$ il secondo, t il tempo dell'orologio corrispondente all'altezza precedente, e t' quello dell'altezza seguente il passaggio pel meridiano; il tempo di questo passaggio all'orologio sarà espresso da $t+P$, e si avrà inoltre $t'=t+P+P+dP$, da cui $\frac{t+t'}{2}=t+P+\frac{1}{2}dP$, e quindi $t+P=\frac{t+t'}{2}-\frac{1}{2}dP$; cioè dalla semisomma degli istanti osservati all'orologio bisognerà togliere la quantità $\frac{1}{2}dP$ per avere l'ora esatta del passaggio dell'astro pel meridiano, la quale si è veduto essere espressa da $t+P$.

Cerchiamo il valore della correzione $\frac{1}{2}dP$, ed a tale oggetto riprendiamo l' equazione,

$\cos P = \frac{\text{sen}\, h - \text{sen}\, \delta\, \text{sen} L}{\cos\delta \cos L}$, ovvero $\cos P \cos\delta \cos L = \text{sen}\, h - \text{sen}\, \delta\, \text{sen} L$,

e differenziandola nella supposizione di δ, P variabili, avremo;
$-\cos P \cos L\, \text{sen}\, \delta\, d\delta - \cos\delta \cos L\, \text{sen} P dP = -\text{sen} L \cos\delta\, d\delta$, da cui

$$dP = \frac{\text{sen} L \cos\delta\, d\delta - \cos P \cos L\, \text{sen}\, \delta\, d\delta}{\cos\delta \cos L\, \text{sen}\, P}, \text{ e}$$

$$dP = \frac{d\delta}{\text{sen}\, P}\{\tan L - \tan\delta \cos P\}$$

Questa variazione dell'angolo orario è data in arco, e per convertirla in tempo dovrà dividersi per 15. Bisognerà inoltre dividerla per 2 e mutarne il segno onde applicarla alla semisomma degl' istanti $\frac{t+t'}{2}$, ed ottenere il passaggio pel meridiano. Si avrà dunque la *correzione del passaggio dedotto dalle altezze corrispondenti*, che dicesi ancora *equazione delle altezze corrispondenti*, così espressa;

$$(c) \ldots \; Equaz. = -\frac{d\delta}{30}\left\{\frac{\tan L}{\text{sen} P} - \tan\delta \cot P\right\}$$

La quale quantità essendo sempre molto piccola, per calcolarla con esattezza non è necessario che gli elementi L, δ, e P siano dati con grande precisione; per cui si può adottare per P la semidifferenza $\frac{t'-t}{2}$ degl' istanti osservati all' orologio ridotta in arco. La variazione $d\delta$ della declinazione, che deve in vece conoscersi con esattezza, è quella che si verifica durante il tempo interposto fra le osservazioni, o sia nell' intervallo di tempo $t'-t$, e si calcola per mezzo delle effemeridi astronomiche, prendendo in esse la variazione *diurna* v della declinazione, e facendo la proporzione, $24^h : v :: t'-t : d\delta = \frac{v(t'-t)}{24}$. Perchè poi il valore di $d\delta$ risulti più esatto, la variazione diurna v della declinazione dovrà esser media tra le due comprese fra tre passaggi successivi dell' astro pel meridiano nel cui mezzo si trovi il passaggio che si considera. Bisogna anche ricordarsi, nel calcolo della equazione del tempo, che la declinazione australe deve esser presa negativamente, e che la variazione $d\delta$ risulterà positiva se la declinazione australe va numericamente diminuendo, e negativa se va crescendo; ed il contrario accaderà per la declinazione boreale. Tutto ciò sarà reso più chiaro da un esempio.

*§. 47. Nel giorno 10 Giugno 1842 osservammo in Napoli le altezze corrispondenti del Sole con un cerchio ripetitore diviso decimalmente; e gl' istanti corrispondenti presi con un *cronometro di Pennington*, le loro semisomme, e le loro semidifferenze, o siano gli angoli orarii approssimati, furono come segue;

Altezze	t *Est*	t' *Ovest*	*Mezzodì vero non corretto* $=\frac{1}{2}(t'+t)$	*Angolo orario approssimato* $=\frac{1}{2}(t'-t)$
70°4	$22^h.49^m.31^s2$	$1^h.54^m.49^s2$	$0^h.22^m.10^s2$	$1^h.32^m.39^s0$
70,8	51 .50,8	52 .28,8	22 . 9,8	30 .19,0
71,2	54 .14,8	50 . 5,2	22 .10,0	27 .55,2
71,6	56 .39,2	47 .40,8	22 .10,0.	25 .31,4
71,9	58 .30,0	45 .50,4	22 .10,2	23 .40,2
72,2	23 . 0 .20,0	44 . 0.0	22 .10,0	21 .50,0
72,6	2 .50,0	41 .30,0	22 .10,0	19 :20,0
		medii	$0^h.22^m.10^s03$	$1^h.25^m.54^s$

Da questo quadro si scorge che nella pratica le altezze si ripetono, e si prende un medio di tutte le semisomme $\frac{1}{2}(t'+t)$, per avere con maggiore esattezza l' istante del passaggio. Se in vece del Sole si fosse osservata una stella, il medio $0^h.22^m.10^s,03$ della quarta colonna indicherebbe l' istante preciso del passaggio dell' astro pel meridiano in tempo del cronometro; ma trattandosi del Sole, deve applicarsi a quel medio la correzione data dalla formola (c). Gli elementi per calcolarla sono L, P, δ e $d\delta$; la latitudine di Napoli (a Pizzofalcone) è $L=40°.49'.50''$, l' angolo orario medio risulta dalle osservazioni $P=1^h.25^m.54^s$, ed in arco $P=21°.28'.30''$, e rispetto a δ e $d\delta$, esse si ottengono dall' Almanacco nautico del 1842. La declinazione per mezzodì vero di Napoli calcolata con quelle effemeridi è $\delta=23°.0'.40''$ [§. 32], e basta conoscerla con l' approssimazione di $10''$; la variazione diurna in declinazione, che al contrario deve esser data con molta esattezza, era $+4'.52'',7$ fra il 9 ed il 10 Giugno, e $+4'.28'',5$ fra il 10 e l' 11, onde la media $v=4'.40'',6=280''6$. E poichè l' intervallo fra le osservazioni, ossia il doppio angolo orario $t'-t=2P=2^h.51^m.48^s$, per calcolare $d\delta$ si farà la proporzione, $24^h:280'',6::2^h.51^m.48^s:d\delta=33'',48$. Introdotti questi valori nella formola (c), e calcolata la correzione, si avrà

Equazione delle altezze corrisp.	$=$	$-\ 1^s,43$
Mezzodì vero non corretto	$=$	$0^h.22^m.10,03$
Mezzodì vero corretto al cronometro .	$=$	$0.22.8,60$

Quest' ultimo risultamento fa conoscere che il cronometro di *Pennington* il 10 Giugno a mezzogiorno accelerava $22^m.8^s,6$ sul

tempo vero, e volendo conoscere la sua *deviazione* dal tempo medio, bisognerà paragonare l'ora del cronometro $0^h.22^m.8^s,6$ col tempo medio del passaggio del Sole pel meridiano di Napoli [§. 39]. Calcolato questo tempo risulta $23^h.58^m.58^s,46$, e però il cronometro, nel giorno 10 Giugno a mezzodì vero, accelerava sul tempo medio di $24^h.22^m.8^s,60-23^h.58^m.58^s,46=23^m.10^s,14$. Noi usiamo indicare le accelerazioni col segno $-$, e i ritardamenti col segno $+$, perchè in siffatto modo quelle quantità rappresentano le correzioni da applicarsi al tempo indicato dall'orologio per avere il tempo esatto. Se si volesse la deviazione del cronometro per l'istante di mezzodì medio, bisognerebbe alla deviazione ottenuta per mezzodì vero aggiungere l'accelerazione o il ritardamento del cronometro nel breve tempo interposto fra i due mezzogiorni. Così, sapendosi che il cronometro di Pennington accelerava in 24 ore $7^s,18$ sul tempo medio (fra il 10 e l'11 Giugno), per trovare di quanto accelerò da mezzogiorno vero a mezzogiorno medio nel 10 Giugno, cioè da $23^h.58^m.58^s,46$ medie a 24^h, si farebbe la proporzione,

$$24^h : 7^s,18 :: 24^h - 23^h.58^m.58^s,46 (=1^m.1^s,54) : x = 0^s,01$$

L'accelerazione dell'orologio a mezzodì medio fu dunque $23^m.10^s,14+0^s,01=23^m.10^s,15$. La correzione x qui riesce insignificante, ma quando l'equazione del tempo ed il movimento diurno dell'orologio fossero più grandi, potrebbe giungere ad una frazione di secondo non trascurabile.

*§. 48. Un'altra piccola correzione deve qualche volta applicarsi al tempo che si ottiene dall'osservazione delle altezze corrispondenti per avere l'esatto istante del passaggio dell'astro pel meridiano. Questa correzione dipende dalla refrazione astronomica, la quale se non è la stessa per le altezze occidentali che per le orientali a cagione del diverso stato barometrico e termometrico dell'atmosfera [I!, §. 49], fa sì che ad uguali altezze apparenti non corrispondano uguali angoli orarii. Sia a l'altezza vera all'est, ed r la refrazione; sarà $a+r$ l'altezza apparente. Similmente, se a' è l'altezza vera occidentale ed r' la refrazione, $a'+r'$ rappresenterà l'altezza apparente. E dovendo, secondo le osservazioni, essere eguali le due altezze apparenti, sarà

$$a+r=a'+r', \text{ ed } a=a'-(r-r')$$

Da questa eguaglianza si scorge che se $r>r'$, l'altezza vera occidentale supera l'orientale di $r-r'$. La refrazione ha fatto dunque vedere l'astro ad eguali altezze dalle due parti, quando esso non era ancora disceso abbastanza verso occidente per giungere ad una posizione esattamente corrispondente a quella che aveva avuto all'oriente. Il secondo istante t' all'orologio è stato perciò anticipato, ed il tempo t' deve essere accresciuto di un

tempuscolo dt necessario perchè l'astro possa discendere di un arco eguale ad $r-r'$.

Per determinare la piccola correzione dt, si può supporre che, avendo preso nell'emisfero orientale varie altezze, gli aumenti di esse siano proporzionali agli aumenti del tempo. Per tal modo, se le altezze estreme sono state α, α', ed il tempo trascorso fra esse all'orologio è stato θ, si potrà fare la proporzione

$$\alpha'-\alpha:\theta::r-r':dt=\frac{\theta(r-r')}{(\alpha'-\alpha)}.$$

Questa è la correzione da applicarsi al secondo istante t', per cui quella da applicarsi all'istante del passaggio dell'astro sarà;

$$(c)'. \quad . \quad . \quad dt=\frac{\theta(r-r')}{2(\alpha'-\alpha)}.$$

*§. 49. Volendo mostrare come si calcola la formola $(c)'$, supponiamo che le altezze estreme osservate all'oriente, siano $\alpha=14°.10'$, $\alpha'=15°.30'$, e la differenza de' tempi corrispondenti segnati dall'orologio sia $\theta=345^s,3$. Le indicazioni del barometro e del termometro erano per le osservazioni orientali, *Bar.* 757^{mm}, *Term.* 10° cent., e per le occidentali, *Bar.* 770^{mm}, *Term.* 6°. Con questi ultimi dati e con l'altezza 14°.50', media fra le due estreme osservate, si cercheranno nelle tavole di refrazione le *refrazioni apparenti* r,r', che convengono alle osservazioni orientali ed alle occidentali. Servendosi delle tavole riportate annualmente nella *Conoscenza de' tempi* di Parigi, si ha che la *refrazione media* (o sia quella calcolata per la colonna barometrica 760^{mm}, e per la temperatura 10° centigradi) corrispondente all'altezza 14°.50' è 3'.36'',88 = 216'',88; e per ottenere la *refrazione apparente*, bisogna modificare opportunamente questo numero moltiplicandolo tanto pel fattore barometrico che pel termometrico. Al barometro 757^{mm} corrisponde il fattore 0,996, ed al termometro 10°, il fattore 1,000; onde la refrazione apparente per le osservazioni orientali è $216'',88\times0,996\times1.000=216'',01$. Similmente la refrazione apparente per le osservazioni occidentali è $216,88\times1,013\times1,015=222'',99$. La differenza $r-r'$ sarà dunque eguale a $216'',01-222,99=-6'',98$; e poichè $\alpha'-\alpha=1°.20'=4800''$, e $\theta=345^s,3$, introdotti questi valori nella formola $(c)'$ si avrà,

$$dt=\frac{345^s,3\times-6,98}{9600}=-0^s,25$$

*§. 50. È da avvertirsi che qualche volta le altezze corrispondenti possono servire a determinare l'istante del passaggio inferiore dell'astro; passaggio che rispetto al Sole corrisponde alla mezzanotte. In questo caso le osservazioni occidentali precedono le orientali,

ma la formola che dà la correzione del passaggio rimane la stessa, prendendo sempre per angolo orario il semintervallo fra le osservazioni. Noteremo inoltre che il metodo delle altezze corrispondenti è pregevole perchè non richiede un istrumento di grande perfezione per eseguire le osservazioni, nè una cognizione molto precisa della latitudine del luogo; ed anzi, se si osserva una stella, la latitudine dell' osservatorio è affatto inutile per la determinazione del tempo. È pure superfluo il conoscere le precise altezze dell' astro, delle quali si fa uso soltanto nel calcolo della correzioue dipendente dalla refrazione, che raramente occorre. D' ordinario i punti della graduazione dello strumento che servono per dirigere il cannocchiale all' astro sono arbitrarii, ma debbono conservare la stessa altezza sull' orizzonte nelle due posizioni che prende l' istrumento all' est ed all' ovest del meridiano. Si avverte in fine che quando il cannocchiale che si adopera ha un debole ingrandimento, è necessario che le altezze si prendano almeno due ore prima e due ore dopo il passaggio dell' astro al meridiano, affinchè il movimento dell' astro in altezza sia sensibile, e si possa apprezzare con esattezza il tempo di ciascun *appulso*.

Problema xii. *Determinare il tempo mediante le altezze assolute di un astro osservate nelle vicinanze del primo verticale.*

§. 51. Il metodo delle altezze corrispondenti è soggetto all' inconveniente, che possono mancare le seconde osservazioni coprendosi inopportunamente il cielo di nuvole. Si preferisce perciò spesso l' osservazione delle altezze assolute di un astro nelle vicinanze del primo verticale, e si sceglie questa posizione perchè quattro o cinque ore prima che l' astro giunga al meridiano, e propriamente vicino al primo verticale, il movimento dell'astro in altezza è molto rapido, e si può giudicare con precisione dell' istante della *collimazione*. Ecco come si procede per determinare il tempo con quest' altro metodo.

Si misura l' altezza dell' astro con un cerchio verticale, e si ripetono più volte le osservazioni, notando per ciascuna di esse l' istante corrispondente all' orologio astronomico. Si avrà così una serie di altezze ed un' altra d' istanti corrispondenti, ed ogni altezza potrà servire a calcolare un triangolo sferico compreso fra lo zenit il polo e l' astro, come segue.

L' altezza misurata essendo *apparente*, bisognerà prima di tutto ridurla ad altezza *vera*, il che si farà applicandovi la sola correzione della refrazione se si tratta di una stella, e la refrazione e la parallasse trattandosi del Sole; alle quali due correzioni si aggiungerà anche quella del semidiametro in più o in meno, se si sarà osservato il lembo inferiore o il superiore dell' astro invece del centro. Dopo di ciò si calcolerà la declinazione appa-

rente della stella co' metodi già esposti, o pure la declinazione del Sole per il giorno, e l'ora presso a poco conosciuta dell'osservazione, mediante le effemeridi. Per tal modo nel triangolo PZD [II, *fig.* 1] potranno considerarsi determinati i tre lati, cioè ZD complemento dell'altezza vera, DP complemento della declinazione, e ZP complemento dell'altezza del polo. Con questi dati si calcolerà l'angolo orario ZPD, per mezzo della formola di Trigonometria

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},$$

nella quale $A=P$, $a=ZD$, $b=ZP$, $c=PD$; ed indicando con z, L, δ la distanza dell'astro dallo zenit, la latitudine del luogo e la declinazione dell'astro, si avrà $a=z$, $b=90^\circ-L$, $c=90^\circ-\delta$, e quindi

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}P=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(z+\delta-L)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(z+L-\delta)}{\cos L\cos\delta}}$$

Per applicare il calcolo a questa formola sarà utile porre $z+\delta+L=\Sigma$, come nella Trigonometria, e si avrà

$$(a)\ldots\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}P=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\Sigma-L)\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\delta)}{\cos L\cos\delta}}$$

Calcolato l'angolo orario P, esso si ridurrà in tempo e si aggiungerà o toglierà dall'ora del passaggio dell'astro pel meridiano per avere il tempo esatto dell'osservazione [II, §§. 13, 38]. Se si è osservata una stella, l'angolo orario esprimerà un intervallo di *tempo sidereo*, ed aggiunto o sottratto dall' AR apparente della stella che dinota il tempo sidereo del passaggio dell'astro pel meridiano, darà l'ora siderea esatta dell'osservazione; la quale paragonata con l'ora che segnava l'orologio quando si è misurata l'altezza della stella farà conoscere la deviazione dell'orologio stesso dal tempo sidereo. Se si è osservato il Sole, l'angolo orario esprimerà un intervallo di *tempo vero*, ed aggiunto o sottratto da 0^h darà l'ora vera dell'osservazione, che si convertirà in ora media [§. 34], e si paragonerà al tempo segnato dall'orologio per conoscere la deviazione di questo dal tempo medio.

Si ripeterà il calcolo dell'angolo orario per ogni altezza o distanza dallo zenit misurata, e con esso si ripeterà pure il confronto dell'ora calcolata con quella indicata dall'orologio, onde sarà più volte determinata la deviazione, o, come suol dirsi ancora, lo *stato assoluto* dell'orologio rispetto al tempo medio o al tempo sidereo. Si prenderà in fine la media aritmetica delle deviazioni ottenute, e si farà corrispondere al medio aritmetico

de' tempi calcolati per mezzo degli angoli orarii. Aggiungiamo un esempio, e scegliamo a preferenza il calcolo delle altezze assolute del Sole, che ha bisogno di un maggior numero di correzioni.

*§. 52. Nella mattina del dì 30 Maggio 1842 osservammo in Napoli con un cerchio ripetitore di *Reichembach* le distanze dallo zenit del lembo inferiore del Sole, e gl' istanti corrispondenti con un cronometro di *Pennington*. Le distanze semplici zenitali, i tempi dell'orologio per ciascuna delle osservazioni *coniugate* [LIB. V], i loro medii corrispondenti alle distanze semplici, e le indicazioni del barometro e del termometro, furono come qui appresso;

Distanze semplici del ⊙ dallo zenit	*Tempi di Pennington*	*Istanti medii*	
60°. 9'.22'',25	19h.44m.34s,2 19 .46 .56 ,6	19h.45m.45s,4	*Bar.*=27p.11l,7 =27,975
57 .15 . 2 ,56	20 . 0 .18 ,4 20 . 2 . 4 ,2	20 . 1 . 8, 8	*Ter.*=17°,0. *R.*

Per calcolare l' angolo orario, prima operazione è quella di ridurre le distanze apparenti del lembo inferiore del Sole dallo zenit a distanze vere del suo centro dallo zenit. Ecco a quest' oggetto il calcolo della refrazione e della parallasse per la distanza 60°.9'.22''25, o sia per l' altezza 29°.50'.37'',75; avvertendo che la refrazione si è presa nelle tavole della *Conoscenza de' tempi*, e la parallasse orizzontale, ed il semidiametro del Sole dall' *Almanacco nautico*.

Refraz. media per 30° *di altezza*. . . . . 1'.40'',6
Parte prop. per 9',4 . . . . 0 ,61
Refr. med. per l' altezza osservata . . . . 1 .41 ,21

Fattore bar. = 0,9964
Fattore term. = 0,9590
Prodotto. . = 0,9555
Refr. med. = 101,21
Prodotto = 96,71 . . . . *Refr. app.te* . . . . —1'.36''71
Altezza app.te . . 29°.50.37 ,75

Paral. oriz. ⊙ = 8'',46 — *Alt. corretta*. . = 29 .49. 1 ,04
log. paral. . = 0,92737 — *Semidiametro* ⊙ = 15.47 ,5
l. cos. alt. centro = 9,93718 — *Alt. del centro* . = 30 . 4.48 ,54.
0,86455 — *Paral. d' alt.* . = + 7 ,32
Paral. d' alt. = 7'',32 — *Alt. vera* ⊙. . . = 30 . 4.55 ,86
Dist. zenit. . . = 59 .55. 4 ,1

Trovata la distanza vera del centro del Sole dallo zenit, si cercherà la sua declinazione nell' Almanacco nautico per l'*istante dell' osservazione*. E qui si presenta la stessa difficoltà incontrata altrove, cioè che si suppone già conosciuta l' ora che si va cercando; ma si risponde come nel §. 35, che un piccolo errore sull' ora, la quale serve di *argomento* per determinare la declinazione, non ne può produrre che uno trascurabile sulla declinazione. Che se poi non si avesse alcuna cognizione dello *stato assoluto* dell' orologio astronomico che si adopera, bisognerebbe valutare prudenzialmente l' ora media dell' osservazione, trovare con essa la declinazione, introdurla in un primo calcolo dell'angolo orario eseguito con la formola (a), e determinare così l'ora media approssimata; con questa si calcolerebbe nuovamente la declinazione, la quale servirebbe in un secondo calcolo dell' angolo orario a determinare con esattezza il tempo domandato. Nell' esempio proposto si conosce che l'accelerazione assoluta del cronometro sul tempo medio era di 22^m circa nel giorno 30 Maggio, e che l' accelerazione giornaliera dell' orologio fu di $6^s,5$; per la qual cosa dall' istante medio $19^h.45^m.45^s,4$ corrispondente alla prima distanza dallo zenit si toglieranno 22^m, e si avrà il tempo medio approssimato dell' osservazione in Napoli, cioè $19^h.23^m.45^s$ del 29 Maggio, tempo medio astronomico [II, §. 29]. Il tempo di Greenwich sarà $18^h.26^m.45^s$, e con questo elemento la declinazione del Sole risulta dall' Almanacco nautico, $\delta = 21^\circ.43'.21'',9$ [§. 32]. Si conoscono ora la distanza vera del Sole dallo zenit, la sua declinazione, e la latitudine del luogo di osservazione, che è $40^\circ.49'.50''$, ed introdotti questi dati nella formola (a), il calcolo dell' angolo orario sarà come segue

$z = 59.55.\ 4,1$		
$\delta = 21.43.21,9$ . . .	$C.l.\cos\delta = 0,0319894$	
	16.0	
$L = 40.49.50,0$ . . .	$C.l.\cos L = 0,1211070$	
$\Sigma = 122.28.16,0$	$L.\text{sen}(\frac{1}{2}\Sigma - \delta) = 9,8036127$	
$\frac{1}{2}\Sigma = 61.14.\ 8,0$	155.6	
$\delta = 21.43.21,9$	$L.\text{sen}(\frac{1}{2}\Sigma - L) = 9,5423492$	
	452.8	
$\frac{1}{2}\Sigma - \delta = 39.30.46,1$		
$\frac{1}{2}\Sigma = 61.14.\ 8,0$	$L.\text{sen}^2\frac{1}{2}P = 19,4991207.4$	
$L = 40.49.50,0$	$L.\text{sen}\frac{1}{2}P = 9,7495603.7$	
	528	
$\frac{1}{2}\Sigma - L = 20.24.18,0$	$\frac{1}{2}P = 34.10.42,44$ $\quad 75.7$	310
	$P = 68.21.24,88$	2.44

L' angolo orario P ridotto in tempo è $4^h.33^m.25^s,66$, e presone il complemento a 24^h, l' ora vera esatta dell' osservazione in

Napoli risulta $19^h.26^m.34^s,34$. Si riduca questo tempo vero in tempo medio per paragonarlo al tempo del cronometro, e si avrà,

Tempo medio dell'osservazione	$19^h.23^m.40^s,33$
Tempo del cronometro	$19\ .45\ .45\ ,40$
Accelerazione del cronometro	$22\ .\ 5\ ,07$

Con un simile procedimento si calcolerà il tempo medio della seconda osservazione; e primamente la distanza vera del centro del Sole dallo zenit risulterà $57°.0'.34'',2$, e la declinazione del Sole per l'ora media di Napoli $20^h.1^m.8^s,8 - 22^m = 19^h.39^m.9^s$ sarà $21°.43'.27'',7$. Con questi dati, e con la latitudine del R. Officio Topografico di Napoli, calcolando il secondo angolo orario, si ottiene $64°.30'.37'',8$, onde l'ora vera della seconda osservazione è $19^h.41^m.57^s,48$. Ridotto questo istante in tempo medio si ha $19^h.39^m.3^s,56$, la quale ora tolta da quella che segnava il cronometro, $20^h.1^m.8^s,8$, dà per accelerazione dell'orologio $22^m.5^s,24$. Ma dalla prima osservazione risulta che l'orologio accelerava $22^m.5^s,07$ a $19^h.23^m.40^s,33$, dunque, prendendo un medio delle due accelerazioni e de' tempi ai quali si riferiscono, si conchiuderà che *l'accelerazione di Pennington il giorno 29 Maggio 1842 in Napoli a* $19^h.31^m.21^s,9$ *di tempo medio fu* $22^m.5^s,15$.

§. 53. Ciascuna delle due distanze dallo zenit poste a calcolo nel §. precedente è dedotta da una sola coppia osservata col cerchio ripetitore. Si potrebbero misurare due o più coppie, e fare una sola lettura dell'angolo multiplo alla fine della operazione, notando però sempre il tempo per ogni appulso dell'astro; ma quando si prende il medio di quattro o di sei angoli osservati ed il medio degl'istanti corrispondenti si viene a supporre che il moto dell'astro in altezza sia proporzionale al tempo, il che non è vero a rigore, e può solo ammettersi nella durata di due o tre minuti. *Delambre* suppose che si potessero aggruppare senza inconveniente le distanze dallo zenit a quattro a quattro, ed il Sig. *Soldner* diede una formola di correzione per un gruppo comunque esteso (*). Sembra però preferibile il sistema di calcolare gli angoli orarii per ogni coppia di distanze dallo zenit, il quale metodo se è più lungo, ha il vantaggio di presentare molti confronti che assicurano l'esattezza dell'operazione. Avvertiamo che, per paragonare fra loro i risultamenti ottenuti dal calcolo di più coppie di osservazioni, bisogna riportarli tutti ad un medesimo istante, servendosi della variazione diurna conosciuta dell'orologio. Così nell'esempio precedente l'accelerazione di *Pennington* fu $22^m.5^s,07$ a $19^h.23^m.40^s$, e per paragonarla a

(*) Veggasi la Geodesia di Puissant 3.ª edizione Tom. II. pag. 153.

quella ottenuta dalla seconda osservazione, bisognerà ridurla all' ora $19^h.39^m$ di questa. Al quale oggetto si dirà; se il cronometro in 24^h accelerava $6^s,5$, in $15^m.20^s$ (tempo trascorso fra la prima e la seconda osservazione) quanto avrà accelerato? Il quarto proporzionale $0^s,07$ aggiunto all' accelerazione $22^m.5^s,07$ ottenuta dalla prima osservazione darà $22^m.5^s,14$, che sarà l'accelerazione ridotta all' istante della seconda osservazione. Per tal modo i risultamenti delle due osservazioni non differiscono che di $0^s,11$, e per un medio si dirà che il cronometro accelerava $22^m.5^s,19$ a $19^h.39^m$ di tempo medio.

*§. 54. Abbiamo in ciò che precede supposto conosciuta la *variazione diurna* dell' orologio, e ce ne siamo serviti per ridurre la *deviazione* assoluta da un' ora ad un' altra. La variazione diurna intanto dipende dalla deviazione, e si ottiene prendendo la differenza fra le deviazioni determinate in due giorni successivi con l' intervallo di 24 ore. Supponiamo per esempio che, avendo osservate le distanze dallo zenit del Sole la mattina del 29 Maggio 1842 col procedimento esposto quì sopra, se ne sia dedotto che il cronometro di *Pennington* accelerava $21^m.58^s,47$ a $18^h.50^m.34^s$ di tempo medio. Siccome il giorno dopo il cronometro accelerò $22^m.5^s,15$ a $19^h.31^m.22^s$ [§. 52], così si conchiuderà che l' orologio in $24^h.40^m.48^s$ (tempo trascorso fra le osservazioni del 29 e del 30) avanzò di $22^m.5^s,15 - 21^m.58^s,47 = 6^s,68$; e per ottenere l' accelerazione in 24^h si farà la proporzione

$$24^h.40^m.48^s : 24^h :: 6^s.68 : x = 6^s,50$$

È chiaro poi, che questa accelerazione *diurna* aggiunta alla deviazione assoluta del giorno 28 a $18^h.50^m.34^s$ (computo astronomico), darà la deviazione del giorno 29 alla stessa ora, che sarà $22^m.4^s,97$; e viceversa togliendo $6^s,5$ dalla deviazione $22^m.5^s,15$ del giorno 29, si avrebbe la deviazione del giorno 28 per l' ora del 29.

Determinate a questo modo le variazioni diurne e le deviazioni assolute dell' orologio da 24 ore in 24 ore, si potrà formare il quadro del suo *andamento* [II, §. 33], che servirà a trovare il tempo esatto medio o sidereo, di qualunque fenomeno osservato con lo stesso orologio. Così, prendendo per norma il quadro riportato nel LIB. II, §. 33, se si suppone che le deviazioni di quell' orologio regolato sul tempo sidereo corrispondano a 0^h, e che sia stato osservato un fenomeno nel dì 6 Giugno a $17^h.24^m.35^s,3$ dell' orologio, si dirà: l' orologio il 6 Giugno a 0^h. sideree *accelerava* [§. 47.] $3^m.35^s,0$, e poichè in 24^h, fra il giorno 6 ed il 7, *ritardò* $1^s,08$, il suo ritardamento in $17^h.24^m,35^s3$ sarà stato $0^s,79$, e quindi la sua accelerazione il dì 6 Giugno a $17^h.24^m.35^s,3$ era $-3^m.35^s,0 + 0^s,79 = -3^m.34^s,21$. Ma il fenomeno fu osservato a $17^h.24^m.35^s,3$, dell' orologio, dun-

quo il tempo sidereo esatto del fenomeno fu $17^h.24^m.35^s,3 - 3^m.34^s,21 = 17^h.21^m.1^s,09$.

Ulteriori particolari sulla pratica relativa al modo di determinare l'andamento di un orologio astronomico, esigerebbero lunghe spiegazioni, e non produrrebbero quel frutto che si ottiene dall'operare effettivamente sotto una buona direzione.

CAPO QUARTO

Determinazione delle longitudini, delle latitudini, e degli azimuti terrestri.

Problema xiii. *Determinare la longitudine di un luogo della superficie terrestre.*

§. 55. Si è dimostrato che la differenza di longitudine fra due luoghi non è altra cosa che la differenza delle ore che in uno stesso istante fisico si contano sotto i meridiani de'luoghi medesimi. Questa relazione fra la longitudine ed il tempo serve di fondamento a tutti i metodi finora immaginati per determinare le longitudini. Se con un mezzo qualunque si potessero conoscere le ore che in uno stesso istante fisico assoluto si contano in Napoli ed a Parigi (per esempio), la differenza di quelle ore darebbe immediatamente la longitudine di Napoli valutata dal meridiano di Parigi. Un fenomeno celeste visibile contemporaneamente a Napoli ed a Parigi è quel mezzo che ci può avvertire della simultaneità delle osservazioni fatte in due luoghi così distanti della Terra. Quindi gli ecclissi della Luna e de' satelliti di Giove; gli ecclissi del Sole e le occultazioni delle stelle dietro la Luna; i passaggi della Luna pel meridiano, le distanze della Luna dal Sole e dalle stelle; e finalmente le estinzioni delle stelle filanti osservate in due diverse stazioni, sono i fenomeni celesti che servono a determinare le longitudini. Vi sono poi altri mezzi che dipendono dall' opera dell' uomo, cioè i viaggi fatti co' cronometri, ed i segnali a fuoco.

§. 56. *Ecclissi della Luna e de' satelliti di Giove.* La Luna si ecclissa entrando nel cono ombroso della Terra [lib. ii, §§. 114, 118, 119] ed essendo un corpo opaco illuminato dal Sole, perde effettivamente la sua luce come una fiaccola che si spegne: perciò il principio o la fine di un ecclisse lunare accade nello stesso istante fisico per tutti i luoghi della Terra che possono ve-

dere il fenomeno, facendo astrazione dalle piccole differenze prodotte dalla librazione. Dunque se in due o più luoghi si osservino le varie fasi di un ecclisse lunare e si notino gl'istanti corrispondenti, le differenze delle ore in cui è accaduta una stessa fase ne'diversi luoghi daranno le differenze di longitudine de'luoghi stessi. Gli ecclissi de'satelliti di Giove sono un fenomeno interamente simile al precedente, poichè i satelliti perdono effettivamente la loro luce entrando nell'ombra del pianeta principale; onde le differenze degli istanti dell'*immersione* o dell'*emersione* osservati in diversi luoghi della Terra danno le differenze di longitudine.

Deve però avvertirsi che gli ecclissi di Luna sono poco buoni per determinare le longitudini con esattezza, poichè come si è veduto nel LIB. II, §. 120, il cono ombroso della Terra è circondato da una penombra nella quale entrando la Luna si oscura gradatamente, e quindi non si possono apprezzare con precisione gl'istanti dell'effettivo principio e della fine dell'ecclisse, cioè quelli dell'entrata e dell'uscita del globo lunare dal cono ombroso della Terra. Gli ecclissi de'satelliti di Giove hanno lo stesso difetto, ma sono migliori di quelli di Luna perchè la penombra è meno sensibile per la maggiore distanza dal Sole e la grandezza maggiore del pianeta.

§. 57. *Ecclissi del Sole ed occultazioni delle stelle fisse dietro la Luna.* Quando la Luna entra nel cono luminoso frapposto tra il Sole e la Terra, nasconde ad una parte degli abitanti della Terra la vista del Sole, e questo fenomeno si chiama ecclisse di Sole, ma più propriamente dovrebbe dirsi ecclisse di Terra. L'ecclisse di Sole è di natura interamente diversa da quello di Luna, poichè il Sole quando si ecclissa non perde effettivamente la sua luce come la Luna, e perciò l'ecclisse di Sole è diverso per i varii luoghi della Terra, e per molti luoghi non accade affatto [II, §. 118]. Gli ecclissi di Sole sono buoni per determinare le longitudini perchè il principio, e la fine di ciascuna fase sono istantanei, e non soggetti all'incertezza accennata per gli ecclissi di Luna; ma siccome quelli ecclissi sono diversi pe'diversi luoghi della Terra, così non si possono immediatamente paragonare gl'istanti corrispondenti ad una medesima fase osservata in più luoghi, per dedurne le differenze di longitudine, ed abbisognano molti calcoli e riduzioni prima di poter istituire quel paragone. Gli antichi non sapevano calcolare gli ecclissi di Sole, e si contentavano di determinare grossolanamente le longitudini con gli ecclissi di Luna che ora sono quasi interamente abbandonati.

Le occultazioni delle stelle dietro la Luna si adoperano anche con vantaggio nella determinazione delle longitudini, e sono fenomeni dello stesso genere degli ecclissi di Sole [II, §. 122].

Esse sono perciò diverse ne' diversi luoghi della Terra, e per molti non accadono; onde per paragonare fra loro gl' istanti delle *immersioni* o delle *emersioni* osservati in varii paesi, bisogna prima eseguire gli stessi calcoli che si richiedono per gli ecclissi di Sole.

Le riduzioni delle osservazioni di un ecclisse di Sole o di un'occultazione di stella dietro la Luna, necessarie per poterne dedurre la longitudine, dipendono dal calcolo delle parallassi, il quale è fondato sopra teoriche abbastanza estese, comunque facili. Altronde gli ecclissi e le occultazioni sono fenomeni molto rari e non vanno esenti da alcune incertezze, come la diminuzione *empirica* da applicarsi al diametro del Sole per l' irradiazione, e, rispetto alle stelle, l' apparenza singolare che si verifica spesso nell' immersione (e si crede relativa alla vista dell' osservatore), cioè che la stella giunta a contatto del lembo lucido lunare non si nasconde istantaneamente, ma prima di scomparire continua per qualche minuto secondo a vedersi avanzare sul disco della Luna. Noi ci riserbiamo perciò di dare il calcolo degli ecclissi nell' *Appendice* di quest' opera, e passiamo ad esporre gli altri metodi.

§. 58. *Passaggi della Luna pel meridiano.* Ogni astro che come una stella fissa conserva per 24 ore la stessa ascensione retta, passa pel meridiano di ciascun luogo della Terra alla stessa ora siderea, quantunque l' istante *fisico assoluto* del suo passaggio sia sempre diverso; e ciò avviene perchè quell' ora siderea non è altra cosa che la distanza in tempo del punto equinoziale dall' astro, la quale si suppone invariabile nel corso di 24^h, cioè nel tempo che impiega l' astro a passare successivamente per tutti i meridiani de' varii luoghi della Terra. Ma la Luna avendo un forte moto proprio cambia continuamente di ascensione retta, per cui se al momento in cui è passata (a cagion d' esempio) pel meridiano di Napoli aveva un' ascensione retta di 30 gradi, l' ora siderea del suo passaggio sarà stata 2^h; e dovendo poi impiegare un' altra ora per passare al meridiano di Londra, la sua ascensione retta si accrescerà in questo spazio di tempo, e divenendo $30°.30'$, l' ora siderea del suo passaggio a quel meridiano sarà $2^h.2^m$.

Partendo da questo principio, se l dinoterà la differenza di longitudine di due meridiani espressa in tempo, una stella fissa per passare dal meridiano orientale all' occidentale impiegherà un tempo fisico effettivo eguale ad l, e la Luna impiegherà un tempo $l+d\alpha$, indicando con $d\alpha$ l' aumento che riceve l' *AR* della Luna durante il tempo che mette l' astro a passare dall' uno all' altro meridiano, cioè nel tempo sidereo $l+d\alpha$. Ora, la differenza $d\alpha$ può esser data dall' esperienza; poichè, supposto che due osservatori abbiano precedentemente convenuto di osservare in una data sera il passaggio della Luna pel proprio meridiano, l' osservatore situato all' ovest noterà all' istante del passaggio un tempo

sidereo maggiore del tempo notato all' est: e siccome il ritardo di una stella, o sia il tempo *fisico effettivo* da essa impiegato nel passare dall' uno all' altro meridiano non può essere avvertito sull' orologio occidentale, perchè i passaggi degli astri che si presentano ad un meridiano qualunque con la stessa ascensione retta sono indicati dall' orologio con la stessa ora siderea, così l' eccesso di tempo notato a ponente rispetto alla Luna, sarà dovuto interamente all' aumento della sua AR nel tempo fisico da essa impiegato a percorrere lo spazio interposto fra i due meridiani. L' eccesso $d\alpha$, ottenuto dall' osservazione, potrà servire a trovare con facilità la *differenza de' meridiani*, ossia la differenza di longitudine.

Infatti, indichiamo con m l' aumento dell' AR della Luna in un' ora di tempo medio, preso nelle effemeridi, e con s l'aumento costante dell' AR del sole medio in un' ora media, o sia la differenza $9^s,86$ fra un' ora media ed un' ora siderea. È chiaro che prendendo per unità l' ora siderea, l' ora media sarà dinotata da 1^h+s, onde l' AR della Luna cresce nelle effemeridi di m nel tempo sidereo 1^h+s. Ma si è supposto che la stessa ascensione retta erasi aumentata di $d\alpha$ nel tempo sidereo $l+d\alpha$; dunque si potrà stabilire la proporzione;

$$1^h+s : l+d\alpha :: m : d\alpha, \text{ da cui si ottiene,}$$

$$(1^h+s)d\alpha = (l+d\alpha)m.$$

Questa eguaglianza può servire a trovare l, se si conosce $d\alpha$, e reciprocamente. Si avrà perciò,

$$(1) \; \ldots\ldots \; l = \frac{(1^h+s-m)d\alpha}{m}, \text{ o pure}$$

$$(1)' \; \ldots\ldots \; d\alpha = \frac{ml}{1^h+s-m}.$$

Nel problema X abbiamo esposta la maniera di calcolare il tempo medio o sidereo del passaggio della Luna pel meridiano del luogo in cui sono calcolate le effemeridi; l'eguaglianza (1)' ci dà ora il tempo *sidereo* del passaggio della Luna per un altro meridiano qualunque di cui si conosca la longitudine l rispetto al meridiano delle effemeridi, poichè basterà a tal uopo [II, §. 33] aggiungere $d\alpha$ al tempo *sidereo* del passaggio calcolato nel problema X se la longitudine l è occidentale, o togliere $d\alpha$, se è orientale.

Dobbiamo avvertire che nelle formole (1), (1)' le quantità $d\alpha$, l, m, s sono tutte espresse in tempo, e che per trovare con esattezza il *moto orario* m della Luna in ascensione retta, il quale varia continuamente col tempo, bisogna determinarlo per l' istante fisico intermedio fra quelli de' passaggi della Luna per i due meridiani, servendosi della longitudine l presso a poco conosciuta. Un esempio chiarirà meglio queste idee.

*§. 59. Nel giorno 28 Settembre 1846 osservammo in Napoli il passaggio del lembo ovest della Luna pel meridiano, e l'istante del pendolo, corretto delle deviazioni dell'istrumento de' passaggi, e ridotto in tempo sidereo fu $18^h.42^m.44^s,98$. Non essendo stata eseguita l'osservazione corrispondente in altro luogo, potremo far servire il passaggio osservato in Napoli a determinare la longitudine di *Pizzofalcone* da Greenwich, sostituendo all'osservazione che avrebbe dovuto farsi a Greenwich, il tempo del passaggio del lembo ovest della Luna calcolato per mezzo dell'*Almanacco nautico*, che fu per quel giorno $18^h.45^m.8^s,43$ [PROB. X]. La differenza dx de' tempi de' due passaggi risulta dunque, $143^s,45$, e per applicare la formola (1), bisognerà trovare soltanto il moto m della Luna in AR per l'istante fisico intermedio fra le due osservazioni. La determinazione di questo istante dipende dalla conoscenza della longitndine di Napoli, che si cerca; ma nello stato presente della Geografia la longitudine di un luogo qualunque di Europa è sempre conosciuta per approssimazione. Supponendo la longitudine di Napoli da Greenwich di 57^m, il tempo sidereo assoluto che deve impiegare la Luna per passare dal meridiano di Napoli a quello di Greenwich sarà $l+dx=57^m+143^s,45$ $=59^m.23^s,45$ [§. 58], ovvero $59^m.13^s,72$ di tempo medio. Ma l'ora media del passaggio del lembo ovest della Luna pel meridiano di Greenwich fu il 28 Settembre $6^h.16^m.35^s$ [PROB. X], dunque il passaggio pel meridiano di Napoli in tempo di Greenwich sarà $6^h.16^m.35^s-59^m$, e l'istante intermedio fra i due passaggi risulterà $5^h.47^m$, tempo medio di Greenwich. L'errore di un minuto su questo tempo non influisce sull'esattezza del moto orario della Luna da determinarsi. Servendosi dell'Almanacco nautico sarà facilissimo trovare il moto orario della Luna in AR per $5^h.47^m$, e si avrà $m=145^s,10$; ma se le posizioni della Luna fossero date soltanto da 12 in 12 ore, allora si dovrebbero calcolare con l'interpolazione [§. 31] le ascensioni rette della Luna per $5^h.17^m$ e per $6^h.17^m$, cioè mezz'ora prima e mezz'ora dopo l'istante intermedio, e la differenza delle ascensioni rette calcolate darebbe il moto orario domandato.

Introduciamo il valore di m nella formola (1) ed avremo,

$$l=\frac{3609^s,86-145^s,10}{145^s,10}\,dx, \text{ ovvero}$$

$$l=23,878\,dx$$

Questa eguaglianza dimostra che il metodo attuale per determinare la longitudine di un luogo richiede somma precisione nelle osservazioni, perchè un piccolissimo errore sulla differenza dx de' tempi de' passaggi risulta moltiplicato per 24 e spesso anche per 30 sulla longitudine. Pare dunque che i passaggi della

Luna pel meridiano non possano essere adoperati nella ricerca delle longitudini se non quando le osservazioni si facciano negli osservatorii stabili, e con grande accuratezza, per modo che si possa rispondere di una piccolissima frazione di secondo sul tempo di ciascun passaggio; e con queste precauzioni ancora, saranno necessarie non poche osservazioni per ottenere nel medio una longitudine sufficientemente esatta. Non è difficile per altro riunire in breve spazio di tempo molte osservazioni di questo genere.

Ponendo in luogo di $d\alpha$ il suo valore nella precedente ugualianza, la longitudine di Napoli da Greenwich risulta $l = 3425^s,3 = 57^m.5^s,3$.

*§. 60. Nell' esempio addotto abbiamo sostituito all' osservazione di Greenwich il tempo del passaggio del lembo *lucido* della Luna per quel meridiano calcolato per mezzo delle effemeridi. Questo metodo è buono se si cerca una prima approssimazione di una longitudine non conosciuta, ma non può dare mai risultamenti molto esatti, perchè include l' errore delle tavole lunari, che moltiplicato 25 o 30 volte, come si è accennato qui sopra, può divenire significantissimo.

Il capitano *Grant* ha indicato un altro procedimento, forse più semplice, per ottenere la longitudine con un solo passaggio della Luna, senza però evitare l' errore delle tavole. Si è veduto che il tempo sidereo del passaggio del lembo ovest della Luna pel meridiano di Napoli fu il 28 Settembre $18^h.42^m.44^s,98$; riduciamo questo istante in tempo medio servendoci della longitudine stimata, 57^m, di Napoli da Greenwich, ed avremo [PROB. VII], $6^h.14^m.21^s,81$: calcoliamo il semidiametro e la declinazione della Luna per questo istante, o sia per $5^h.17^m.22^s$ di Greenwich ed avremo $\Delta = 957'',72$, $\delta = -18^o.3'.31''$. Con questi dati riduciamo il semidiametro in tempo ed all' equatore, o sia calcoliamo la formola $\frac{\Delta''}{15 \cos \delta}$, [§. 42], e ne risulterà che al momento del passaggio del lembo ovest della Luna pel meridiano di Napoli l' ascensione retta di questo lembo e quella del centro differivano in tempo di $1^m.7^s,16$; (*) ma l' *AR* del lembo lunare era nello stesso istante $18^h.42^m.44^s,98$, dunque *l' ascensione retta del centro della Luna al momento del passaggio del suo lembo ovest pel meridiano di Napoli, cioè a* $6^h.14^m.21^s,81$ *di tempo medio di Napoli, era* $18^h.42^m.44^s,98 + 1^m.7^s,16 = 18^h.43^m.52^s,14$.

(*) Qui non è necessario incaricarsi del moto proprio della Luna come nel citato §. 42, poichè non si tratta già di conoscere il tempo che mette il semidiametro a passare pel meridiano, ma si cerca soltanto la differenza di ascensione retta fra il lembo ed il centro in un istante indivisibile, come quello in cui il lembo tocca il meridiano.

Ciò posto, se fosse conosciuto il tempo medio di Greenwich in cui il centro della Luna aveva la medesima ascensione retta, $18^h.43^m.52^s,14$, siccome l'istante fisico assoluto di quella ascensione retta doveva esser lo stesso per Napoli e per Greenwich, la differenza de' tempi che si contavano contemporaneamente sotto i due meridiani darebbe la differenza di longitudine [§. 55.]. La ricerca del tempo corrispondente ad un dato elemento lunare nelle effemeridi costituisce il problema inverso delle interpolazioni, poichè nella serie (4) del §. 30 si suppone conosciuto y e si cerca il *luogo* t. Poniamo quella serie sotto la forma

$$y - A_2 = t\left(\delta' + \frac{t-1}{2}\cdot\frac{\delta^2 + \Delta^2}{2} + \text{etc.}\right)$$

ed indichiámo con Σ la somma de' suoi termini esclusi i due primi; sarà

$$y - A_2 = t\left(\delta' + \frac{\Sigma}{t}\right), \text{ da cui}$$

$$(K)\ \ldots\ t = \frac{y - A_2}{\delta' + \frac{\Sigma}{t}}$$

Questa formola servirà a calcolare il luogo t del dato termine, facendo uso del metodo delle *approssimazioni successive*. Si cercherà perciò un primo valore approssimato di t dividendo $y - A_2$ per δ', e con questo valore si calcolerà la somma Σ, che introdotta nella formola (K) darà un secondo valore di t più approssimato, col quale si calcolerà di nuovo la somma Σ della serie, ed indi un terzo valore di t, e così di seguito. Il calcolo sarà terminato quando due valori consecutivi di t si troveranno identici, il che accaderà quasi sempre dopo due o tre approssimazioni. Facendo uso dell' Almanacco nautico, dove le posizioni della Luna sono date per tutte le ore del giorno, non è necessario incaricarsi delle differenze seconde, e nell' esempio proposto qui sopra si trova subito, con un semplice quarto proporzionale (assumendo $145^s,079$ per moto orario della Luna in *AR*), che l' ora media di Greenwich in cui la Luna aveva $18^h.43^m.52^s,14$ di ascensione retta, fu $5^h,28791 = 5^h.17^m.16^s,48$. E poichè, l'ora media di Napoli era $6^h.14^m.21^s,81$, la differenza $57^m.5^s,33$ fra i due tempi rappresenterà la longitudine di Napoli da Greenwich.

*§. 61. Se fossero stati osservati i passaggi della Luna in due luoghi diversi da Greenwich, per determinare l' istante intermedio fra le osservazioni, secondo il procedimento del §. 58, bisognava prima di tutto trovare l' ora media di Greenwich del passaggio occidentale. Supposto, (per esempio) che la sera del 28 Settembre 1846 si fosse osservato a *Firenze* il passaggio del

lembo ovest della Luna ad ore sideree $18^h.43^m.15^s$, si ridurrà questo tempo sidereo in tempo medio, assumendo per longitudine di Firenze da Greenwich $45^m.4^s$ [PROB. VII], e si avrà $6^h.14^m.49^s,78$; la quale ora media corrisponde a $6^h.14^m.49^s,78 - 45^m.4^s = 5^h.29^m.45^s,78$ di Greenwich. Inoltre la differenza di longitudine tra Firenze e Napoli è $57^m - 45^m.4^s = 11^m.56^s$ e la differenza de' tempi siderei dei passaggi della Luna osservati nelle due città fu $18^h.43^m.15^s - 18^h.42^m.44^s,98 = 30^s,02 = d\alpha$; onde il tempo sidereo assoluto impiegato dalla Luna a passare dal meridiano di Napoli a quello di Firenze fu, $l + d\alpha = 11^m.56^s + 30^s = 12^m.26^s$. Dunque il passaggio di Napoli precedette quello di Firenze di $12^m.26^s$ siderei, o siano $12^m.24^s$ medii; e poichè il passaggio di Firenze avvenne a $5^h.29^m.45^s,78$ medie di Greenwich, quello di Napoli accadde a $5^h.17^m.22^s$ di Greenwich, e l'istante intermedio de' due passaggi, pel quale deve calcolarsi il moto orario della Luna in *AR*, fu $5^h.23^m.34^s$, tempo medio di Greenwich.

Per ultimare il calcolo della differenza di longitudine tra Firenze e Napoli, nella supposizione che abbiamo fatta, si cercherà nell'Almanacco nautico il moto orario della Luna per $5^h.23^m.34^s$ Greenwich, e si avrà $m = 145^s,08$; il quale valore introdotto nella formola (1), insieme con $d\alpha = 30^s,02$, darà $l = 11^m.56^s,93$.

*§. 62. Si evita l'errore delle tavole allorchè si osserva il passaggio della Luna pel meridiano di ciascuno de' due luoghi de' quali si vuol determinare la differenza di longitudine; e gli astronomi per diminuire anche gli errori di osservazione, hanno immaginato di dedurre la differenza di longitudine dal confronto de' passaggi, o *culminazioni* della Luna con quelli di una stella ad essa vicina. Si osserva dunque il passaggio al meridiano del lembo della Luna ed il passaggio di una stella di declinazione poco diversa, e si prende la differenza de' tempi indicati dall'orologio sidereo: questa differenza corretta della *variazione* dell'orologio in quel breve spazio di tempo (proporzionalmente alla *variazione diurna* conosciuta) rappresenta il tempo sidereo trascorso fra i due passaggi, ed è esente dall'errore di cui potrebbe essere affetto lo *stato assoluto* dell'orologio. Le stesse osservazioni fatte al meridiano di paragone, danno un intervallo di tempo sidereo differente fra i passaggi della stella e del lembo lunare; e la differenza de' due tempi, o sia la differenza delle differenze degl'istanti notati nei due luoghi al passaggio della stella e del lembo lunare, indica l'aumento dell'*AR* di questo lembo nel passare dal meridiano orientale all'occidentale, cioè la quantità che nel §. 58 abbiamo chiamato $d\alpha$.

*§. 63. Il chiarissimo sig. *Francoeur* crede di provare che la differenza $d\alpha$ così determinata sia esente anche dall'errore dipendente dalla posizione dell'istrumento de' passaggi, ma pare che ciò non abbia luogo. In fatti, supponiamo per maggior sempli-

cità che l'istrumento de' passaggi orientale sia esattamente situato, e che l'occidentale declini verso ponente, per modo che i passaggi del lembo lunare e della stella all'istrumento siano ritardati di un tempo θ rispetto al meridiano. Se questo ritardamento fosse lo stesso per la stella e per la Luna, svanirebbe nel prendere la differenza fra gl'istanti segnati dall'orologio al passaggio de' due astri; ma non è così, perchè nel tempo θ la stella non cambia luogo nel cielo, e la Luna ha un piccolo movimento in ascensione retta per effetto del quale il tempo che essa impiega a passare dal meridiano all'istrumento è maggiore del tempo impiegato dalla stella, e di questo eccesso rimane per necessità affetta la differenza degl'istanti de' passaggi segnati dall'orologio. Nè si può dire che l'indicato movimento della Luna sia trascurabile, per essere piccolissimo nel tempo θ, il quale non può eccedere due o tre secondi; poichè quel movimento va ad alterare la differenza dx, e moltiplicandosi con essa, [§. 59] riproduce *esattamente* l'errore θ da cui deriva, che ricade per intero sulla longitudine.

*§. 64. L'Almanacco nautico riporta per ogni giorno dell'anno la posizione apparente di due stelle la cui culminazione si può paragonare a quella della Luna. Quando venisse fatto di osservarle ambedue si prenderà un medio de' tempi de' loro passaggi pel meridiano, ed indi la differenza fra questo medio ed il tempo del passaggio del lembo lunare. Indicando siffatta differenza con t, pel meridiano occidentale, e con t' per l'orientale, sarà $t-t'$ l'aumento che ha ricevuto l'ascensione retta del lembo della Luna nel passare dall'uno all'altro meridiano; il quale aumento, posto nella formola (1) in luogo di dx, darà la longitudine domandata.

*§. 65. Se le longitudini de' due luoghi che si paragonano differissero fra loro più di 2^h, bisognerebbe tener conto della variazione del semidiametro lunare, dipendente dalla variazione della distanza della Luna dalla Terra nel tempo interposto fra i passaggi dell'astro per i due meridiani; e di più, il moto m della Luna in ascensione retta determinato per l'istante intermedio fra quelli delle due osservazioni non sarebbe neanche sufficientemente esatto. Ma questi casi non riguardano direttamente la Geodesia, ed altronde l'errore che ricade per le accennate cause sulla longitudine è molto piccolo e forse inferiore a quello che necessariamente affetta una determinazione ottenuta col metodo attuale. I nostri lettori potranno trovare intorno a ciò maggiori particolari nella *Astronomie pratique* di *Francoeur*, i cui procedimenti potranno anche esser di molto abbreviati, sostituendo al tempo vero, che egli ha dovuto adoperare ne' calcoli di antiche osservazioni, il tempo medio, pel quale già da molti anni sono calcolate le posizioni degli astri in tutte le effemeridi.

*§. 66. *Distanze della Luna dal Sole e dalle stelle.* La Luna col suo moto proprio cambia continuamente di luogo nel

cielo per cui le sue distanze angolari dal Sole e dalle stelle sono sempre diverse. Queste distanze, considerando il vertice dell'angolo al centro della Terra, diconsi distanze *vere*, e differiscono alquanto da quelle osservate sulla superficie terrestre che si chiamano *apparenti*. Le prime si trovano calcolate da tre ore in tre ore in tutte le effemeridi astronomiche nel modo da noi indicato altrove [II, §. 34], e servono specialmente ai navigatori per determinare le longitudini: perocchè essi misurano la distanza apparente della Luna dal Sole o da una stella nel luogo in cui si trovano, e notano l'ora corrispondente all'orologio astronomico; riducono poi la distanza apparente a distanza vera, e cercano una distanza eguale nelle effemeridi; e siccome una determinata distanza della Luna dal Sole o da una stella è un fenomeno celeste che accade contemporaneamente per tutti i luoghi della Terra, prendono perciò la differenza fra l'ora osservata e l'ora delle effemeridi corrispondente alla distanza vera calcolata, ed ottengono così la longitudine del luogo incognito dal meridiano di Parigi o di Greenwich, secondo che hanno fatto uso della *Conoscenza de' tempi*, o dell'*Almanacco nautico*.

Per fare un cenno del modo di operare de' navigatori, rappresenti OR [*fig.* 6] l'orizzonte del luogo di osservazione, e siano ZA, ZB i verticali del Sole e della Luna. Si misurano tre archi, cioè la distanza apparente $S'L'$ de' due astri, e le altezze apparenti $S'A, L'B$; e siccome queste tre osservazioni dovrebbero essere contemporanee, si misurano le altezze prima e dopo della distanza, e si riducono all'istante di quest'ultima supponendo le loro variazioni proporzionali al tempo. Per tal modo saranno dati i tre archi,

$$\left.\begin{matrix} S'A \\ L'B \\ S'L' \end{matrix}\right\} \textit{corrispondenti ad un solo istante } T \textit{ di tempo medio.}$$

Ma la distanza $S'L'$ misurata è una distanza *apparente* e non può paragonarsi con quelle che trovansi nelle effemeridi, che sono distanze *vere*. Per ridurla al centro della Terra, basterà correggere le altezze apparenti misurate $S'A, L'B$ della refrazione, della parallasse, e del semidiametro [§. 52], e si otterranno così le altezze vere SA, LB. Si avverte che sulla figura i luoghi veri S, L de' due astri si sono situati su gli stessi verticali de' luoghi apparenti S', L' perchè la refrazione e la parallasse non allontanano gli astri dal loro verticale; e si è posto anche il luogo vero del Sole sotto al luogo apparente, perchè l'aumento che riceve dalla parallasse l'altezza del Sole quando si riferisce al centro della Terra, è assai minore della diminuzione che riceve per la refrazione, e verificandosi il contrario per la Luna si è posto il luogo vero della Luna sopra del luogo apparente. Ciò premesso, si calcole-

ranno due triangoli sferici $S'ZL', SZL$; nel primo de' quali sono conosciuti i lati, $S'Z, ZL'$ complementi delle altezze apparenti misurate, ed $S'L'$ distanza apparente osservata, e si calcola l'angolo allo zenit $S'ZL'$; e nel secondo, SZL, (che ha comune col triangolo $S'ZL'$ l'angolo al zenit, perchè i luoghi veri sono sugli stessi verticali de' luoghi apparenti) sono conosciuti SZ, ZL complementi delle altezze vere calcolate, e l'angolo compreso Z dato dal triangolo precedente, e potrà calcolarsi la distanza vera SL fra i centri de' due astri. Ottenuta così la distanza vera nel luogo di osservazione, si cercherà per lo stesso giorno l'eguale distanza nelle effemeridi, e se si troverà identica, si prenderà la corrispondente ora di Parigi, o di Greenwich e la differenza fra quest' ora e l'ora T osservata darà la differenza di longitudine. Ma è difficile che la distanza vera calcolata pel luogo di osservazione si trovi esattamente nelle effemeridi; e quindi in generale si cercherà l'ora corrispondente alla data distanza con lo stesso procedimento che si adopera per trovare nelle tavole logaritmiche il numero corrispondente ad un logaritmo dato. [I, §. 53, n.° V.] I navigatori si contentano ordinariamente di questa approssimazione: volendo però l'ora delle effemeridi con esattezza è necessario incaricarsi delle differenze seconde applicando la formola (K) accennata nel §. 60. L'Almanacco nautico offre un mezzo semplicissimo per ottenere l'ora esatta di Greenwich tenendo conto di quelle differenze, ma siccome l'attuale metodo di determinare la longitudine riguarda più la gente di mare che gl' ingegneri geografi, noi non entreremo in maggiori particolarità; ed osserveremo soltanto che la distanza della Luna dal Sole si potrebbe misurare col teodolite ripetitore, mirando al lembo lucido della Luna ed ai lembi est ed ovest del Sole alternativamente, e notando il tempo per ogni osservazione. Con siffatto strumento per altro non si misura la distanza apparente $S'L'$, ma la sua proiezione AB sull' orizzonte, o sia l'angolo allo zenit fra i verticali de' due astri, onde per calcolare la distanza vera SL si dovrà risolvere il solo triangolo SZL, dopo aver ridotte le altezze apparenti $S'A, L'B$ osservate ad altezze vere. Si avverte ancora che prima di risolvere il detto triangolo si dovrà prendere un medio delle distanze misurate fra il lembo lunare ed i lembi est ed ovest del Sole; al quale medio, che rappresenta la distanza del centro del Sole dal lembo della Luna, si farà corrispondere il medio de' quattro istanti notati all'orologio nei quattro appulsi: e di più, essendosi traguardato il lembo lucido in vece del centro della Luna, bisognerà correggere l'angolo AZb, effettivamente misurato, del piccolo angolo aZL', che si otterrà dalla risoluzione del triangolo ZaL' rettangolo in a, di cui si conoscono il lato $L'Z$, distanza apparente dell' astro dallo zenit, ed il semidiametro apparente aL' della Luna calcolato per l'istante medio osservato e per l'altezza apparente BL'

[II, §. 171]. Si comprende facilmente che, se dovesse misurarsi la distanza della Luna da una stella, il procedimento sarebbe analogo al precedente ma più semplice.

§. 67. *Estinzione delle stelle filanti.* Il fenomeno delle stelle filanti, di cui forse non si è data sinora una spiegazione soddisfacente [II, §. 82.], si può considerare come uno de' più appropriati alla determinazione delle longitudini, specialmente per gli usi geodetici. L'idea di farlo servire a questo scopo è naturale ed antica, poichè *Halley* fu primo a concepirla, ma il ch. Sig.r *Nobile* astronomo del R. osservatorio di *Capodimonte* la pose ad effetto, determinando nel 1838, con le osservazioni delle stelle filanti eseguite da lui in Napoli e dal ch. Sig r *del Re* in Palermo, la differenza di longitudine fra le due città; ed in seguito l'esperimento fu ripetuto con eguale successo dagli stessi osservatori, e dal ch. P. *de Vico* nella determinazione della differenza di longitudine fra Napoli e Roma.

Lo studio del fenomeno delle stelle filanti ha fatto conoscere che codeste accensioni accadono spesso ad un'altezza di 300 o 400 miglia italiane, per la qual cosa le medesime stelle riescono visibili agli abitanti di una vasta regione, e la loro estinzione essendo istantanea, può riguardarsi come un fenomeno celeste molto opportuno a determinare le differenze di longitudine. Si osservano dunque in una sera convenuta le estinzioni delle stelle filanti da due osservatori che vogliono determinare la differenza di longitudine de' rispettivi meridiani, ed affinchè la loro attenzione non sia troppo divagata, essi convengono anche sulla regione del cielo che debbono esplorare. Primo ed essenziale elemento da raccogliersi è il tempo di ciascuna estinzione, avendo già regolati gli orologi astronomici con le osservazioni proprie a determinarne l'andamento [Prob. xi e xii]; ma per riconoscere possibilmente l'identità delle stelle osservate nelle due stazioni è bene che si notino ancora tutte le circostanze che accompagnano queste fugaci apparizioni. A tale oggetto si può preparare un quadro il quale contenga le seguenti indicazioni: *grandezza, paragonata a quella delle stelle e de' pianeti maggiori; tempo dell' estinzione; strascico luminoso, se durevole o istantaneo; direzione del movimento secondo i venti; velocità, se grande o piccola; arco percorso in cielo; luogo del cielo in cui è accaduta l' estinzione, in quale costellazione e vicino a quale stella*; *azimut ed altezza di questo punto sull' orizzonte*. Alcune di queste indicazioni, quantunque appartenenti alla medesima stella, debbono variare per i due osservatori dipendentemente dalla loro diversa posizione rispetto alla stella; altre possono rimanere le stesse, come la durata dello strascico luminoso, la velocità e l'arco percorso in cielo; l'insieme di tutte, quando non siano contradittorie, può accrescere la già grande probabilità che si acquista intorno all'identità del

fenomeno nelle due stazioni dal trovare la differenza de' tempi osservati poco diversa dalla differenza di longitudine approssimatamente conosciuta [§. 59]. Il Sig.r *Nobile* riporta un metodo di calcolo per assicurarsi dell' identità di una stella osservata nelle due stazioni, allorchè siasi già verificato il principalissimo criterio risultante dal paragone della differenza de' tempi con la longitudine stimata; ma il dato sul quale si fonda quel procedimento è la conoscenza del luogo del cielo in cui è accaduta l' estinzione, e questo elemento è difficile ad ottenersi con qualche precisione attenendosi al solo confronto delle costellazioni. Laonde la verificazione dell' identità delle stelle cadenti dovrebbe, come opina il ch. astronomo di Vienna Sig.r *Littrow*, appoggiarsi sopra misure eseguite con istrumenti il meglio che si può adattati allo scopo. Il punto dell' estinzione di una stella cadente si percepisce sempre con sufficiente esattezza dall' osservatore, e se ne può determinare immediatamente l' altezza e l' azimut con un teodolite diviso di grado in grado; ma senza questo mezzo, esso riesce per lo più malamente indicato, per mancanza di stelle vicine, o di pratica nel riconoscerle con sollecitudine. Eseguita l' osservazione dell' azimut e dell' altezza per ogni stella filante in ciascuna stazione, si può trovare il luogo che occupano nello spazio quelle stelle per le quali la differenza de' tempi coincide con la differenza di longitudine stimata. In fatti, indicando con PN,PT [*fig.* 7] i meridiani terrestri delle due stazioni N,T, con OZ,OZ' le verticali di questi luoghi e con m l'incontro della verticale della stella S con la superficie terrestre, saranno conosciuti gli azimuti PNm,PTn della stella nelle due stazioni, e le corrispondenti distanze dallo zenit $ZNS,Z'TS$; e poichè si suppongono date, almeno per approssimazione, le latitudini e la differenza di longitudine de'due luoghi, il triangolo NPT sarà interamente determinato [II, §. 56], e si potranno calcolare gli angoli PNT,PTN, che combinati con gli azimuti daranno gli angoli mNT,mTN del triangolo sferico mNT, di cui sarà pure conosciuta la base NT, calcolata per mezzo dello stesso triangolo PNT. Risoluto il triangolo mNT, con i metodi geodetici [LIB, V], si otterranno gli archi Nm,mT in misure lineari; e le distanze dallo zenit misurate ZNS, $Z'TS$ potranno servire a calcolare in due diversi modi l' altezza *lineare* Sm della stella, secondo ciò che sarà detto della livellazione geodetica nel LIBRO VII. Se le due determinazioni si accorderanno fra certi limiti, sarà assicurata l' identità del fenomeno nelle due stazioni, e si conoscerà ad un tempo l' altezza del punto dello spazio in cui è avvenuta l' estinzione.

*§. 68. In Agosto dell' anno 1843 ci proponemmo di fare un saggio del metodo attuale determinando la differenza di longitudine fra Napoli (Officio Topografico) e la Torre del telegrafo di Termoli dove si trovava a fare stazione il valoroso ed

infelice capitano *Fergola* (*) Convenimmo di osservare in Napoli ed in Termoli le stelle filanti che sarebbero apparse al *Nord ovest* di ciascuno de' due luoghi nella estensione di cielo limitata da un triangolo sferico trirettangolo. Le osservazioni furono fatte nei giorni 10, 11, 12, 13 Agosto, ed i tempi furono determinati in Napoli con i passaggi delle stelle pel meridiano, ed in Termoli misurando le altezze assolute delle stelle con un cerchio ripetitore di *Reichenbach* di 12 pollici di diametro. Non si trascurò di notare in appositi quadri le circostanze tutte delle apparizioni secondo le indicazioni superiormente mentovate, e vi furono molte stelle la cui identità era manifesta dal solo accordo delle caratteristiche che le accompagnavano; non si valutarono però gli azimuti e le altezze delle stelle con un istrumento. La differenza di longitudine fra Napoli e Termoli fu stimata di $2^m.58^s$, e per distinguere fra gl' istanti osservati quelli che appartenevano ad una medesima stella, si aumentarono tutti i tempi siderei delle estinzioni osservati in Napoli della quantità costante $2^m.58^s$, e si paragonarono con i tempi siderei osservati in Termoli. Questo confronto fece scoprire quattordici coincidenze, ed ecco il quadro de' *tempi siderei* osservati in Termoli ed in Napoli e delle loro differenze;

	Tempi di Term.	*Tempi di Nap.*	*Differenze*
Agosto 10	$18^h.49^m.32^s44$	$18^h.46^m.33^s76$	$2^m.58^s68$
	19 . 7 .16,12	19 . 4 .18,45	2 .57,67
	19 .23 .53,78	19 .20 .55,37	2 .58,41
	19 .46 .37,88	19 .43 .39,19	2 .58,69
	20 . 0 .36,34	19 .57 .37,71	2 .58,63
11	18 . 3 . 5,40	18 . 0 . 6,17	2 .59,23
	18 .59 .28,13	18 .56 .28,65	2 .59,48
	19 .23 . 6,27	19 .20 . 7,41	2 .58,86
	19 .33 .39,53	19 .30 .40,20	2 .59,33
12	19 .11 .46,44	19 . 8 .47,82	2 .58,62
13	17 .57 .11,13	17 .54 .12,40	2 .58,73
	18 .59 .37,73	18 .56 .39,16	2 .58,57
	19 .24 .12,21	19 .21 .14,51	2 .57,70
	19 .48 .11,08	19 .45 .11,76	2 .59,32
		Diff.ª media =	2 .58,71

(*) Questo dotto ed indefesso ingegnere geografo, al quale si deve l'esatta determinazione trigonometrica de' punti principali del Regno delle due Sicilie, morì nel 25 di Novembre 1845 colpito da un fulmine sul monte di *Antennammare*, dove dimorava da più giorni per le operazioni geodetiche!

Ciascuna delle differenze notate nel precedente quadro dà una determinazione della differenza di longitudine fra Napoli e Termoli, se la stella cui si riferisce è la stessa per i due luoghi; ma considerando essere difficilissimo e quasi impossibile che due diverse apparizioni siansi accordate nello stretto limite di una frazione di secondo, e che quando anche ciò fosse avvenuto, il ritenere questo termine della serie, che a rigore dovrebbe essere escluso, non potrebbe alterare sensibilmente il valor *medio* della differenza di longitudine che si va cercando, noi abbiamo creduto conveniente adottare l'intera serie, dalla quale risulta per un medio che *la differenza di longitudine tra l'Officio Topografico di Napoli e la Torre del Telegrafo di Termoli è* $2^{m}\cdot58^{s},71$.

Malgrado la nostra convinzione, che l'accordo de' tempi entro strettissimi limiti equivalga alla quasi certezza dell'identità del fenomeno, abbiamo applicato il metodo accennato dal Sig.r *Nobile* ad alcune stelle le cui caratteristiche mostravano una certa discordanza, e la pruova essendo riuscita nel limite di approssimazione che se ne poteva sperare, ci ha data un'altra guarentia della identità di cui avevamo per un momento dubitato. Non possiamo in questo luogo dichiarare tutti i particolari riguardanti la determinazione della differenza di longitudine risultante dalle osservazioni combinate di Napoli e Termoli, ma ci proponiamo di farlo in una apposita memoria.

*§. 69. La grande altezza alla quale accadono i passaggi delle stelle filanti rende questi fenomeni preziosissimi per la determinazione delle longitudini, poichè si può con siffatto mezzo misurare ad un tratto la differenza di longitudine di due luoghi distanti fra loro 200 o 300 miglia, il che è sufficiente ai bisogni della Geodesia anche di un grande stato. Riguardo alle longitudini ***assolute***, cioè a quelle riferite direttamente ad uno dei principali meridiani di Europa, la civiltà moderna avendo poste le specole astronomiche a distanze tali da potersene comodamente misurare le differenze di longitudine col metodo delle stelle filanti, sarebbe desiderabile che gli astronomi si accordassero fra loro, e stabilissero per alcuni anni un piano di osservazioni corrispondenti, ad oggetto di determinare esattamente le longitudini assolute de' loro osservatorii. Essi presterebbero così un immenso servigio alla Geografia ed alla Geodesia europea, senza essere gran fatto distratti dalle ordinarie loro occupazioni, per le quali si accresce sempre più il campo della scienza, e si aggiungono meraviglie a meraviglie, perscrutando sottilmente, e con nuovi mezzi di osservazione e di calcolo l'immensità del creato (*).

(*) Il cadente anno 1846 è stato segnalato da una scoperta di genere affatto nuovo negli annali della scienza. Il Sig. *Le Verrier*, giovane geo-

§. 70. *Cronometri.* I cronometri, che sono orologi portatili di grande perfezione, i quali non variano giornalmente se non di una frazione di secondo, offrono il mezzo più semplice, e qualche volta esattissimo per determinare una differenza di longitudine. Con questi strumenti si esegue immediatamente il paragone de' tempi di due meridiani, trasportando il tempo di una stazione all' altra stazione nel modo quì appresso indicato.

Supponiamo, per fissare le idee, che si voglia determinare la

---

metra francese, occupandosi della teorica di *Urano*, creduto sinora l'ultimo pianeta del nestro sistema, si avvide che le perturbazioni cui andava soggetto per le attrazioni de' pianeti conosciuti, e specialmente di *Saturno* e di *Giove*, non bastavano a modificare il suo moto ellittico in modo da far accordare, entro limiti convenevoli, le posizioni ottenute dal calcolo con quelle date dall' osservazione. Sospettò allora che un pianeta incognito superiore con la sua attrazione allontanasse *Urano* dalla via che gli assegnava il calcolo; e ponendo per certa l'esistenza del pianeta perturbatore, si fece ad indagarne la distanza, la massa, e il luogo che doveva occupare nel cielo in un dato tempo, con la sola guida degli effetti che produceva, cioè delle differenze notate fra il calcolo e l'osservazione nelle posizioni di *Urano*, ed attenendosi forse anche alla legge empirica di *Bode* intorno alle distanze. Questa impresa, che sembrava più temeraria che ardita, non fu superiore al genio ed alla costanza dell' illustre astronomo francese, il quale in Settembre ultimo (1846) comunicò al Sig. *Galle* di Berlino la posizione del pianeta incognito, il suo moto proprio diurno attuale in grandezza e direzione (era retrogrado), ed il diametro sotto del quale doveva apparire; e l'astronomo alemanno ebbe il contento di scoprire il nuovo pianeta nella sera stessa del giorno in cui gli pervenne l'annunzio del Sig. *Le Verrier*. Il diametro di 3'', ed il moto diurno furono trovati quasi identici a quelli calcolati dal *Le Verrier*, ed il luogo effettivo del pianeta si allontanava meno di un grado dal luogo assegnatogli dal calcolo! Sinora la scoperta di un pianeta fu sempre opera del caso, e se la bizzarra supposizione dell' *Olbers* diede nascimento a *Giunone*, *Vesta*, e forse anche ad *Astrea*, quella fortunata idea non può avere nulla di comune con l'immenso concetto di *Le Verrier*. Egli ha veduto il nuovo pianeta con gli occhi della mente nella solitudine del suo gabinetto, ed ha invitato gli astronomi a guardarlo con gli occhi del corpo. Si vuole che *Bouvard* e *Bessel* avessero anche presentita l'esistenza di un pianeta perturbatore di *Urano*, ma dall' immaginare all' eseguire un così vasto disegno vi è una grande distanza. Il nuovo pianeta compie in 217 anni circa il suo giro intorno al Sole dal quale è lontano 35 volte più della Terra. Il celebre Sig. *Arago* vorrebbe con ragione che fosse chiamato *Le Verrier*, derogandosi questa volta all' uso antico di dare ai pianeti i nomi delle divinità della favola; perocchè il pianeta di *Le Verrier* ebbe pronuba al suo nascimento, non già l'assidua, e, per così dire, passiva contemplazione del cielo, ma la potenza dell' umana ragione, e l'omaggio che si rende ad essa, non è atto di vanità, ma tributo di venerazione e di ossequio al fonte inesauribile da cui emana quella eterea scintilla. Nondimeno il *Bureau* delle longitudini di Parigi vorrebbe dare al nuovo pianeta il nome di *Nettuno;* gli astronomi non hanno ancora decisa la controversia.

differenza di longitudine fra Napoli e Palermo, col trasporto di più cronometri dall'una all'altra stazione nel più breve tempo possibile. Immediatamente prima di partire da Napoli si troverà con le opportune osservazioni astronomiche la *deviazione* assoluta di ciascun orologio dal tempo medio, avendone ne' giorni precedenti già determinata la *variazione* diurna [§. 54.]. Chiamiamo h l'ora del cronometro all'istante dell'osservazione fatta in Napoli prima della partenza, d la deviazione dell'orologio in quel momento, e v la variazione diurna; e siano nell'arrivare in Palermo, H l'ora dell'orologio e d' la sua deviazione dal tempo medio, ottenuta con altra osservazione fatta sotto il nuovo meridiano. Se l'orologio non avesse avuto alcuna variazione diurna, la sua deviazione all'ora H sarebbe stata in Napoli la stessa che all'ora h, e quindi la differenza fra la nuova deviazione d' dell'orologio in Palermo e quella d di Napoli sarebbe dovuta interamente al cambiamento dei meridiani, e rappresenterebbe la differenza di longitudine de' due luoghi. Ma ammettendo la variazione diurna v, la deviazione all'ora H, per l'orologio *rimasto in Napoli*, sarebbe stata la d accresciuta della variazione dell'orologio nel tempo interposto fra h ed H; dimodochè, supponendo trascorsi n giorni fra gl'istanti h, H, la variazione dell'orologio per questo intervallo di tempo essendo nv, la deviazione del cronometro nell'istante H sarebbe stata, $d+nv$, in Napoli. E poichè in Palermo la deviazione del cronometro all'ora H si è supposta risultare eguale a d' dalle osservazioni, la differenza $d'-(d+nv)$ indicherà la differenza di longitudine fra Napoli e Palermo. In altri termini, nell'istante *fisico assoluto* in cui il cronometro segnava l'ora H in Palermo l'ora media di Napoli era $H+d+nv$ e l'ora media di Palermo era $H+d'$, onde la differenza di longitudine risulta dalla differenza di queste ore [§. 55].

Per rendere più chiara l'applicazione del metodo attuale, immaginiamo un orologio che non abbia nè variazione diurna nè deviazione assoluta stando in Napoli, per modo che il tempo di questo orologio rappresenti esattamente il tempo medio di Napoli; trasportato il cronometro in un altro luogo, esso continuerà sempre a segnare il tempo medio di Napoli (se la macchina non sarà soggetta ad alcuna alterazione), e la sua deviazione dal tempo medio della nuova stazione, determinata con le osservazioni astronomiche, sarà dovuta al cambiamento di meridiano, e rappresenterà la longitudine del luogo contata dal meridiano di Napoli. Così il tempo di Napoli si trasporta, come è detto da principio, in qualunque punto della Terra per paragonarlo all'ora della nuova stazione e dedurne la differenza di longitudine. È chiaro poi che se il cronometro è trasportato verso occidente, l'ora media effettiva del luogo sarà sempre minore di quella del cronometro, che è l'ora di Napoli: ed il contrario accadrà se è trasportato verso oriente [II, §. 58].

§. 71. Da ciò che si è detto di sopra si può stabilire che la differenza di longitudine ottenuta col viaggio di un cronometro è generalmente espressa dalla formola,

$$(2) \ldots l = d' - d - nv$$

in cui d rappresenta la deviazione del cronometro dal tempo medio determinata per l'ora h del cronometro stesso nel luogo di partenza, v la variazione dell'orologio nelle sue 24 ore, d' la deviaziono del cronometro determinata per l'ora H di esso nel luogo di arrivo, ed n il numero di giorni e frazione di giorno compresi fra l'ora H di arrivo e l'ora h di partenza. La deviazione assoluta e la variazione diurna del cronometro saranno positive se indicheranno un *ritardamento*, e negative se una *accelerazione* [§. 47.]; e la longitudine cercata l sarà orientale se risulterà positiva ed occidentale se negativa. Aggiungiamo un esempio.

*§. 72. Nel 1833 partì da Napoli per restituirsi in Palermo il ch. astronomo fu *Niccolò Cacciatore*, e portò con se tre cronometri, i quali erano stati regolati in Napoli alla Specola di Pizzofalcone. Le nostre osservazioni avevano fatto conoscere che il cronometro *Pennington* accelerava sul tempo medio in Napoli $6^m.42^s,93$ all'ora $0^h.11^m.10^s,4$ dell'orologio stesso, e che la sua variazione diurna era un ritardamento di $3^s,33$. Giunto *Cacciatore* in Palermo in circa 38 ore di viaggio, trovò che *Pennington* accelerava $10^m.10^s,17$ sul tempo medio di Palermo a $14^h.17^m.20^s,3$ dell'orologio medesimo, e che esso ritardava giornalmente di $3^s,73$. Si domanda con questi dati la differenza di longitudine fra Napoli e Palermo. Secondo le convenzioni adottate nel §. precedente sarà,

$$d = -\ 6^m.42^s,93;\ h = 0^h.11^m.10^s,4;\ v = +3^s,33$$
$$d' = -10\ .10\ ,17;\ H = 14\ .17\ .20\ ,3;\ v' = +3\ ,73$$

Per applicare la formola (2) bisognerà introdurvi queste quantità; ma considerando che il ritardamento v dell'orologio, è stato in Palermo un poco diverso da quello di Napoli, converrà adottare nel calcolo il medio de' due valori, cioè $v = 3,53$; Inoltre fra la prima e la seconda osservazione essendo trascorse $38^h.6^m.9^s,9$ del cronometro, questo tempo espresso in giorni e parti di giorno darà $n = 1,5876$. Laonde il calcolo della longitudine sarà come segue;

Acc.e di P *in Napoli* a $0^h.11^m.10^s$ *del giorno* 7. .	$d =$	$-\ 6^m.42^s,93$
Ritard.o per giorni 1,5876	$nv =$	$+\ \ 5,60$
Acc.e di P *in Napoli* a $14^h.17^m.20^s$ *del giorno* 8. . . .		$-\ 6\ .37,33$
Acc.e di P *allo stesso istante fisico in Palermo*. .	$d' =$	$-10\ .10,17$
Longitudine di Palermo contata da Napoli. . .	$l =$	$-\ 3\ .32,84$

§. 73. Il metodo de' cronometri affida, come è chiaro, interamente alla bontà degli orologi l'esattezza della longitudine, e però non si può ottenere un risultamento soddisfacente se non si hanno molti cronometri di ottima costruzione, e molta cautela nel trasportarli da una stazione all' altra. Con queste condizioni le longitudini determinate per mezzo de' cronometri possono riuscire esattissime, e non è molto tempo che più viaggi di un legno a vapore nei mari Baltico e del Nord servirono a determinare le differenze di longitudine delle principali specole di Russia, di Germania e d' Inghilterra.

§. 74. *Segnali a fuoco.* Ai fuochi naturali ma eventuali delle stelle filanti si possono sostituire con eguale vantaggio (sebbene con molto imbarazzo e dispendio) i fuochi artificiali accesi sopra un' alta montagna visibile da' luoghi di cui si vuol determinare la differenza di longitudine. È conosciuto che l' esplosione di un quarto di chilogrammo di polvere da sparo eseguita all' aria aperta produce un lampo, della durata di qualche secondo, visibile di notte alla distanza di 60 e più miglia italiane. Questi segnali, osservati da varie stazioni (al primo loro apparire, o alla loro estinzione) con orologi esattamente regolati sul tempo medio o sidereo de' rispettivi meridiani, danno immediatamente le differenze di longitudine di quei luoghi, che risultano dalle differenze de' tempi medii o siderei notati per ciascun segnale. Per preparare l' attenzione degli osservatori, l' esplosione de' segnali si fa precedere da un vivo fuoco indiano di qualche durata, e si conviene sugl' intervalli di tempo da frapporsi tra i segnali, che suol essere ordinariamente di cinque o sei minuti. Gl' ingegneri incaricati dell' accensione de' fuochi debbono perciò esser muniti di cronometri. In una sera si possono fare quindici o venti segnali da ciascuno de' quali si ottiene una determinazione di longitudine: e quindi in due o tre sere si può con questo procedimento determinare la differenza di longitudine di due luoghi distanti fra loro più di 100 miglia con cinquanta o sessanta osservazioni, ad ottenere il quale risultamento per mezzo degli ecclissi di Sole o delle occultazioni delle stelle dietro la Luna sarebbero necessarii molti anni.

*§. 75. Quando i due luoghi di cui si vuol trovare la differenza di longitudine sono molto distanti fra loro, bisogna moltiplicare i fuochi e le stazioni intermedie, ma non è necessario determinare con esattezza il tempo se non nelle stazioni estreme. Supponiamo, in fatti, che sulla linea AQ [*fig.* 8] si facciano le esplosioni e le osservazioni, e siano F, f le stazioni in cui si danno i segnali, ed A,B,Q quelle in cui si osservano. Un primo segnale in F sarà osservato da A, B; immediatamente dopo un secondo in f sarà veduto da B, Q; indi un terzo in F da A, B ed un quarto in f da B, Q, e così di seguito; e tutto ciò in una

stessa sera. Indichiamo con a_1, b_1 i tempi del primo segnale F_1 osservati in A, B; con b_2, q_2 i tempi del secondo segnale f_2 osservati in B, Q; con a_3, b_3 i tempi del terzo segnale F_3 osservati in A, B etc: avvertendo però che ogni tempo osservato in A, ed ogni tempo osservato in Q s' intende corretto delle deviazioni dell' orologio dal tempo siderco della stazione, ed esprimente perciò ore sideree; e che la stazione Q si suppone all'occidente di A. I tempi b_1, b_2 indicando gl' istanti de' segnali F_1, f_2 allo stesso orologio della stazione B, la loro differenza b_2-b_1 dinoterà il tempo interposto tra F_1 ed f_2 sull' orologio di B; e supponendo che la durata di un' ora dell' orologio B stia a quella di un' ora siderea nel rapporto di $n:m$, la differenza di tempi b_2-b_1 sull' orologio B equivarrà ad ore sideree $\frac{n}{m}(b_2-b_1)$, onde il segnale f_2 sarà posteriore al segnale F_1 per un tempo sidereo $\frac{n}{m}(b_2-b_1)$. Ma il segnale F_1 accadeva all' ora siderea a_1 della stazione A, dunque il segnale f_2 sarà accaduto all'ora siderea $a_1+\frac{n}{m}(b_2-b_1)$ di A. E siccome questo medesimo segnale si osservava contemporaneamente nell' istante sidereo q_2 della stazione Q, che si suppone all' occidente di A, la differenza di longitudine fra A e Q sarà espressa dalla seguente formola;

$$(3) \quad \ldots \quad l=a_1+\frac{n}{m}(b_2-b_1)-q_2$$

In questa espressione si osserva che non è necessario conoscere i tempi assoluti b_2, b_1 della stazione intermedia B, ma soltanto la loro differenza, e valutarla in parti di tempo sidereo mediante il rapporto $\frac{n}{m}$ da determinarsi.

È chiaro poi che il terzo segnale in F insieme al quarto in f, darebbero una seconda determinazione della longitudine, e così deve dirsi del quinto e del sesto, dai quali si otterrebbe una terza determinazione etc. E quanto al rapporto $\frac{n}{m}$, gli stessi segnali a fuoco servono a trovarlo, poichè danno più *accordi* successivi fra gli orologi delle stazioni A, B e fra quelli delle stazioni B, Q. In fatti, i tempi a_1, b_1 appartengono ad uno stesso istante fisico, che è quello del segnale F_1, ed i tempi

a_2, b_2 appartengono similmente all' istante del segnale F_2; quindi sottraendo i primi tempi dai secondi, le differenze $a_2 - a_1$, $b_2 - b_1$ esprimono ambedue il tempo fisico decorso fra i segnali F_1, F_2, e sarà $b_2 - b_1$ *equivalente ad* $a_2 - a_1$, cioè un numero di minuti $b_2 - b_1$ dell' orologio B equivalente ad un numero di minuti siderei $a_2 - a_1$. Dalla quale relazione si desume che 1^m dell' orologio B vale $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$ minuti siderei, onde anche 1^h di B vale $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$ ore sideree, ed N ore di B valgono $N\left(\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}\right)$ ore sideree, il che mostra essere $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} = \frac{n}{m}$, secondo ciò che si è detto di sopra. Il medesimo rapporto $\frac{n}{m}$ del tempo di B al tempo sidereo si ottiene ripetutamente dai segnali successivi, e le sue espressioni sono $\frac{a_5 - a_3}{b_5 - b_3}, \frac{a_7 - a_5}{b_7 - b_5}$ et.: esso si può ottenere ancora paragonando il tempo di B al tempo di Q, ed allora le sue espressioni sono $\frac{q_4 - q_2}{b_4 - b_2}, \frac{q_6 - q_4}{b_6 - b_4}$ etc. Tutti questi valori successivi di $\frac{n}{m}$ servono a far conoscere se il tempo della stazione B si mantiene di costante durata, o a valutare le piccole variazioni cui potesse andar soggetto.

*§. 76. Se la linea AQ fosse così estesa che non bastassero due fuochi F, f ed una stazione intermedia B, non sarebbe difficile estendere il procedimento esposto qui sopra a qualunque numero di stazioni e di fuochi, ed è chiaro che, mantenendo le convenzioni del §. 75, la formola (3) diviene per qualunque caso;

$$(3)' \ldots l = a_1 + \frac{n}{m}(b_2 - b_1) + \frac{p}{m}(c_3 - c_2) + \frac{r}{m}(d_4 - d_3) \ldots - q_t$$

dove $\frac{n}{m}, \frac{p}{m}, \frac{r}{m} \ldots$ sono i rapporti de' tempi delle stazioni $B, C, D \ldots$ al tempo sidereo, e t il numero de' fuochi disposti su tutta la linea AQ.

È chiaro però che il moltiplicare di troppo le stazioni ed i fuochi intermedi rende molto difficile l' operazione, per l' accordo

non agevole a mantenersi fra gli operatori sopra una linea così estesa, e per gli ostacoli naturali di tempeste o di vento che spesso s'incontrano nell'accensione de' segnali sopra alte montagne; tanto più che una sola interruzione su tutta la linea, basterebbe a render nullo l'intero lavoro. Queste considerazioni ci fanno preferire i segnali economici naturali delle stelle filanti, che quando anche non dessero risultamento in qualche occasione, non cagionerebbero che una leggiera perdita di fatica e di spesa.

PROBLEMA XIV. *Determinare la latitudine di un luogo.*

§. 77. Si è già detto che la latitudine geografica di un luogo eguaglia l'altezza del polo sull'orizzonte astronomico del luogo stesso, e che per misurare quell'altezza si misurano le altezze di una stella circompolare ne' due suoi passaggi pel meridiano, e se ne prende la semisomma. Questa maniera di determinare la latitudine ha il vantaggio di renderla indipendente dalla declinazione della stella, ma richiede due osservazioni con l'intervallo di 12^h una dall'altra, la quale condizione non può essere soddisfatta in tutte le stagioni, perchè spesso uno de' passaggi della stella accade di giorno; tanto più che, all'infuori della Polare, difficilmente si può far uso di altre stelle, essendo i passaggi inferiori troppo vicini all'orizzonte, dove la refrazione è incerta, ed i superiori troppo vicini allo zenit, e quindi incomodi ad osservarsi. Si determina dunque più frequentemente la latitudine con un solo passaggio, e servendosi della declinazione dell'astro già precedentemente determinata da altri operatori, e registrata nelle tavole astronomiche. Si è osservata, per esempio, l'altezza meridiana AO [*fig.* 9] di un astro A dalla parte opposta al polo; dall'arco AO tolta la declinazione AE dell'astro, si avrà l'altezza OE dell'equatore, e presone il complemento, si otterrà l'altezza PR del polo, ossia la latitudine geografica. Se la declinazione dell'astro è negativa come la $A'E$, si dovrà aggiungere all'altezza osservata $A'O$ per avere l'altezza dell'equatore. Quando l'astro passa pel meridiano fra il polo e lo zenit, come a, dall'altezza misurata aR si toglierà la distanza polare aP dell'astro, che si ottiene prendendo il complemento della sua declinazione aE, ed il resto sarà l'altezza del polo. E finalmente se l'astro passasse fra il polo e l'orizzonte, come a', all'altezza misurata $a'R$ bisognerebbe aggiungere la distanza polare $a'P$ per ottenere l'altezza del polo. È inutile avvertire che le altezze osservate debbono sempre esser corrette della refrazione, della parallasse e del semidiametro [§. 52.] prima di combinarsi con la declinazione, onde dedurne la latitudine; le quali correzioni si riducono per le stelle alla sola refrazione, perchè esse non hanno, come si sa, nè parallasse nè diametro sensibile.

Tutto ciò suppone che gli astri si osservino nel momento preciso del loro passaggio pel meridiano, e quindi che il piano dell'istrumento col quale si misurano le altezze sia situato esattamente nel piano del meridiano, il che può solo ottenersi in un osservatorio fisso. Ma gl' ingegneri geografi, non potendo adempire con esattezza a quella condizione, osservano gli astri nelle vicinanze del meridiano, cominciando a misurare la loro distanza dallo zenit pochi minuti prima del loro passaggio, e ripetendo le osservazioni fino a pochi minuti dopo. È quantunque sia difficile che la media delle distanze dallo zenit osservate corrisponda precisamente alla distanza meridiana, nulladimeno si potrà calcolare la correzione di cui abbisogna una distanza dallo zenit misurata nelle vicinanze del meridiano per ridurla a quella che si misurerebbe nel meridiano stesso. Questo metodo di determinare la latitudine è il migliore, ed il più usato in campagna, e però noi l'esporremo con tutti i suoi particolari.

§. 78. *Distanze circomeridiane di un astro dallo zenit.* Siano Z lo zenit dell'osservatore, [*fig.* 9] P il polo, S la stella supposta vicinissima al suo passaggio superiore pel meridiano ZPR, PS il complemento della declinazione dell'astro, e Za la distanza dell'astro dallo zenit nel meridiano; questa distanza dovendo essere un minimo, si avrà $ZS > Za$. Pongasi $Za = ZS - x$, e sarà x la quantità di cui deve diminuirsi la distanza zenitale osservata ZS per ottenere la distanza meridiana.

Chiamiamo L la latitudine del luogo, δ la declinazione della stella, e P il suo angolo orario ZPS nel momento dell'osservazione; si avrà,

$$Za = ZP - Pa = (90^\circ - L) - (90^\circ - \delta) = \delta - L,$$

e quindi,

$$ZS = Za + x = \delta - L + x$$

Il triangolo sferico ZPS dà inoltre,

$$\cos P = \frac{\cos ZS - \cos ZP \cos SP}{\operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} SP}, \text{ da cui,}$$

$$\cos ZS = \cos P \cos L \cos \delta + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta$$

E sostituendo a ZS il suo valore, sarà

$$\cos\{(\delta - L) + x\} = \cos P \cos L \cos \delta + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta,$$

Sviluppiamo il coseno del primo membro, ed avremo,

$$\cos(\delta - L)\cos x - \operatorname{sen}(\delta - L)\operatorname{sen} x = \cos P \cos L \cos \delta + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta;$$

sostituiamo a $\cos x$, $\cos P$ le espressioni equivalenti $1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x$, $1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P$, e sarà,

$$\cos(\delta - L) - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x \cos(\delta - L) - \operatorname{sen}(\delta - L)\operatorname{sen} x =$$
$$\cos L \cos \delta + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P \cos L \cos \delta,$$

ovvero,

$$\cos(\delta-L)-2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}x\cos(\delta-L)-\text{sen}(\delta-L)\,\text{sen}\,x = \cos(\delta-L)-2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}P\cos L\cos\delta$$

Riducendo, e dividendo per sen $(\delta-L)$, sarà,

$$\text{sen}\,x+2\cot(\delta-L)\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}x=\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos L\cos\delta}{\text{sen}(\delta-L)}$$

Ma per essere x un arco piccolissimo si può fare $\text{sen}\,\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\text{sen}\,x$, e quindi $\text{sen}^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}\text{sen}^2 x$, dunque,

$$\text{sen}\,x+\tfrac{1}{2}\cot(\delta-L)\,\text{sen}^2 x=\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos L\cos\delta}{\text{sen}(\delta-L)}$$

In vece di risolvere direttamente questa equazione di secondo grado, riflettiamo che, per la piccolezza di x, il termine $\frac{1}{2}\cot(\delta-L)\text{sen}^2 x$ è quasi nullo, e quindi un valore di sen$x$ molto approssimato è già il secondo membro $\dfrac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos L\cos\delta}{\text{sen}(\delta-L)}$.
dell'equazione. Per la qual cosa sostituendo nell'equazione medesima in luogo di $\text{sen}^2 x$ il quadrato di quest'ultima espressione, si avrà,

$$\text{sen}\,x+\tfrac{1}{2}\cot(\delta-L)\left\{\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos\delta\cos L}{\text{sen}(\delta-L)}\right\}^2=\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos\delta\cos L}{\text{sen}(\delta-L)}$$

onde,

$$\text{sen}\,x=\left\{\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos\delta\cos L}{\text{sen}(\delta-L)}\right\}-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos\delta\cos L}{\text{sen}(\delta-L)}\right\}^2\cot(\delta-L)$$

Per semplicità di calcolo mettiamo x in luogo di sen x, come è permesso per la piccolezza dell'arco, e ristabiliamo l'omogeneità; avremo in fine,

$$(4)\ldots x=\left\{\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}P\cos\delta\cos L}{\text{sen}(\delta-L)}\right\}R''-\tfrac{1}{2}\left\{Idem\right\}^2\cot(\delta-L)R''$$

Per calcolare questa formola si suppongono conosciuti la declinazione δ dell'astro, l'angolo orario P, e la latitudine L del luogo. La declinazione del Sole si ha dalle effemeridi astronomiche, e quella delle stelle si ha dalle tavole medesime, o pure dal calcolo della loro posizione apparente: l'angolo orario si ottiene dalla differenza fra l'ora del passaggio dell'astro pel meridiano e l'istante dell'osservazione notato all'orologio astronomico regolato precedentemente: e rispetto alla latitudine, siccome non si ricerca con grande esattezza, nel calcolo di una quantità molto piccola qual è x, così si potrà ottenere per approssimazione dalla media delle distanze dallo zenit osservate, considerandola nel me-

ridiano, e combinandola opportunamente con la declinazione, nel modo che si terrebbe per la distanza dallo zenit corretta. È chiaro cioè che alla distanza dallo zenit Za, o per approssimazione ZS, si dovrà aggiungere la distanza polare Pa della stella per avere la distanza fra lo zenit ed il polo, il cui complemento eguaglia la latitudine.

§. 79. Il calcolo che ci ha condotti a stabilire la formola (4) è fondato sulla supposizione che il passaggio *superiore* dell'astro si faccia tra il polo e lo zenit. Ma potrebbe l'astro passare al sud dello zenit, come A, *o pure* A' [*fig.* 9], e potrebbe anche osservarsi un astro al suo passaggio inferiore a'. Considerando l'astro A, è chiaro che $ZA = PA - PZ = (90^\circ - \delta) - (90^\circ - L) = L - \delta$, e quindi per gli astri che passano al sud dello zenit bisogna nella formola cambiare $\delta - L$ in $L - \delta$; se poi la declinazione dell'astro è australe, vale la stessa formola, ma bisogna porre δ negativa. Quanto al passaggio inferiore a', sarà $Za' = ZP + Pa' = (90^\circ - L) + (90^\circ - \delta) = 180^\circ - (L + \delta)$, e $ZS' = Za' - x$, onde $\cos ZS' = \cos \{180^\circ - (L + \delta + x)\} = -\cos(L + \delta + x)$; e riflettendo ancora che l'angolo orario P, quale si ha dall'osservazione, è $S'Pa'$, per cui l'angolo ZPS' del triangolo sferico deve farsi eguale a $180^\circ - P$, queste considerazioni producono nella formola (4) il cambiamento dell'arco $\delta - L$ in $\delta + L$. Con siffatte modificazioni si ottiene per i diversi casi la *determinazione numerica* della correzione x, la quale, come si sa, deve togliersi dalla distanza dallo zenit osservata in vicinanza de' passaggi superiori, ed aggiungersi ad essa ne' passaggi inferiori; e però la correzione da applicarsi *col proprio segno* alla distanza dallo zenit osservata sarà quella indicata qui appresso con (4) per i passaggi superiori fra il polo e lo zenit, con (4)' per i passaggi al sud dallo zenit, e con (4)'' per i passaggi inferiori;

$$(4) \ldots x' = -\left\{\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P \cos \delta \cos L}{\operatorname{sen}(\delta - L)}\right\} R'' + \tfrac{1}{2} \left\{ Idem \right\}^2 \cot(\delta - L) R''$$

$$(4)' \ldots x' = -\left\{\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P \cos \delta \cos L}{\operatorname{sen}(L - \delta)}\right\} R'' + \tfrac{1}{2} \left\{ Idem \right\}^2 \cot(L - \delta) R''$$

$$(4)'' \ldots x' = \left\{\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P \cos \delta \cos L}{\operatorname{sen}(L + \delta)}\right\} R'' - \tfrac{1}{2} \left\{ Idem \right\}^2 \cot(L + \delta) R''$$

*§. 80. È necessario dare un esempio perchè la pratica di questo metodo abbisogna di alcune avvertenze. Nel giorno 10 Decembre 1846 osservammo il passaggio di β *Balena* al meridiano di *Pizzofalcone*, misurando ripetutamente la distanza della stella dallo zenit con un cerchio moltiplicatore, e notando l'istante di ogni appulso all'orologio. Per non perdere nella lettura un tempo

che doveva impiegarsi più utilmente a ripetere con sollecitudine le osservazioni, leggemmo, come è di uso, il solo *angolo multiplo* finale, di cui l'ottava parte ci diede la distanza media semplice dallo zenit. Presa nell' Almanacco nautico la posizione apparente di *β Balena*, le differenze fra l'*AR* della stella 0ʰ.35ᵐ.54ˢ,85, e gl'istanti dell' orologio ridotti in tempo sidereo ci diedero gli angoli orarii; e la distanza media dallo zenit, gl' istanti siderei delle osservazioni, i semi-angoli orarii in arco ed in tempo, e le correzioni calcolate con la formola (4)′, furono quali si veggono notati nel seguente quadro.

Distanza media di β Bal. dallo zenit.	*Tempi siderei delle osserv.*	*Angoli orarii metà* $= \frac{1}{2} P$ *in tempo*	*in arco*	*Correzioni.*
59°.39′.38″	0ʰ.23ᵐ.59ˢ,78	5ᵐ.57ˢ,53	1°.29′.23″,0	—231″,29
	27 .33 ,96	4 .10 ,44	1 . 2.36 ,6	113 ,51
	32 . 5 ,50	1 .54 ,67	28 .40 ,0	23 ,80
	34 . 1 ,02	0 .56 ,91	14 .13 ,6	5 ,86
	37 .38 ,01	0 .51 ,58	12 .53 ,7	4 ,81
	40 . 7 ,62	2 . 6 ,38	31 .35 ,7	28 ,91
{*Bar.*27ᵖ.2′,2	44 .46 ,68	4 .25 ,96	1 . 6 .29 ,4	128 ,03
{*Term* 9°,2*R.*	48 .16 ,41	6 .10 ,78	1 .32 .41 ,7	248 ,72
AR β Balena 0ʰ.35ᵐ.54ˢ,85			*Totale*	—784 ,93
			medio	— 98 ,12

La distanza dallo zenit 59°.39′.38″ deve considerarsi media di otto diverse distanze, per ciascuna delle quali si è notato il tempo all' orologio. Con questi tempi si sono formati gli angoli orarii, e calcolate le correzioni, scritte nell' ultima colonna, le quali applicate rispettivamente alle distanze cui hanno relazione, darebbero le otto distanze ridotte nel meridiano, di cui si prenderebbe un medio, e si avrebbe il risultamento finale. Ma non essendo state misurate le distanze dallo zenit individuali, è chiaro che si ottiene la stessa distanza meridiana corretta se all'arco medio misurato 59°.39′.38″ si applica la correzione media — 1′.38″,12 trovata qui sopra. Ciascuna correzione si è poi calcolata introducendo nella formola (4)′ il valore di $\frac{1}{2} P$ che le conveniva, insieme con la declinazione dell' astro, e con la latitudine stimata 40°.49′.50″. L' applicazione della formola è facile, e solo deve avvertirsi che il fattore $\frac{2 \cos \delta \cos L}{\text{sen}\,(L - \delta)}$, ed il suo quadrato sono costanti per tutte le correzioni, e che per *β Balena* avendosi $\delta = -18°.49'.44''$, si è fatto $L - \delta = 40°.49'.50'' + 18°.49'.44'' = 59°.39'.34''$.

Per ultimare il calcolo della latitudine ecco il procedimento da tenersi;

Distanza media app.te di β Balena dallo zenit ... =59°.39′.38″
Altezza media apparente Idem . . . . =30 .20 .22
  Refrazione media per 31°. . . . =1′.36″,7
  p. p. per 39′,63 . . . . 2 ,58
  Refraz.e media per 30°.20′.22″... =1 .39 ,28
  Fattore barom . . . =0,983
  Fattore term . . . . =0,994
  Prodotto . . . . . . =0,9771
Refrazione media. . . =99,28
  Prodotto . . . . . . =97,01...*Refraz.e app.te* = —1.37,01
Altezza media vera 30.18.44,99
Distanza vera dallo zenit 59.41.15,01
  Correzione per ridurla nel meridiano . . . . — 1.38,12
Distanza meridiana vera dallo zenit 59.39.36,89
  Declinazione β Balena. . . . . —18.49.43,60
Latitudine 40.49.53,29

*§. 81. Il metodo precedente si applica anche alla determinazione della latitudine mediante le distanze circomeridiane del Sole dallo zenit. In questo caso però sono necessarie le seguenti modificazioni: 1.° gl'istanti delle osservazioni debbono ridursi in tempo vero, affinchè gli angoli orarii siano espressi similmente; 2.° l'altezza apparente del Sole deve esser corretta della refrazione non meno che della parallasse, e se occorre ancora del semidiametro, nel modo indicato altrove [§. 52]; 3.° e deve pure applicarsi alla declinazione dell'astro un'altra piccola correzione, dipendente dalla sua variabilità, prima di combinarla con la distanza dallo zenit corretta, onde ottenere la latitudine. Per dar conto di siffatta correzione, supponiamo per un momento, che essendosi misurate le distanze dallo zenit del Sole in un dato giorno (che potrebbe essere il 26 Gennajo 1846), si siano ottenuti gli angoli orarii notati nella tavoletta del §. precedente. È chiaro che, la declinazione del Sole alcuni minuti prima o dopo il suo passaggio pel meridiano non è identicamente la stessa che nel meridiano; e però ciascuna distanza dallo zenit, o altezza misurata, si dovrebbe combinare con la declinazione del Sole in quell'istante, e non già con la declinazione meridiana, considerandosi le osservazioni isolatamente, e come se fossero fatte con diverse stelle, delle quali la declinazione è invariabile nel corso di qualche ora. Ora, la declinazione del Sole il 26 Gennajo 1846 al suo

passaggio pel meridiano di Napoli, calcolata per mezzo dell'Almanacco nautico risulta — 18°.44'18'',02 ed il *moto orario* del Sole in declinazione è + 37'',88: quindi le correzioni da applicarsi alla declinazione meridiana per ridurla agl'istanti precedenti o seguenti il passaggio del Sole indicati dagli interi angoli orarii, sono come segue;

per	11ᵐ.55ˢ,1	*all'oriente*	—7'',52
	8 .20 ,9	*idem.*	—5 ,27
	3 .49 ,3	*idem.*	—2 ,41
	1 .53 ,8	*idem.*	—1 ,20
	1 .43 ,2	*all'occidente.* . . .	+1 ,09
	4 .12 ,8	*idem.*	+2 ,66
	8 .51 ,9	*idem.*	+5 ,60
	12 .21 ,6	*idem.*	+7 ,80
		Somma. . .	+0 ,75
		Ottava parte.	+0 ,09

La correzione media da applicarsi alla declinazione meridiana, prima di combinarla con la distanza dallo zenit, risulta dunque + 0'',09. Ma è evidente che questa correzione avrebbe potuto ottenersi con maggior facilità sommando separatamente gli angoli orarii orientali e gli occidentali, dividendo per 8 la differenza fra le due somme, e calcolando la correzione per il quoziente ottenuto. La somma delle metà degli angoli orarii occidentali è 13ᵐ.34ˢ,7, e quella degli orientali 12ᵐ.59ˢ,5; la differenza fra questi numeri è 35ˢ,2, e la sua quarta parte 8ˢ,8, che deve considerarsi all'occidente. Ma il moto *orario* in declinazione è + 37'',88, e per un minuto è + 0'',63; dunque per 8ˢ,8, o sia per 0ᵐ,15, risulta + 0'',63 × 0,15 = + 0'',09 come sopra.

*§. 82. Siccome gli angoli orarii debbono essere espressi in tempo sidereo se si osserva il passaggio di una stella, ed in tempo vero se si osserva il passaggio del Sole, per evitare la riduzione in tempo sidereo o in tempo vero di ciascuno degl'istanti notati all'orologio, si opera nel seguente modo. Si trovano gli angoli orarii ***in tempo dell'orologio***, prendendo le differenze fra i tempi osservati all'orologio stesso, e l'istante del passaggio dell'astro pel meridiano ridotto prima ***in tempo dell'orologio***, mediante il conosciuto ***andamento*** di esso: la riduzione si esegue applicando al tempo esatto solare o sidereo del passaggio la ***deviazione assoluta*** dell'orologio per quell'istante presa col segno contrario [§. 54]. Si determina poi il rapporto fra 24 sideree, o 24 vere, e le 24 ore dell'orologio, servendosi della sua ***variazione diurna*** conosciuta; così, se l'orologio avanzasse 15ˢ sul tempo sidereo, si conchiuderebbe che 24ʰ.0ᵐ.15ˢ dell'orologio

equivalgono a 24^h sideree, e quindi 1^h dell'orologio vale un tempo sidereo espresso da $\frac{24^h}{24^h+15'}=\frac{1}{1+\frac{15'}{24^h}}=\frac{1}{1+\frac{15'}{86400'}}$
$=\left(1+\frac{15}{86400}\right)^{-1}=1-\frac{15}{86400}+\left(\frac{15}{86400}\right)^2$.. Ed in generale, potendo sempre trascurarsi il terzo termine di questa espressione, se indichiamo con v l'avanzo diurno dell'orologio espresso in secondi, un'ora di esso equivarrà al tempo sidereo $1-\frac{v}{86400}$; e se v rappresenta un ritardo, un'ora dell'orologio equivale al tempo sidereo $1+\frac{v}{86400}$. Lo stesso rapporto sussisterà fra un minuto dell'orologio ed un minuto sidereo, fra un secondo ed un secondo; per modo che l'angolo orario P, dato in tempo dell'orologio, sarà ridotto in tempo sidereo moltiplicandolo pel fattore $1\pm\frac{v}{86400}$. Per introdurre l'attuale correzione nella formola (4), poniamo per brevità $\frac{v}{86400}=v'$; ed osservando che P è sempre un angolo molto piccolo, faremo $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(1\pm v')P=(1\pm v')\operatorname{sen}\frac{1}{2}P$, onde $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(1\pm v')P=(1+2v')\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}P$, trascurando v'^2 come piccolissimo. Il primo termine della formola (4) dovrà dunque essere moltiplicato per $1+2v'$, e siccome questo fattore, è lo stesso per tutti gli angoli orarii, potrà combinarsi con l'altro $\frac{2R''\cos\delta\cos L}{\operatorname{sen}(\delta-L)}$ che si calcola pure una sola volta, e moltiplica i diversi valor di $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}P$. La formola (4) rimarrà perciò modificata come segue;

$$x'=-\left\{\frac{2R''(1\pm2v')\cos\delta\cos L}{\operatorname{sen}(\delta-L)}\right\}\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}P$$
$$+\frac{1}{2R''}\left\{\frac{2R''(1\pm2v')\cos\delta\cos L}{\operatorname{sen}(\delta-L)}\right\}^2\cot(\delta-L)\operatorname{sen}^4\tfrac{1}{2}P$$

Il procedimento ora indicato è utile specialmente quando si è osservato il Sole, e si sono notati gl'istanti ad un orologio regolato sul tempo sidereo, o al contrario si è osservata una stella, e si è determinato il tempo con un orologio regolato sul tempo medio (*).

(*) Veggasi per maggiori particolari la Geodesia di Puissant 3.ª edizione, II vol. pag. 178, 181, 182.

*§. 83. *Distanze dallo zenit della Polare osservata in un punto qualunque del suo parallelo.* Un metodo molto comodo ed esatto per determinare la latitudine è quello di misurare le distanze dallo zenit della stella *Polare* in un istante qualunque. Quando si fanno le osservazioni con un istrumento moltiplicatore, si possono riunire le distanze dallo zenit in gruppi di quattro ognuno, per la sollecitudine con la quale si opera osservando la *Polare*, a cagione del lentissimo suo movimento [§. 53]. In tal modo alla media di quattro distanze dallo zenit si farà corrispondere il medio de' quattro istanti notati all' orologio, ed in una sera si potranno fare due o tre gruppi, ed ottenere altrettante volte la latitudine. La correzione da applicarsi a ciascuna distanza media dallo zenit per ridurla nel meridiano, si calcolerà come segue.

Riprendiamo la figura 9, e le denominazioni del §. 78, ed indichiamo con z la distanza osservata ZS dell' astro dallo zenit; avremo

$$\cos z = \cos P \cos L \cos \delta + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta$$
$$= \cos L \cos \delta + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P \cos L \cos \delta$$

e quindi

$$\cos z = \cos(\delta - L) - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P \cos L \cos \delta$$

Ricordandoci che $\delta - L$ rappresenta la distanza meridiana Za dell' astro dallo zenit, la quale è minore di ZS, sarà

$$\cos(\delta - L) - \cos z = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P \cos L \cos \delta;$$

e riducendo in prodotto la differenza de' due coseni [I, §. 7], avremo

$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z + \delta - L) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z + L - \delta) = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P \cos L \cos \delta$$

Supponiamo, come nel §. 78, $Za = ZS - x$ [*fig.* 9], e quindi $z - x = \delta - L$, e potremo sostituire ad $L - \delta$ la differenza equivalente $x - z$, il che ci darà immediatamente,

$$(5) \ldots \begin{cases} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P \cos L \cos \delta}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z + \delta - L)}, \text{ ed} \\ L = \delta + x - z \end{cases}$$

Il calcolo di questa correzione espressa in termini finiti riesce semplice ed esatto, avvertendo però che prima d' introdurre nella formola la distanza dallo zenit z osservata, bisogna correggerla della refrazione. Se poi si volesse una serie, si porrebbe $\tfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{48} x^3$ in luogo di $\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x$, e prendendo il secondo membro della equazione per primo valore approssimato di $\tfrac{1}{2} x$ [§. 78], si avrebbe subito;

$$(5)' \ldots x = \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P \cos L \cos \delta}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z + \delta - L)} \right\} 2R'' + \tfrac{1}{3} \left\{ Idem \right\}^3 R''$$

Se la Polare, nel momento in cui si osserva, è più vicina al suo passaggio inferiore pel meridiano che al superiore, riuscirà utile applicare alla formola (5) una modificazione analoga a quella discussa nel §. 79 per le osservazioni circomeridiane. Indicando con P l'angolo orario contato dal passaggio inferiore dell'astro, nel triangolo ZPS', [*fig.* 9] l'angolo ZPS' sarà eguale a $180^\circ - P$; ed inoltre, essendo in questo caso $ZS' < Za'$, si dovrà fare $z + x = Za' = 90^\circ - L + 90^\circ - \delta = 180^\circ - (\delta + L)$. Le quali modificazioni introdotte nel procedimento tenuto qui sopra per giungere alla formola (5), daranno, con un poco di attenzione,

$$(5)'' \ldots \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P \cos L \cos \delta}{\cos \frac{1}{2}(L + \delta - z)}, \text{ ed} \\ L = 180^\circ - (z + \delta + x) \end{cases}$$

Le quali formole si deducono anche dalle (5) cambiando il segno della correzione x, e l'espressione della distanza meridiana dallo zenit, cioè ponendo $-x$ in luogo di x, e $180^\circ - (L + \delta)$ in vece di $\delta - L$.

*§. 84. Dal modo usato nel §. precedente per ottenere le formole (5), (5)', (5)'' si vede che le correzioni da esse espresse potrebbero applicarsi alle distanze dallo zenit misurate nelle vicinanze del meridiano. In questo caso però si potrebbe trascurare il secondo termine della formola (5)', ma il primo dovrebbe calcolarsi due volte, il che rende preferibile la formola (4). In fatti, nelle osservazioni circomeridiane la distanza media z dallo zenit è unica, e non può corrispondere ai diversi angoli orarii che entrano nel calcolo delle correzioni; per cui volendo adoperare la formola (5)', si dovrebbe sostituire ad $\frac{1}{2}(z + \delta - L)$ l'espressione equivalente $(\delta - L + \frac{1}{2}x)$, e l'equazione (5)' ridotta alla forma

$$x = \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P \cos L \cos \delta}{\operatorname{sen}(\delta - L + \frac{1}{2} x)} \right\} 2R''$$

si applicherebbe, trascurando in un primo calcolo l'arco $\frac{1}{2}x$ che trovasi nel secondo membro, ed indi introducendolo nel calcolo definitivo.

*§. 85. Le formole (5), (5)', (5)'' servono a correggere la distanza dallo zenit misurata qualunque sia il punto del parallelo della stella cui si riferisce. Ma spesso si osserva la Polare verso le sue *massime digressioni* dal meridiano, cioè quando il suo angolo orario è di 90° circa, e la distanza dallo zenit differisce poco dal complemento della latitudine. In questa ipotesi il Sig.r *Littrow* ha trovato una formola di correzione, della quale noi accenniamo la dimostrazione seguente, che ci è sembrata fra molte la più diretta.

Indichiamo con d il complemento della declinazione della Polare, e con u la correzione da applicarsi alla distanza dallo zenit z per ridurla eguale al complemento della latitudine; sarà $d = 90° - \delta$, e $z + u = 90° - L$. Servendosi di queste denominazioni, il triangolo ZPS [*fig.* 9] darà l'eguaglianza,

$$\cos z = \operatorname{sen} d \cos P \operatorname{sen}(z + u) + \cos(z + u) \cos d;$$

dalla quale ci proponiamo di dedurre il valore di u espresso in serie per mezzo delle potenze intere e crescenti di d. A tal fine osserviamo che u, d sono piccoli archi, di cui i seni e coseni possono svolgersi in serie limitandone lo sviluppo ai termini di 3.° ordine. Si avrà perciò,

$$\cos z = (d - \tfrac{1}{6} d^3) \cos P \{ \operatorname{sen} z \cos u + \operatorname{sen} u \cos z \}$$
$$+ (1 - \tfrac{1}{2} d^2) \{ \cos z \cos u - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} z \},$$
$$\cos z = \cos u (d \cos P \operatorname{sen} z - \tfrac{1}{6} d^3 \cos P \operatorname{sen} z + \cos z - \tfrac{1}{2} d^2 \cos z)$$
$$+ \operatorname{sen} u (d \cos P \cos z - \tfrac{1}{6} d^3 \cos P \cos z - \operatorname{sen} z + \tfrac{1}{2} d^2 \operatorname{sen} z)$$

Poniamo ora $u = Ad + Bd^2 + Cd^3$, dove tutti i termini sono moltiplicati per d, perchè quando d si annulla diviene nullo anche u. Sviluppando sen u, e cos u sino alle terze potenze dell'arco sarà,

$$\operatorname{sen} u = Ad + Bd^2 + Cd^3 - \tfrac{1}{6} A^3 d^3$$
$$\cos u = 1 - \tfrac{1}{2} A^2 d^2 - ABd^3;$$

ed introducendo questi valori nell'espressione di cos z, si avrà una equazione identica, che servirà a determinare le quantità A, B, C, eguagliando a zero i coefficienti di ciascuna potenza di d. Dopo un calcolo alquanto lungo ma facile si troveranno le relazioni,

$$\cos P \operatorname{sen} z - A \operatorname{sen} z = o$$
$$A \cos P \cos z - \tfrac{1}{2} A^2 \cos z - B \operatorname{sen} z - \tfrac{1}{2} \cos z = o$$
$$- \tfrac{1}{2} A^2 \cos P \operatorname{sen} z + \tfrac{1}{6} A^3 \operatorname{sen} z - \tfrac{1}{6} \cos P \operatorname{sen} z + \tfrac{1}{2} A \operatorname{sen} z$$
$$+ B \cos P \cos z - AB \cos z - C \operatorname{sen} z = o$$

Dalla prima si ottiene subito $A = \cos P$, che introdotto nella seconda la cambia in

$$\tfrac{1}{2} \cos z (\cos^2 P - 1) = B \operatorname{sen} z, \text{ ed indi in}$$
$$B = - \tfrac{1}{2} \cot z \operatorname{sen}^2 P$$

Sostituendo ad A, e B i loro valori nella terza eguaglianza si ha

$$- \tfrac{1}{3} \cos^3 P \operatorname{sen} z + \tfrac{1}{3} \cos P \operatorname{sen} z = C \operatorname{sen} z, \text{ ovvero}$$
$$C = \tfrac{1}{3} \cos P (1 - \cos^2 P) = \tfrac{1}{3} \cos P \operatorname{sen}^2 P$$

Ma da una parte $u = Ad + Bd^2 + Cd^3$, e dall'altra $z + u = 90° - L$;

dunque la latitudine cercata si calcolerà per mezzo della formola, ridotta omogenea,

$$(6)\ldots L = 90^\circ - z - d\cos P + \frac{d^2}{2R''}\operatorname{sen}^2 P \cot z - \frac{d^3}{3(R'')^2}\operatorname{sen}^2 P \cos P$$

In questa espressione l'angolo orario P deve sempre contarsi dal passaggio superiore della Polare, per cui quando $P > 6^h$ il termine $-d\cos P$ risulta positivo.

* §. 86. Per fare un' applicazione della formola (5), scegliamo un' osservazione della *Polare* fatta dal fu capitano *Fergola* nel giorno 7 Decembre 1831 ad oggetto di determinare la latitudine di *Sciacca*. La distanza dallo zenit della stella corretta dalla refrazione fu $z = 51^\circ.10'.22'',64$, l'angolo orario $P = 32^\circ.58'.54''$ la declinazione apparente della Polare $\delta = 88^\circ.24'.57'',22$, e la latitudine stimata $L = 37^\circ.30'.10''$; con questi dati il calcolo della formola (5) sarà come segue

$z =$	51.10.23	$\log.\operatorname{sen}\frac{1}{2}P =$	9,4530574
$\delta =$	88.24.57		498
$z + \delta =$	139.35.20	*Idem* $=$	9,4531072
$L =$	37.30.10	$l\ \cos\delta =$	8,4415468
	102. 5.10		594
$\frac{1}{2}(z + \delta - L) =$	51. 2.35	$l.\cos L =$	9,8994505
		$C.l.\operatorname{sen}\frac{1}{2}(z+\delta-L) =$	0.1092248
			85
$\frac{1}{2}x =$	. . . 7'.48'',74	$l.\operatorname{sen}\frac{1}{2}x =$	7,3565044
$x =$	+ 15 .37 ,48		58203
$\delta =$	88°.24 .57 ,22		6841 | 9270
$\delta + x =$	88 .40 .34 ,70		74
$-z =$	51 .10 .22 ,64		
LAT. $=$	37 .30 .12 ,06		

Si avverte che la correzione x non può variare sensibilmente per l'errore che ricade sulla latitudine stimata, ancorchè fosse di venti o trenta secondi; perchè essendo z poco diversa da $\delta - L$, il fattore $\dfrac{\cos L}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(z + \delta - L)}$, che entra nella formola (5), e varia con L, può considerarsi poco differente da $\dfrac{\cos L}{\operatorname{sen}(\delta - L)}$

$= \dfrac{1}{\operatorname{sen}\delta - \tan L\cos\delta}$, in cui il prodotto $\tan L\cos\delta$ è molto piccolo in confronto di $\operatorname{sen}\delta$, e variando pochissimo al variare di L non può produrre cangiamento notabile nel valore della frazione. Un' analoga considerazione giustifica l'esattezza della formola (5)''.

*§ 87. Termineremo questo articolo riguardante la determinazione delle latitudini con una osservazione importante. Paragonando i valori ottenuti per una stessa latitudine con osservazioni fatte al Nord ed al Sud dello zenit si trovano spesso delle differenze di cui non si saprebbe render ragione, e debbono attribuirsi ad un errore dell' istrumento, che potrebbe derivare in parte dalla flessione del cannocchiale prodotta dal peso della lente obbiettiva, ed in parte ancora da un poco di *vento* nel giuoco del cerchio intorno al suo asse di rotazione. Questo errore si elimina prendendo il medio de' risultamenti ottenuti da un' osservazione fatta al Nord ed un' altra al Sud di due diverse stelle che giungano al meridano presso a poco con la medesima altezza. In fatti, indicando con z, z' le distanze meridiane dallo zenit delle due stelle osservate al nord ed al sud, e con Δz l' errore dell' istrumento, e chiamando δ, δ' le declinazioni delle due stelle, le latitudini ottenute da' passaggi al nord ed al sud dello zenit saranno espresse da

$$L = \delta - (z + \Delta z)$$
$$L = \delta' + (z' + \Delta z);$$

e prendendo la semisomma di questi due valori si ha,

$$L = \frac{\delta + \delta'}{2} + \frac{z' - z}{2},$$

che non contiene più l' errore dello strumento. Questo errore si ottiene poi dalle medesime due espressioni sottratte una dall' altra, ed è

$$\Delta z = \frac{\delta - \delta'}{2} - \frac{z' + z}{2}.$$

Il valore di Δz non è costante per tutte le distanze dallo zenit, ma cresce al crescere della distanza. Non si conosce la legge di questo accrescimento, che potrebbe esser diversa per i diversi strumenti; ed inoltre, l' errore di cui si parla varia anche quando l' istrumento si trasporta da una stazione ad un' altra. Il Sig. *Corabœuf* dà una formola empirica per calcolare l' errore dell' istrumento ad una distanza qualunque dallo zenit, dopo averlo determinato con le osservazioni corrispondenti al nord ed al sud dello zenit per due distanze molto differenti fra loro (*). Ad ogni modo, essendo sicuro che l' errore dell' istrumento si conserva lo stesso alla medesima distanza dallo zenit, affinchè una latitudine ne sia esente si dovranno sempre usare le osservazioni corrispondenti accennate qui sopra.

(*) Veggasi la 2.ª parte della *Nuova descrizione geometrica di Francia* pag. 567.

Se il tempo si ottiene per mezzo delle altezze assolute di un astro (PROBL. XII), bisognerà nel calcolo dell'angolo orario tener conto dell'errore dell'istrumento, che si applicherà all'altezza o distanza dallo zenit misurata, dopo averlo determinato con le osservazioni meridiane corrispondenti; e quando non sia conosciuto, si eviterà la correzione osservando la medesima stella all'est ed all'ovest del meridiano allorchè giunge presso a poco alla stessa altezza, poichè il medio delle *deviazioni* dell'orologio ottenute dalle due osservazioni sarà esente da ogni errore. Infatti gli angoli orarii all'est ed all'ovest conterranno errori eguali, e dovendo il primo togliersi ed il secondo aggiungersi all'*AR* dell'astro per avere gl'istanti delle due osservazioni, questi saranno affetti di errori eguali e di segno contrario, onde il loro medio sarà esatto. In generale sempre che si misureranno altezze o distanze dallo zenit in una ricerca qualunque, bisognerà incaricarsi dell'errore dell'istrumento.

* §. 88. Oltre ai metodi esposti di sopra per determinare le latitudini ve ne sono altri, i quali quantunque più difficili a praticarsi, hanno speciali vantaggi secondo le circostanze, ed è pregevole in particolar modo quello che si serve di tre stelle che in successivi tempi pervengono ad una medesima altezza. Si potranno consultare intorno a ciò gli *Elementi di Astronomia* dell'illustre Prof. *Santini* di Padova.

PROBLEMA XV. *Determinare l'azimut di un oggetto terrestre.*

§. 89. Nel LIBRO II abbiamo accennato come, conoscendo l'ascensione retta e la declinazione di un astro, si calcolano il suo azimut e la sua altezza per un dato istante. Supponendo dunque che debba determinarsi l'azimut di un oggetto terrestre H (*fig.* 10), si paragona la sua posizione a quella di un astro S, misurando al centro C dell'orizzonte l'angolo SCH fra il *segnale* e l'astro, e notando l'istante dell'osservazione; l'angolo misurato si projetta sull'orizzonte, e si ottiene così l'arco hM compreso fra i verticali dell'astro e del segnale; all'arco hM si aggiunge l'azimut MR dell'astro ottenuto dal calcolo per quell'istante, e la somma hR rappresenta l'azimut del segnale H. È questo, in generale, il procedimento che si segue nelle osservazioni azimutali, ma esso riceve diverse modificazioni, secondo che si osserva il Sole, una stella qualunque o la stella *Polare*, e si adopera il cerchio o il teodolite ripetitore.

§. 90. *Azimut misurato col cerchio ripetitore e con l'osservazione del Sole.* Quando si misura l'azimut col cerchio ripetitore, l'astro che si osserva non deve essere molto elevato sull'orizzonte, affinchè gli errori di osservazione influiscano il meno che si può sul calcolo della proiezione orizzontale dell'angolo fra

il segnale e l'astro. Si misura perciò l'angolo poco dopo il levare del Sole, o poco prima del suo tramontare, e per evitare la correzione del semidiametro, si collima alternativamente al lembo *est* ed al lembo *ovest* del disco solare, notando per ogni appulso il tempo corrispondente all'orologio astronomico. Si estende ordinariamente la moltiplicazione dell'angolo sino a *quattro*, di modo che al medio di quattro distanze misurate fra il Sole ed il segnale corrisponde il medio di quattro istanti notati all'orologio. Indichiamo con O l'angolo medio, e con t' l'istante corrispondente dell'orologio, che supponiamo regolato sul tempo medio. Conoscendo l'andamento dell'orologio, si correggerà il tempo t', e si otterrà il tempo *medio* esatto t dell'osservazione [§. 54], il quale convertito in tempo *vero* [*Probl.* VI] darà immediatamente l'angolo orario del Sole ZPS. Nel triangolo sferico SZP si potranno dunque supporre conosciuti, il complemento ZP della latitudine, il complemento SP della declinazione calcolata per l'istante t [§. 32] e l'angolo orario del Sole, e con questi dati si calcoleranno l'azimut SZP del Sole e la sua distanza SZ dallo zenit. Le formole più comode per eseguire il calcolo sono quelle che dipendono dall'angolo ausiliare [I, §. 43, 1.ª *soluz.*ᵉ], le quali applicate al triangolo ZPS in cui riteniamo le solite denominazioni, si cambiano nelle seguenti.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Angolo ausiliare.} \ldots\ldots & \tan\varphi = \cot\delta\cos P \\ \textit{Azimut} \ldots\ldots\ldots & \tan Z = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\tan P}{\cos(L+\varphi)} \\ \textit{Distanza dello zenit.} \;. & \cot z = \tan(L+\varphi)\cos Z \end{array}\right\}\ldots(7)$$

Ottenuto così l'azimut Z del Sole, rimarrà a calcolarsi la proiezione hCM dell'angolo SCH misurato fra il Sole ed il segnale per aggiungerla all'angolo Z ed avere l'azimut hR, che si domanda. A tale oggetto si risolverà il triangolo sferico ZHS in cui sono dati il lato HS, ossia l'angolo, che abbiamo chiamato O, misurato fra il Sole ed il segnale, il lato SZ, distanza del Sole dallo zenit calcolata innanzi, ed il lato HZ, distanza del segnale dallo zenit, che si misura col cerchio ripetitore. Si calcolerà quindi l'angolo allo zenit HZS per mezzo della formola,

$$(8)\ldots\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}O' = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\Sigma - z)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\Sigma - z')}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'}}\,;$$

nella quale O' dinota l'angolo projettato hCM, z la distanza del Sole dallo zenit, z' la distanza del segnale H dallo zenit, e Σ la somma $O+z+z'$ [I, §. 42]. Deve avvertirsi però che la distanza z del Sole dallo zenit, calcolata per mezzo del triangolo SZP è una distanza *vera*, perchè dipende da elementi

riferiti al centro della Terra; e siccome l'angolo *SCH* è stato misurato fra il segnale ed il luogo *apparente* del Sole, è chiaro che prima di calcolare la formola (8) bisognerà ridurre la distanza *z* a distanza *apparente*. La riduzione si eseguirà applicando alla distanza *z* la refrazione e la parallasse co' segni contrarii a quelli usati ordinariamente per ridurre una distanza apparente a distanza vera.

Finalmente l'addizione degli angoli *Z* ed *O'* ottenuti dalle formole (7), (8) darà l'azimut cercato del segnale *H*. Ma se questo segnale fosse compreso fra *M* ed *R*, in vece della somma dovrebbe prendersi la differenza degli stessi due angoli.

Si avverte che gli errori di osservazione avranno la minima influenza nel calcolo dell'azimut, 1.° se si osserverà l'astro lontano dal primo verticale, 2.° se le osservazioni si faranno in vece quando l'astro ha un angolo orario poco diverso da 90°, 3.° allorchè l'angolo fra il segnale e l'astro sarà pure poco differente dal retto; 4.° ed in fine se si misureranno gli azimuti tanto col Sole *levante* che col Sole *ponente*, e si prenderà un medio de'risultamenti ottenuti (*).

* §. 91. Il procedimento esposto per il Sole si applica anche alle stelle, con la sola differenza che il segnale deve in quest'ultimo caso essere illuminato da una lampa a rivèrbero. Le osservazioni della *Polare* in un punto qualunque del suo parallelo sono molto comode per la determinazione dell'azimut; ma quella stella non potendo osservarsi a piccola altezza sull'orizzonte, è utile adoperare il teodolite in vece del cerchio nella misura dell'angolo con l'oggetto terrestre, ed in generale *il teodolite è sempre da preferirsi al cerchio nelle osservazioni azimutali.*

Adoperandosi il teodolite, i calcoli che occorrono nella misura di un azimut sono molto più semplici, poichè si riducono a trovare, col tempo conosciuto dell'orologio, l'angolo orario dell'astro espresso in tempo vero o in tempo sidereo, secondo che si osserva il Sole o una stella; ed a calcolare le prime due formole (7) per determinare l'azimut dell'astro. Questo azimut si combina con l'angolo misurato fra l'astro e il segnale, che per la natura dello strumento è già projettato sull'orizzonte, e dà con una semplice addizione o sottrazione l'azimut del segnale.

Per la vicinanza della stella *Polare* al polo, l'azimut di essa, si potrebbe calcolare servendosi di una serie, ma le formole (7) *sono più esatte e più semplici in qualunque caso*.

§. 92. *Azimut misurato per mezzo della Polare osservata nelle sue massime digressioni dal meridiano.* Un eccellente me-

(*) Veggasi la Geodesia di Puissant, III ediz., 2.° vol., pag. 222.

todo di determinare l'azimut è quello di osservare la Polare nelle sue massime digressioni dal meridiano. In quella posizione della stella il suo verticale ZK [*fig.* 10] si confonde, per un breve archetto, col parallelo aa' al quale è tangente, onde la stella si vede muoversi radendo quasi esattamente il filo verticale del cannocchiale, e l'angolo hCK misurato *col teodolite* fra l'astro ed il segnale rimane sensibilmente lo stesso per qualche tempo. Se si suppone questo angolo invariabile, si ottiene subito l'azimut hR del segnale aggiungendo all'arco hK misurato l'azimut KR della stella, che si calcola risolvendo il triangolo ZLP rettangolo in L, di cui si conoscono i lati ZP,PL, complementi della latitudine del luogo e della declinazione dell'astro (*). Ma per procedere con tutta l'esattezza si può calcolare la piccola correzione da applicarsi all'angolo misurato fra il segnale e la Polare per ridurlo a quello che si sarebbe ottenuto osservando la stella precisamente nel punto L del contatto.

Indicando con Z il massimo azimut LZP della stella [*fig.* 10], e ritenendo le solite denominazioni adottate pel triangolo *zenit-polo-astro*, le formole de' triangoli sferici rettangoli, danno subito le relazioni,

$$(9) \ldots \begin{cases} \cot Z = \operatorname{sen} L \tan P, \operatorname{sen} Z = \dfrac{\cos \delta}{\cos L} \\ \cos Z = \operatorname{sen} P \operatorname{sen} \delta, \cos P = \tan L \cot \delta \end{cases}$$

Da un'altra parte il triangolo obliquangolo AZP formato dalla stella col polo e con lo zenit, quando essa si trova nel punto A molto vicino al punto del contatto, offre pure la relazione,

$$\cot Z' = \frac{\tan \delta \cos L - \cos P' \operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} P'};$$

in cui Z',P' rappresentano l'azimut AZP, e l'angolo orario APZ della stella. Laonde, se da questa equazione si sottrae la prima delle formole (9), si avrà

$$\cot Z' - \cot Z = \frac{\tan \delta \cos L - \cos P' \operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} P'} - \operatorname{sen} L \tan P$$

E poichè l'angolo orario P' differisce dall'altro P di una piccola quantità dP in più o in meno, si potrà fare $P' = P + dP$; ed allo stesso modo si farà $Z' = Z - dZ$, adottando per dZ il segno

(*) L'angolo ZLP è retto perchè l'arco LP è perpendicolare alla circonferenza aL del cerchio minore aLa', e quindi anche a quella del cerchio massimo ZL, che la tocca, ed ha comune con essa la tangente rettilinea condotta pel punto L.

negativo, perchè Z è un massimo. Sostituiti questi valori nella equazione precedente, sarà

$$\{\cot(Z-dZ)-\cot Z\}\operatorname{sen}(P+dP)=\tan\delta\cos L-\cos(P+dP)\operatorname{sen}L - \operatorname{sen}L\tan P\operatorname{sen}(P+dP)$$

Sviluppiamo sen $(P+dP)$, e cos $(P+dP)$ estendendo sen dP, e cos dP sino alle seconde potenze di dP; e trasformando anche in un prodotto la differenza delle due cotangenti [I, §. 3], avremo

$$\frac{\operatorname{sen}dZ\operatorname{sen}(P+dP)}{\operatorname{sen}Z\operatorname{sen}(Z-dZ)}=\tan\delta\cos L-\{\cos P(1-\tfrac{1}{2}dP^2)-dP\operatorname{sen}P\}\operatorname{sen}L$$

$$-\operatorname{sen}L\tan P\{\operatorname{sen}P(1-\tfrac{1}{2}dP^2)+dP\cos P\}$$

$$=\tan\delta\cos L-\operatorname{sen}L\left(\cos P+\frac{\operatorname{sen}^2 P}{\cos P}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}dP^2\right)$$

$$=\tan\delta\cos L-\frac{\operatorname{sen}L}{\cos P}\left(1-\tfrac{1}{2}dP^2\right)$$

Ma dalle equazioni (9) si ha $\cos P=\tan L\cot\delta$, e quindi

$\frac{\operatorname{sen}L}{\cos P}=\tan\delta\cos L$; dunque

$$\frac{\operatorname{sen}dZ\operatorname{sen}(P+dP)}{\operatorname{sen}Z\operatorname{sen}(Z-dZ)}=\tfrac{1}{2}dP^2\tan\delta\cos L$$

Questa eguaglianza dimostra che dZ è una quantità di secondo ordine rispetto a dP, e siccome nel calcolo precedente abbiamo trascurato le terze potenze di dP, così sviluppando sen $(P+dP)$ e sen $(Z-dZ)$, e limitando lo sviluppo ai termini di 2.° ordine in dP, e di primo in dZ, avremo,

$$dZ\operatorname{sen}P=\tfrac{1}{2}dP^2\tan\delta\cos L\operatorname{sen}^2 Z;$$

e sostituendo a sen Z l'espressione equivalente dedotta dalle formole (9), si avrà in fine

$$dZ=\frac{dP^2\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}Z}{2\operatorname{sen}P}.$$

Le formole per calcolare la correzione d'azimut saranno dunque,

$$(10)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}\cos P=\tan L\cot\delta,\ \cos Z=\operatorname{sen}P\operatorname{sen}\delta\\ dZ=\dfrac{dP^2\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}Z}{2R''\operatorname{sen}P}\end{array}\right.$$

*§. 93. Questo secondo modo di determinare l'azimut ha una perfetta analogia con la determinazione della latitudine mediante le distanze dallo zenit circomeridiane. Quindi le osservazioni per misurare l'angolo fra il segnale e la stella si ripetono anche qui sollecitamente otto o dieci volte, notando l'istante di ogni appulso, e si legge poi il solo *angolo multiplo* alla fine dell'operazione. Da ciascun istante si ottiene un angolo orario della stella [§. 80], e la differenza fra esso e l'angolo orario del contatto, calcolato con la formola $\cos P = \tan L \cot \delta$, dà il valore di dP da cui dipende la correzione di azimut, dZ. Si calcoleranno dunque le diverse correzioni corrispondenti ai tempi osservati, come si è fatto per le correzioni di latitudine, si prenderà un *medio* di tutte, e si toglierà dall'angolo *medio* misurato fra l'astro e il segnale; così quest'angolo sarà ridotto al verticale ZK [*fig.* 10] tangente il parallelo della stella, ed aggiunto al *massimo* azimut $KR = Z$, calcolato con la prima delle formole (10), darà l'azimut hR del segnale.

Non aggiungiamo alcun esempio di calcoli azimutali per non dilungarci soverchiamente, e perchè, dopo quanto abbiamo dichiarato ne' problemi XI, XII e XIV, non si dovrebbe incontrare difficoltà nell'applicare le esposte teoriche. Avvertiamo soltanto che le tavole di refrazione avendo ordinariamente per *argomento* l'altezza *apparente*, quando è data l'altezza *vera*, o la distanza *vera* dallo zenit, e si cerca l'*apparente*, bisogna prima calcolare l'argomento della tavola e poi la refrazione. Così se dovesse ridursi a distanza apparente la distanza *vera* dallo zenit 76°.35', servendosi della *Conoscenza de' tempi*, si cercherebbe la refrazione *media* con l'argomento dell'altezza vera 13°.25', e si troverebbe 3'.59'',9, che aggiunta a 13°.25' darebbe l'altezza apparente approssimata 13°.29'. Con questo nuovo argomento si calcolerebbe da capo la refrazione media, ed indi l'apparente, che si aggiungerebbe a 13°.25' per avere l'esatta altezza apparente.

*§. 94. *Azimut misurato per mezzo dell'istrumento de' passaggi*. Quando si ha un *istrumento de' passaggi* esattamente situato nel piano del meridiano, si può stabilire una *mira meridiana* alla distanza di duemila in tremila metri, e la visuale che unisce il centro de' fili del cannocchiale con la mira è una linea meridiana, la quale può servire a misurare immediatamente l'azimut di un segnale qualunque con grande esattezza. L'anno 1833, per agevolare le correzioni delle osservazioni meridiane che si fanno nella specola del R. Officio Topografico di Napoli, facemmo situare una mira meridiana dietro la chiesa di *S. Giuseppe* della pia opera di *vestire i nudi*, alla distanza di 1319 *passi* (2443 *metri*) dall'istrumento. La larghezza del bianco della mira, non maggiore di 54,63 millimetri, apparisce così in-

grandita dal cannocchiale, che si può giudicare se il filo meridiano corrisponde al mezzo di essa o pure è distante da uno dei lati del bianco per un terzo, o per un quarto della larghezza, il che vuol dire che si può apprezzare almeno la sesta parte di quello spazio. E poichè 54,63 millimetri a 2443 metri di distanza sono veduti sotto un angolo di 4″,61, è chiaro che la posizione della mira, rettificata con moltiplici e replicati passaggi di stelle pel meridiano, può considerarsi esatta nel limite di 0″,8. Ora, un angolo orizzontale misurato al centro dell' istrumento de' passaggi fra la mira e un oggetto terrestre eguaglierebbe l' azimut di quell' oggetto, e dovrebbe, per ciò che riguarda la direzione del meridiano, considerarsi esatto nel limite indicato. Ma non potendosi misurare l'angolo precisamente al centro dell' istrumento, si misura a poca distanza da esso, e con un procedimento facilissimo, che sarà da noi esposto nel LIB. V, si corregge convenientemente per ridurlo al valore che avrebbe avuto se fosse stato misurato nel centro. Così si ottiene l' azimut di un segnale per mezzo dell' istrumento de' passaggi, e noi ci siamo serviti di questo metodo per verificare l' azimut che il chiarissimo fu astronomo *Brioschi* misurò direttamente alla Torretta di Levante della Specola di *Capodimonte* e fu poi ridotto al centro della Torretta di Nord, che è il punto centrale della triangolazione del Regno.

Osservazioni generali.

*§. 95. Non sarà inutile accennare l' ordine da tenersi nelle osservazioni astronomiche dirette a determinare la posizione geografica di una data stazione, e l' azimut di un segnale. Primo elemento nelle misure astronomiche è il tempo, ma de' due metodi esposti di sopra per determinarlo quello delle altezze corrispondenti non richiede la cognizione esatta della latitudine del luogo. Si comincerà dunque dal regolare l' orologio con le altezze corrispondenti delle stelle, o del Sole, le quali faranno anche conoscere per approssimazione la direzione del meridiano [§. 2]. Dopo di ciò si potranno intraprendere le osservazioni di latitudine con le distanze circomeridiane del Sole o delle stelle dallo zenit, e le osservazioni azimutali con le massime digressioni della *Polare*; perocchè questi metodi danno la latitudine e l' azimut senza che sia necessaria una scrupolosa cognizione del tempo, e neppure della latitudine, nella misura dell' azimut. Ottenuta con sufficiente approssimazione la latitudine, si potrà determinare il tempo mediante le altezze assolute delle stelle, e continuare la misura della latitudine e dell' azimut, servendosi anche delle osservazioni della Polare in un punto qualunque del suo parallelo, e del Sole per l' azimut; nelle quali osservazioni è necessario che il tempo sia dato con molta esattezza. In tutto questo procedimento

non si dovrà dimenticare l'errore dell'istrumento [§. 87], che si eviterà con le osservazioni corrispondenti; e si deve anche avvertire che in generale le *osservazioni delle stelle sono sempre da preferirsi a quelle del Sole*.

In quanto alla longitudine, essa dipende interamente dalla esatta determinazione del tempo ottenuto in tutti i modi possibili, e però le osservazioni di longitudine si faranno dopo quelle di latitudine.

LIBRO QUARTO

PROJEZIONI DELLE CARTE GEOGRAFICHE.

CAPO PRIMO

Mappamondi.

Classificazione delle carte, e distinzione delle varie projezioni prospettiche.

§. 1. Essendo la superficie terrestre di forma presso a poco sferica, la conoscenza della disposizione generale delle sue parti e dei particolari di ciascuna di esse, non potrebbe meglio acquistarsi se non esaminandoli disegnati in proporzione sopra una sfera artificiale di conveniente diametro. Ma comunque grande potesse farsi una tale sfera, sarebbe sempre piccolissima per potervi disegnare sopra le strade, i fiumi, i monti e tutti i particolari di una data località, che occorre spesso conoscere con molta distinzione; per la qual cosa indispensabile si rende l'uso delle *carte geografiche*, che sono rappresentazioni delle parti della superficie terrestre sopra un piano, eseguite in rapporto col vero più o meno grande, secondo lo scopo cui mirano. Queste rappresentazioni sarebbero perfette se la superficie della sfera potesse svilupparsi, poichè la disposizione degli oggetti disegnati sulla superficie sferica potrebbe, dal grande al piccolo, conservarsi esattamente sul piano; ma la cosa essendo altrimenti, quelle rappresentazioni debbono consistere in *projezioni* di tutta o di parte della superficie terrestre, eseguite sopra diversi principii, secondo la grandezza della porzione di superficie sferica che si vuol rappresentare sulla carta, e l'uso che deve farsi del disegno.

§. 2. Le carte geografiche se si voglia considerare la parte di superficie terrestre che comprendono, si distinguono in *mappamondi, carte generali, carte corografiche, e carte topografiche*. Un mappamondo rappresenta tutta la superficie terrestre divisa in due emisferi; una carta generale rappresenta una delle cinque

parti del mondo, una carta corografica, un regno o uno stato particolare, ed una carta topografica è la descrizione di una piccola regione. Le *carte marine*, che servono alla navigazione, possono abbracciare una qualunque estensione di mare.

Le carte prendono anche diversi nomi dipendentemente dalla scala alla quale sono disegnate. Le carte disegnate ad una scala maggiore di $\frac{1}{80000}$ del vero, diconsi topografiche; le carte la cui scala è compresa fra $\frac{1}{80000}$ ed $\frac{1}{160000}$, diconsi semi-topografiche; e le carte disegnate ad una scala più piccola di $\frac{1}{160000}$ diconsi geografiche. Da questa seconda classificazione restano esclusi i mappamondi, i quali non hanno scala.

§. 3. I principali metodi di projezione possono ridursi a due, cioè a *Projezioni prospettiche*, e *Projezioni per isviluppo*. Le prime si applicano alla costruzione dei mappamondi, e consistono nella rappresentazione prospettica della superficie di un emisfero terrestre sopra un piano più o meno lontano dall' occhio, il quale o si suppone situato sulla superficie della sfera, o fuori di essa in un determinato punto dello spazio. Le seconde si applicano alla costruzione delle carte generali, corografiche, topografiche e marine, e consistono nello sviluppare per approssimazione sopra un piano una zona della superficie terrestre, sostituendole, perchè possa eseguirsi lo sviluppo, la superficie di un tronco di cono, o di un cilindro tangente la sfera. Per le carte a grande scala di una piccola regione si usa ancora la projezione di Cassini della quale si parlerà trattando delle operazioni geodetiche.

§. 4. Siccome sarebbe difficile, secondo qualunque metodo, il projettare partitamente tutti i particolari della superficie terrestre, cioè fiumi, strade, monti ed altro, così la projezione di una carta si limita a quella dei meridiani e de' paralleli disposti da grado in grado, o a quell' altra distanza che meglio possa convenire alla scala ed all' uso della carta; le quali linee principali bastano a regolare il disegno dei suddetti particolari. Quindi le condizioni che dovrebbe avere una projezione, per esser perfetta, riguardano gl' indicati cerchi terrestri, e sono le seguenti. 1.° I gradi di meridiano dovrebbero essere eguali fra loro come sulla sfera; 2.° Anche i gradi di uno stesso parallelo dovrebbero essere eguali fra loro, come si verifica sulla superficie sferica; 3.° Un grado di meridiano dovrebbe serbare ad un grado di parallelo il rapporto del raggio al coseno della latitudine come sulla sfera; 4.° I meridiani ed i paralleli projettati dovrebbero essere fra loro perpendicolari come sulla sfera; 5.° In fine le superficie dei quadrilateri racchiusi fra i meridiani ed i paralleli projettati dovrebbero eguagliare le corrispondenti poste sulla sfera. Ma non potendo la superficie sferica svilupparsi, è impossibile adempire a tutte queste condizioni, e la migliore projezione è quella che ne osserva un più gran numero, con approssimazione maggiore. È chiaro

poi che la projezione sarà tanto più inesatta, quanto più grande è la porzione di superficie sferica da rappresentarsi. Per questa ragione appunto le projezioni dei mappamondi, ne' quali è disegnata l'intera superficie terrestre in due emisferi, sono così imperfette, che le distanze de' luoghi non possono valutarsi per mezzo di una scala.

§. 5. Le projezioni prospettiche prendono diversi nomi secondo la posizione dell'occhio; se l'occhio è situato sulla superficie della sfera, la projezione dicesi *stereografica*, e la prospettiva dell'emisfero si esegue sul cerchio massimo che gli serve di base ed è perpendicolare al raggio che dal centro della sfera si dirige all'occhio; se l'occhio è posto nel centro della sfera, la projezione si chiama *centrale*, e si esegue sopra un piano tangente la sfera; e se l'occhio si suppone ad una distanza infinita dalla sfera, le visuali dirette ai varii punti della superficie di essa divengono parallele, e la projezione prende il nome di *ortografica*.

§. 6. Si sa che la prospettiva di un oggetto qualunque è l'intersezione del piano di prospettiva con una piramide, o cono, che ha per vertice l'occhio e per base l'oggetto da rappresentarsi prospetticamente. E poichè la projezione di una carta si limita ordinariamente ai meridiani e paralleli terrestri, gli oggetti da rappresentarsi in prospettiva per costruire un mappamondo sono cerchi massimi o minori della sfera, ed occorrendo, qualche punto isolato. Il cono che ha per base il cerchio da projettarsi e per vertice l'occhio dicesi *cono ottico*, e la projezione di quel cerchio è l'intersezione del cono ottico col piano di prospettiva. Se il piano del cerchio da projettarsi passa per l'occhio, la superficie del cono ottico si cambia in un piano, e la projezione del dato cerchio è l'intersezione di due piani, ossia una linea retta; è chiaro che ciò deve accadere in qualunque genere di projezione prospettica. Per semplicità delle costruzioni, ed affinchè la prospettiva del mappamondo riesca meno imperfetta, il piano di projezione si suppone, come è detto di sopra, sempre perpendicolare alla retta che passa per l'occhio e pel centro della sfera; la quale retta dicesi *asse ottico*, e *polo della projezione* si chiama quel punto diametralmente opposto all'occhio in cui essa retta incontra la superficie sferica.

Della projezione STEREOGRAFICA *in generale.*

§. 7. Le proprietà generali della projezione stereografica sono tre; 1.ª *La projezione di un cerchio comunque situato sulla sfera è pure un cerchio*; 2.ª *L'angolo formato da due linee qualunque sulla superficie della sfera si conserva lo stesso fra le projezioni di quelle linee*; 3.ª *La projezione di un punto qualunque della superficie sferica si trova sulla retta che rappresenta la proje-*

zione del cerchio massimo che passa pel dato punto e per l'occhio, ed è distante dal centro della prospettiva quanto è la tangente trigonometrica della metà dell'arco di cerchio massimo compreso fra il punto da projettarsi ed il polo della projezione.

1.ª Sia MM' [*Lib.* IV. *fig.* 1.] un cerchio qualunque della sfera da projettarsi, O la posizione dell'occhio, TR il piano di prospettiva; sarà N il polo della projezione, MOM' il cono ottico, ed mm' la prospettiva del cerchio MM'. Uniscasi il centro della sfera col punto P polo del cerchio MM'; la retta CP incontrerà il diametro MM' di questo cerchio nel centro c di esso, e sarà cO l'asse del cono $MM'O$. Essendo il raggio CP perpendicolare al piano del cerchio MM', questo piano sarà perpendicolare al piano NAO che passa per CP, ossia al piano del triangolo per l'asse $MM'O$; è inoltre il piano di prospettiva TR perpendicolare all'asse ON ed a tutti i piani che passano per esso, come OMM', dunque il triangolo per l'asse OMM' è perpendicolare alla base del cono non meno che al piano segante TR. Se a queste due condizioni si aggiungerà l'altra della simiglianza del triangolo $MM'O$ al triangolo $mm'O$ prodotto dal piano segante, la sezione mm' del cono obliquo MOM' avrà tutti i requisiti per essere *succontraria*, e sarà perciò un cerchio. (Veggasi la Geometria analitica) Ora, i due triangoli $MM'O$, $mm'O$ hanno l'angolo O di comune, e l'angolo M eguale all'angolo m', perchè il primo, posto sulla circonferenza, è misurato dalla metà dell'arco $M'AO$, ed il secondo, come eccentrico, è misurato dalla semisomma degli archi $M'A, OB$, i quali presi insieme eguagliano l'arco $M'AO$, per essere il quadrante AO eguale al quadrante OB; dunque i triangoli MOM', mOm' sono simili, e la sezione mm' è succontraria e circolare. Il cerchio MM', essendo simmetricamente disposto rispetto al cerchio massimo ANB che passa per l'occhio, il cerchio projettato mm' lo sarà del pari rispetto alla retta AB, projezione del cerchio ANB. Quindi la retta $m'm$ sarà diametro del cerchio projettato, ma il punto n (projezione del centro c), sarà diverso dal centro i del cerchio mm'. In fatti, conducendo la retta nk parallela ad MM', sarà $Mc:cM'::kn:nh$, onde $kn=nh$; e per i triangoli simili $m'nh$, knm essendo pure $m'n:kn::nh:nm$, poichè $kn=nh$, non potrà verificarsi in generale $m'n=nm$.

Poichè le projezioni stereografiche dei cerchi della sfera sono anche cerchi, per projettare un cerchio qualunque basterà projettare tre punti di esso, e far passare una circonferenza di cerchio per le projezioni ottenute.

§. 8. 2.ª Rappresenti M l'incontro di due curve qualunque [IV, *fig.* 2] descritte sulla superficie della sfera, e siano MA, MB le tangenti condotte a quelle linee nel punto M; l'angolo rettilineo AMB misurerà l'angolo delle due curve. Per il punto M e per l'occhio si faccia passare un cerchio massimo $MNTO$ che avrà

per projezione la retta TR nella quale il punto m rappresenterà la projezione del punto M. Prolungate le tangenti MA,MB sino ad incontrare il piano di prospettiva TR nei punti A,B, ed unite le rette Am,Bm, sarà AmB la projezione dell'angolo AMB. Or la projezione della curva di cui MA rappresenta la tangente si ottiene dall'intersezione della superficie conica che ha la curva per direttrice ed MO per generatrice col piano TR di prospettiva; e la projezione di MA nasce dall'incontro del piano che passa per MA e per OM con lo stesso piano TR: e poichè il piano AMO non ha di comune con la superficie conica che il solo lato MO, la projezione della curva non avrà di comune con la projezione mA della tangente che il solo punto m, cioè la projezione della tangente sarà tangente alla projezione della curva. Lo stesso potendo dirsi della curva che ha per tangente MB, è chiaro che l'angolo AmB formato dalle projezioni delle tangenti misurerà l'angolo fra le projezioni delle curve corrispondenti; per la qual cosa se si dimostrerà l'angolo delle tangenti MA,MB eguale a quello delle loro projezioni mA,mB, sarà pure dimostrato che l'angolo delle due curve sulla sfera eguaglia quello delle loro projezioni stereografiche.

Si prolunghi il piano NOM sino ad incontrare nella retta MD il piano MAB tangente la sfera, e si unisca la retta ADB. Essendo MD tangente del cerchio NMO, l'angolo OMD avrà per misura la metà dell'arco MRO; ma l'angolo eccentrico MmD è misurato dalla semisomma degli archi MR,TO, e gli archi TO,OR sono fra loro eguali come quadranti, dunque gli angoli mMD,MmD hanno la stessa misura, e sono eguali fra loro, onde il triangolo mMD è isoscele, ed il lato $MD=mD$. Inoltre il piano tangente AMB essendo perpendicolare al raggio CM, sarà perpendicolare al piano NOM, e poichè il piano di prospettiva $TRAB$ è anche perpendicolare allo stesso piano NOM che passa per l'occhio, la comune sezione AB del piano tangente e del piano di prospettiva sarà perpendicolare al piano NOM ed a tutte le rette DM,Dm che sono in esso; quindi gli angoli MDA,mDA saranno retti. Da quanto precede si raccoglie che i triangoli MDA,mDA hanno due lati MD, DA eguali a due lati mD,DA, e l'angolo compreso MDA eguale all'angolo compreso mDA; e però sarà l'angolo $DMA=DmA$. Allo stesso modo si dimostrerà l'angolo $BMD=BmD$, onde tutto l'angolo AMB sarà eguale ad AmB, come ci eravamo proposti di provare.

Se una delle tangenti MA,MB fosse parallela al piano di prospettiva come la MB', allora i piani AMB',OMB' condotti per essa intersegherebbero il piano TR nelle rette BA,mb parallele alla MB' e fra loro; e quindi l'angolo MDA essendo retto, lo sarebbero egualmente $B'MD$ e bmD, e l'angolo delle tangenti $B'MA$, composto dei due $B'MD,DMA$ eguali rispettivamente ai due bmD,DmA, risulterebbe anche eguale all'angolo bmA formato dalle projezioni delle taugenti, e somma di questi ultimi.

L'attuale importante proprietà della projezione stereografica, si applica principalmente agli angoli dei meridiani e dei paralleli componenti la rete geografica, i quali si conservano inalterati nella projezione.

§. 9. 3.ª Il punto m projezione del punto M della superficie sferica è situato sulla retta TR projezione del cerchio massimo NMO condotto pel punto M e per l'occhio; e prendendo per raggio della sfera il raggio delle tavole, la distanza mC del punto projettato dal centro della prospettiva rappresenta la tangente trigonometrica dell'arco CK descritto col centro O e col raggio $CO=1$, ovvero la tangente dell'angolo NOM alla circonferenza misurato dalla metà dell'arco NM interposto fra il dato punto ed il polo della projezione. Dunque per projettare un punto qualunque bisognerà projettare il cerchio massimo che passa per esso e per l'occhio, e tagliare sulla projezione ottenuta, a partire dal centro, una lunghezza eguale alla tangente trigonometrica della metà dell'arco compreso fra il punto proposto ed il polo della projezione.

§. 10. Cerchiamo ora di determinare la posizione e la grandezza della projezione stereografica di un cerchio qualunque della sfera. Riprendendo la fig.ª 1.ª, pongasi $PM=\Delta$, distanza del cerchio MM' da projettarsi dal proprio suo polo, e $PN=D$, distanza del polo del cerchio dal polo della projezione; sarà $MN=PN-PM=D-\Delta$, ed $M'N=D+\Delta$, e per la terza proprietà della projezione stereografica applicata alle projezioni dei punti M,M', si avrà

$$mC=\tan\tfrac{1}{2}MN=\tan\tfrac{1}{2}(D-\Delta),\ m'C=\tan\tfrac{1}{2}M'N=\tan\tfrac{1}{2}(D+\Delta).$$

Quindi, chiamando ρ il raggio del cerchio projettato mm', α la distanza del suo centro i dal centro della projezione, β,β' le distanze $mC,m'C$ di questo centro dai punti d'incontro m,m' del cerchio con la retta CA indicante la projezione del cerchio massimo che passa per il polo del cerchio MM' e per l'occhio, si avrà

$$\beta=\tan\tfrac{1}{2}(D-\Delta),\ \beta'=\tan\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

e poichè il centro i del cerchio projettato cade sulla stessa retta AC, projezione del cerchio massimo che passa per l'occhio, le tre rette mC, iC, $m'C$, ovvero β,α,β' saranno equidifferenti, e quindi

$$\rho=\tfrac{1}{2}(\beta'-\beta)=\tfrac{1}{2}\{\tan\tfrac{1}{2}(D+\Delta)-\tan\tfrac{1}{2}(D-\Delta)\}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\frac{\operatorname{sen}\Delta}{2\cos\frac{1}{2}(D+\Delta)\cos\frac{1}{2}(D-\Delta)},\ (\text{I. §. 3})\ \ldots\ldots\\ \rho&=\frac{\operatorname{sen}\Delta}{\cos D+\cos\Delta},\ (\text{I. §. 7})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = iC = \tfrac{1}{2}(\beta' + \beta) = \tfrac{1}{2}\left\{\tan\tfrac{1}{2}(D+\Delta) + \tan\tfrac{1}{2}(D-\Delta)\right\} \\ \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} D}{2\cos\frac{1}{2}(D+\Delta)\cos\frac{1}{2}(D-\Delta)} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} D}{\cos D + \cos\Delta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}(3);$$

dalle quali formole si desume,

$$\rho : \alpha :: \operatorname{sen} \Delta : \operatorname{sen} D.$$

Projezione stereografica sull' orizzonte.

§. 11. Poste le cose precedenti, il cerchio massimo su cui si esegue la projezione di un emisfero può essere o l' orizzonte astronomico di un dato luogo, come Napoli, Parigi, etc., o l'equatore terrestre, o il primo meridiano da cui si contano le longitudini; ed in queste varie ipotesi l' occhio si suppone, o in un punto della sfera diametralmente opposto al luogo che si considera, o nel polo terrestre opposto a quello dell'emisfero che si vuol projettare, o in un punto dell' equatore, polo del primo meridiano. Applichiamo primieramente le proprietà e le formole della projezione stereografica alla descrizione del mappamondo sull' orizzonte di un dato luogo.

Projezione de' paralleli. Rappresentino $TORN$ la sfera terrestre [*fig.* 3], TR l' orizzonte astronomico del luogo N, su cui vuol eseguirsi la projezione, O la posizione dell'occhio, PP' l'asse terrestre, PEO il meridiano del luogo N, QE l'equatore, AA',BB',OG,HH', i suoi paralleli, ed $NE = PT$ la latitudine geografica dello stesso luogo N, la cui projezione cade nel centro C dell'orizzonte. Da quanto precede i punti p, p' rappresenteranno le projezioni de'poli, i paralleli AA',BB' etc. saranno projettati in aa',bb' etc. ed i loro centri i, k, etc. dovranno trovarsi sulla retta TR indicante la projezione del cerchio massimo che passa per l'occhio e per i poli di quelli cerchi; il parallelo OG che passa per l' occhio sarà projettato nella retta lm sua comune sezione con l' orizzonte, ed il parallelo HH', e propriamente la parte della sua circonferenza che rimane al di sopra dell' orizzonte, sarà projettata nell' arco nhn' che rivolge la sua convessità alla retta lm, poichè gl' incontri delle rette OH',OH con la TR prolungata, che determinano il diametro del parallelo projettato, sono ambedue a destra di lm; per la medesima ragione le projezioni dei paralleli compresi fra OG ed il polo P rivolgeranno pure la loro convessità alla retta lm, la quale separerà i paralleli che si estendono a sinistra da quelli che si estendono a destra. Finalmente l' equatore EQ avendo due punti o,o' comuni con l' orizzonte, la sua projezione dovrà passare per questi punti e pel

punto e projezione di E. Dopo di ciò sarà facile descrivere i paralleli del mappamondo.

Sia $TNRO$ l'orizzonte [*fig.* 4.] su cui si esegue la prospettiva, e si conduca il diametro TR che rappresenterà la projezione del meridiano del luogo scelto per punto centrale del mappamondo. Si faccia l'angolo PCT eguale alla latitudine di questo punto, e si tirino i diametri PP', EQ perpendicolari fra loro, i quali serviranno di guida nell'eseguire le costruzioni, considerandosi a tal oggetto il primo per asse terrestre ed il secondo per equatore, come nella figura precedente. Ordinariamente sogliono segnarsi sul mappamondo i meridiani ed i paralleli da 10 in 10 gradi, ma per non complicare la figura noi li supponiamo segnati da 20 in 20 gradi. Laonde, partendo dai punti E, Q, si taglino successivamente sulla circonferenza $PEP'Q$ gli archi EF'', FQ; $D'F'', DF$; QK, EK' etc. eguali fra loro e ciascuno di 20 gradi, e si unisca il punto O, situato come nella figura precedente, con tutti i punti di divisione A, A'; B, B'; D, D' etc. Gl'incontri con la retta TR delle rette condotte a due punti A, A' egualmente lontani dal polo, ossia aventi la stessa latitudine, determineranno il diametro aa' del parallelo projettato, il quale si descriverà prendendo per centro il punto di mezzo della aa'. Lo stesso si farà per tutti gli altri paralleli. Tutti i centri dei paralleli trovandosi sulla retta TR, è chiaro che la figura è simmetrica intorno a questo diametro.

§. 12. *Projezione dei meridiani.* Le projezioni dei meridiani sono cerchi ciascuno dei quali deve passare per i due punti p, p' [*fig.* 3.] projezioni dei poli P, P'; essi hanno perciò la corda pp' di comune, ed i loro centri dovranno trovarsi nella retta SMS' elevata perpendicolarmente sulla pp' dal suo punto di mezzo M. Considerando inoltre il meridiano POE come quello dal quale si contano le longitudini, poichè per la terza proprietà della projezione stereografica gli angoli che gli altri meridiani fanno con questo primo si conservano inalterati fra le corrispondenti projezioni, i meridiani projettati dovranno formare con la retta pp', projezione del primo meridiano, angoli conosciuti ed eguali alle rispettive longitudini. Questi dati bastano per eseguire la costruzione dei meridiani.

Sia POR il piano di prospettiva [*fig.* 5.], TR la projezione del primo meridiano, e fatto l'angolo PCT eguale alla latitudine del punto sull'orizzonte del quale si esegue la projezione, saranno p, p' le projezioni dei poli terrestri. Si divida pp' per metà nel punto M, e s'innalzi da questo punto SS' perpendicolare a pp'. Col centro p e con un raggio qualunque, per esempio eguale a CR, si descriva un cerchio la cui circonferenza si divida da 20 in 20 gradi, cominciando dal punto F a destra ed a sinistra. Condotti i raggi p-20, p-40 etc. ai punti di divisione, e prolungati sino alla retta SS', gl'incontri a, b, d etc. saranno i centri dei meridiani.

Imperocchè, da quanto si è detto di sopra risulta che ogni punto della retta SS' è centro di un meridiano projettato, ed inoltre la circonferenza pA descritta col raggio ap essendo perpendicolare al raggio, l'angolo apA sarà retto, e quindi l'angolo MpA di 70 gradi; vale a dire che l'arco $A'pA$ rappresenterà il meridiano projettato che ha 70° di longitudine *ovest*, ossia una longitudine complemento della apM, che ha servito a determinare il centro a del cerchio. Similmente l'arco $D'pD$ rappresenta la projezione del meridiano che ha 30° di longitudine *ovest*, e così degli altri. Il meridiano che ha 90° di longitudine è perpendicolare al primo meridiano, e passa per gli stessi punti o,o', [*fig.* 3.] dell'equatore, che sono projezioni e punti effettivi ad un tempo; il centro della prospettiva di un tal cerchio dovrà perciò trovarsi sulla retta TR e sulla SS', [*fig.* 3, e 5.] cioè nel punto M. I centri dei meridiani che hanno una longitudine *est* sono situati sulla retta MS' e distano dal punto M quanto i centri dei meridiani di eguale longitudine *ovest*. Deve in fine avvertirsi che gli estremi A,A' di un meridiano sono in linea retta col centro C, perchè i punti A,A' corrispondono agl'incontri dei meridiani della sfera con l'orizzonte, e si sa che i cerchi massimi s'intersegano in parti eguali.

La figura 6 rappresenta la projezione stereografica completa di un emisfero sul piano dell'orizzonte.

Ripieghi particolari per eseguire la projezione dei cerchi di grandissimo raggio.

§. 13. Secondochè i paralleli o i meridiani si accostano al parallelo o al meridiano che passa per l'occhio ed è projettato in linea retta, i loro raggi divengono oltremodo lunghi, e le costruzioni indicate per trovare i centri dei cerchi projettati risultano incomode ed imperfette, perchè i centri medesimi escono dal foglio del disegno, e sono malamente determinati dall'incontro di rette che fanno tra loro angoli piccolissimi. Bisogna perciò indicare mezzi più opportuni per projettare i cerchi che hanno raggi molto grandi.

Non volendo allontanarsi dalle costruzioni grafiche, il miglior mezzo per descrivere un parallelo o un meridiano che si trovi in quelle condizioni è di projettare tre punti della sua circonferenza, e valersi della proprietà del cerchio, che gli angoli nello stesso segmento sono eguali, per determinare altri punti da servir di guida alla compiuta descrizione dell'arco, nel modo seguente. Siano A,B,C tre punti dati di posizione sul disegno [*fig.* 7,] ed appartenenti all'arco di cerchio ABC da descriversi; condotte le rette AB,BC e prolungate indefinitamente, se con un pezzo di cartone o con due righette rigide insieme connesse si formerà un

angolo materiale uguale all' ABC, facendo muovere quest' angolo in modo che i suoi lati, di lunghezza indefinita, passino sempre pei due punti fissi A, C, esso prenderà le varie posizioni abc, $a'b'c'$ etc: ed il suo vertice descriverà l' arco di cerchio $Abb'BC$ etc. La proprietà del cerchio che gli angoli nello stesso segmento ABC sono eguali dà ragione di questa pratica come già si è accennato. Rimane ora ad indicarsi il mezzo più facile per ottenere tre punti di un parallelo o di un meridiano nella projezione stereografica sull' orizzonte.

§. 14. Un parallelo qualunque HH' interseca l' orizzonte nella retta nn' perpendicolare a TR [*fig.* 8.], poichè tanto l' orizzonte quanto il parallelo sono perpendicolari al meridiano TNR, onde la loro comune sezione nn' è perpendicolare a questo cerchio ed a tutte le rette che sono in esso, come la TR. Sarà facile perciò determinare i punti n, n' che sono nello stesso tempo projezioni e punti effettivi: così nella *fig.* 4. dal punto l d' incontro della retta TR con la retta KK', che unisce i punti K, K' di eguale latitudine, s' innalzerà alla TR la perpendicolare LL', i cui estremi L, L' dinoteranno gl' incontri del parallelo, che ha per latitudine EK', con l' orizzonte; per i punti L, L' e pel punto k' projezione di K' si farà poi passare l' arco di cerchio $Lk'L'$ che rappresenterà la projezione del parallelo. Volendo determinare trigonometricamente l' arco $n'R$ dell' orizzonte [*fig.* 8], si chiami λ la latitudine $TP = P'R$ del punto centrale, e sia L la latitudine del parallelo HH'; nel triangolo sferico $n'P'R$ rettangolo in R saranno conosciuti $P'R = \lambda$, $n'P' = 90° - L$, e si avrà, $\cos n'P' = \cos P'R \cos n'R$, ovvero $\operatorname{sen} L = \cos\lambda \cos n'R$, da cui, $\cos n'R = \frac{\operatorname{sen} L}{\cos\lambda}$. È da notare che $\cos n'R$ rappresenta appunto la retta Cg.

§. 15. Rispetto ai meridiani, si sa che i punti d' incontro di un meridiano con l' orizzonte sono agli estremi di un diametro, per cui basterà trovarne uno per esser determinato anche l' altro. Indichiamo, come qui sopra, con λ la latitudine PT del punto centrale [*fig.* 8], e sia l la longitudine TPG del meridiano PGP'; nel triangolo rettangolo sferico PTG si avrà $\operatorname{sen}\lambda = \frac{\tan TG}{\tan l}$, onde, $\tan TG = \operatorname{sen}\lambda \tan l$. Così sarà determinato l' arco TG fra il punto T e l' incontro del meridiano di longitudine l con l' orizzonte; si può dare una costruzione molto semplice di questa formola.

Dal punto N [*fig.* 5.] si tagli un arco NL eguale a TP, latitudine del punto centrale, si abbassi la retta LG perpendicolare a TR, e dal punto R s' innalzi anche a quest' ultima la perpendicolare RH. Partendo dal punto R sia riportata sulla circonferenza ORN la graduazione eseguita sul cerchio descritto col centro p e col raggio CR, e sia m un punto di divisione. Si uni-

sca il raggio Cm, che taglierà la LG in t, e si faccia $rR=tG$; si conduca la rCn', ed n,n' saranno gl'incontri del meridiano di longitudine mR con l'orizzonte. In fatti dalla costruzione risulta che $CG=\cos LR=\cos(90^\circ-\lambda)=\text{sen}\,\lambda$, ed essendo $mR=tCG=l$, nel triangolo rettangolo CtG, si avrà $\tan tCG=\frac{tG}{CG}$, da cui $tG=CG\tan tCG$, ovvero $rR=\text{sen}\,\lambda\tan l$, e quindi l'arco nR, che ha per tangente rR è la stessa cosa dell'arco TG della *fig.* 8. Per descrivere poi la projezione del meridiano che ha per longitudine mR si farà passare un arco di cerchio pei tre punti n',p,n.

§. 16. La costruzione indicata di sopra per projettare i paralleli esige spesso, anche quando i raggi non sono grandissimi, la determinazione di punti che oltrepassano molto il limite del disegno, e non sarà inutile accennare come possa ovviarsi a questo inconveniente. Dovendo per esempio projettare il parallelo di latitudine $F''E$ [*fig.* 4,] si sono condotte le $F''O,FO$, si è prolungata quest' ultima in f, e divisa la ff' in due parti eguali, a fine di trovare il centro g del cerchio; ma per assegnare questo punto si può evitare il prolungamento della retta FO, dividendo per metà la $f'O$ in m, e dal punto m conducendo una parallela gm ad FO, poichè per la simiglianza dei triangoli fOf', gmf' si ha $f'm:mO::f'g:fg$, e quindi $f'g=fg$.

Analogamente, nella costruzione dei meridiani [*fig.* 5.] non sarà necessario projettare il polo P' per determinare il punto M, ma si potrà dividere per metà la pO in K ed elevarle la perpendicolare KM. In fatti l'angolo POP' nel semicerchio è retto, onde i triangoli pKM,pOp' sono simili, come i precedenti.

Costruzione del mappamondo sul piano dell' orizzonte, facendo uso delle formole.

* §. 17. Comunque semplici possano essere le costruzioni geometriche, sono sempre inesatte per la imperfezione degl' istrumenti che in esse si adoperano, e deve preferirsi la determinazione numerica delle successive quantità geometriche che compongono la costruzione, dimodochè questa si riduca in ultimo ad assegnare la posizione di uno o più punti per mezzo di coordinate rettangolari. Applicheremo perciò le formole generali della projezione alla determinazione della grandezza e della posizione dei meridiani e dei paralleli projettati.

Considerando un parallelo qualunque $A'A$ [*fig.* 3.], chiamiamo L la sua latitudine $A'E$, e λ la latitudine PT del punto centrale della prospettiva; la distanza $A'P$ del parallelo dal suo polo sarà espressa da $90^\circ-L$, e la distanza PN del polo del parallelo dal polo della projezione corrisponderà a $90^\circ-\lambda$. Sostituiti questi va-

*

lori a λ, D nelle formole (1), (2), (3) trovate di sopra, si avrà,

$$\beta = \tan \tfrac{1}{2}(L - \lambda) \ldots \ldots \ldots (4).$$

$$\rho = \frac{\cos L}{\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}L} = \frac{\cos L}{2 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(L+\lambda)\cos\tfrac{1}{2}(L-\lambda)} \ldots \ldots (5).$$

$$\alpha = \frac{\cos \lambda}{\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}L} = \frac{\cos \lambda}{2 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(L+\lambda)\cos\tfrac{1}{2}(L-\lambda)} \ldots \ldots (6).$$

Le quali formole serviranno a determinare la posizione del centro, ed il raggio di qualunque parallelo; e se il cerchio avrà un raggio molto grande potrà descriversi per punti valendosi della sua equazione. Nel caso attuale prendendo per assi delle coordinate CT, CN [*fig.* 4.] l'equazione del parallelo, che ha il suo centro sull'asse delle x sarà $(x-\alpha)^2+y^2=\rho^2$; dalla quale si ottiene $y=\pm\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}=\pm\sqrt{(\rho+x-\alpha)(\rho+\alpha-x)}$. Assegnando dunque ad x diversi valori in parti del raggio CT considerato come unità, si calcoleranno i corrispondenti valori di y, i quali valutati con esattezza mediante una scala geometrica, serviranno a determinare altrettanti punti della circonferenza del parallelo.

* §. 18. Le formole (4), (5), (6) divengono più semplici nei casi particolari. Supponendo L eguale a $90°$, o pure a $-90°$, i raggi dei paralleli aventi una tal latitudine boreale o australe si annullano, ed i cerchi si cambiano in punti, e propriamente nei due poli. Laonde le formole (4), (6) daranno [*fig.* 3.];

$$\text{per } L=90°, \beta=\alpha=Cp=\tan(45°-\tfrac{1}{2}\lambda)=\frac{\cos\lambda}{1+\operatorname{sen}\lambda} \text{ (I, §. 5.)}$$

$$\text{per } L=-90°, \beta=\alpha=Cp'=-\tan(45°+\tfrac{1}{2}\lambda)=\frac{-\cos\lambda}{1-\operatorname{sen}\lambda} \text{ (ivi):}$$

ed il valore della retta pp' compresa fra le projezioni dei due poli, non tenendo conto del segno —, il quale è relativo alla posizione di Cp', sarà

$$Cp+Cp'=pp'=\tan(45°-\tfrac{1}{2}\lambda)+\tan(45°+\tfrac{1}{2}\lambda)$$
$$=\frac{\cos\lambda}{1+\operatorname{sen}\lambda}+\frac{\cos\lambda}{1-\operatorname{sen}\lambda}=\frac{2\cos\lambda}{1-\operatorname{sen}^2\lambda}=2\operatorname{seg}\lambda.$$

Il punto di mezzo M della pp' sarà dato da

$$CM=pM-pC=\tfrac{1}{2}pp'-pC=\frac{1}{\cos\lambda}-\frac{\cos\lambda}{1+\operatorname{sen}\lambda}$$
$$=\frac{1+\operatorname{sen}\lambda-\cos^2\lambda}{\cos\lambda(1+\operatorname{sen}\lambda)}=\frac{\operatorname{sen}\lambda(1+\operatorname{sen}\lambda)}{\cos\lambda(1+\operatorname{sen}\lambda)}, \text{ ed in fine,}$$

$$CM=\tan\lambda \ldots \ldots \ldots (7).$$

Per projettare l'equatore si farà $L=0$, e sarà

$$\beta=-\tan\tfrac{1}{2}\lambda,\ \rho=\frac{1}{\operatorname{sen}\lambda},\ \alpha=\frac{\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}=\cot\lambda\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8).$$

Sogliono anche nei mappamondi segnarsi i *tropici* ed i *polari*; i valori di ρ, e di α per questi paralleli si otterranno facendo $L=23^\circ.28'$, oppure $L=-23^\circ.28'$, ed $L=66^\circ.32'$, ovvero $L=-66^\circ.32'$.

Finalmente se si faccia $L=-\lambda$, il parallelo da projettarsi sarà OG, che passa per l'occhio, e si avrà

$$\beta=CM=-\tan\lambda,\ \rho=\frac{\cos-\lambda}{\operatorname{sen}\lambda+\operatorname{sen}-\lambda}=\frac{\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda-\operatorname{sen}\lambda}=\infty;$$

il raggio del parallelo projettato sarà dunque infinito, cioè la prospettiva di tal parallelo sarà una linea retta, ciò che altronde era noto. Il valore di β indica poi che il parallelo projettato incontra l'asse TR nel punto di mezzo della retta pp'.

* §. 19. Passando ai meridiani, sia PAP' un qualunque meridiano da projettarsi [*fig.* 9], ed indichiamo con l la sua longitudine TPA. Dal polo N della projezione conducasi un arco NK perpendicolare alla circonferenza del meridiano PA prolungata, ed estendendo l'arco KN sino in π di modo che risulti $K\pi=90^\circ$, sarà π il polo del meridiano KPA. Ciò posto, il centro della prospettiva di questo meridiano dovrà, come nella *fig.* 1. trovarsi sulla retta indicante la projezione del cerchio $KN\pi O$ che passa per l'occhio e pel polo π del cerchio che si vuol projettare. Rappresenti Ca quella retta, ed a il centro del meridiano projettato, e si abbassi aM perpendicolare sopra TR; è chiaro che la projezione del meridiano proposto KPA sarà interamente determinata, se si conosceranno il suo raggio e le coordinate CM, Ma del suo centro.

Or nelle formole (2),(3) applicate al caso attuale, la distanza Δ del cerchio da projettarsi dal proprio suo polo è $\pi K=90^\circ$, e la distanza D del polo del cerchio dal polo della projezione è $\pi N=90^\circ-KN$, e ponendo per brevità $KN=\varphi$, sarà $\pi N=D=90^\circ-\varphi$. Per determinare φ, e l'angolo N fra il primo meridiano NT ed il cerchio $KN\pi$ che passa per l'occhio, nel triangolo rettangolo sferico KNP sono conosciuti $PN=90^\circ-\lambda$, e $KPN=TPA=l$, e si avranno perciò le seguenti relazioni,

$$\operatorname{sen}KN=\operatorname{sen}PN\operatorname{sen}KPN,\ \text{ovvero}\ \operatorname{sen}\varphi=\cos\lambda\operatorname{sen}l\ .\ .\ .\ (9)$$

$$\operatorname{sen}N=\frac{\cos P}{\cos KN},\ \text{ovvero}\ \operatorname{sen}N=\frac{\cos l}{\cos\varphi},$$

$$\cot PN=\cot KN\cos N,\ \text{onde}\ \cos N=\frac{\tan\lambda}{\cot\varphi}=\tan\lambda\tan\varphi$$

Sostituiscansi nelle formole (2), (3) a Δ, D, i loro valori e si avrà

$$\rho = \frac{1}{\text{sen}\,\varphi} = \frac{1}{\cos\lambda\,\text{sen}\,l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{\cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi} = \cot\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Ma queste formole non bastano a costruire il meridiano, perchè non si conosce la posizione della retta Ca sulla quale è posto il suo centro. Riflettendo che l'angolo sferico KNP o il suo eguale πNR pareggia l'angolo aCR, quest'ultimo, che serve ad assegnare la posizione della retta Ca, sarà conosciuto dalla formola trovata quì sopra, $\cos N = \tan\lambda \tan\varphi$; dimodochè il meridiano potrebbe costruirsi facendo l'angolo $RCa = N$, tagliando sopra Ca una parte $Ca = \alpha = \cot\varphi$, e descrivendo un cerchio col centro a e con un raggio eguale a $\rho = \frac{1}{\text{sen}\,\varphi} = \frac{1}{\cos\lambda\,\text{sen}\,l}$. Sarà però più semplice determinare le coordinate CM, Ma del centro a del meridiano projettato. Dal triangolo CMa si ottengono,

$CM = Ca \cos C$, $Ma = Ca\,\text{sen}\,C$; ma $Ca = \alpha = \cot\varphi$,

$$\cos C = \cos N = \frac{\tan\lambda}{\cot\varphi}, \quad \text{sen}\,C = \text{sen}\,N = \frac{\cos l}{\cos\varphi}, \quad \text{dunque}$$

$$CM = \cot\varphi \cdot \frac{\tan\lambda}{\cot\varphi} = \tan\lambda, \quad Ma = \cot\varphi \cdot \frac{\cos l}{\cos\varphi} = \frac{\cos l}{\text{sen}\,\varphi} = \rho\cos l,$$

ed in fine,

$$CM = \tan\lambda, \; Ma = \frac{\cot l}{\cos\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Queste formole che servono a determinare le coordinate del centro del cerchio da projettarsi, insieme con la (10) mediante la quale si calcola il raggio ρ, bastano a descrivere il meridiano, senza che sia necessario calcolare l'angolo φ.

È notabile che il valore dell'ascissa CM del centro è indipendente dalla longitudine del meridiano, ciò che dimostra che l'ascissa medesima appartiene ai centri di tutti i meridiani projettati, vale a dire che questi centri si trovano tutti allogati sulla retta SMS' perpendicolare alla TR e distante dal centro della prospettiva per una retta $CM = \tan\lambda$, come si era già dimostrato di sopra con le considerazioni geometriche.

Se il meridiano da projettarsi fosse pochissimo curvo, dimodochè riuscisse difficile descriverlo con moto continuo, si potrà descrivere per punti servendosi della sua equazione, come si è accennato per i paralleli.

§. 20. In fine, occorre qualche volta determinare la projezione di un punto qualunque B [*fig.* 9.] di cui si conoscono la latitudine L e la longitudine l. Unito questo punto col polo N della projezione, nel triangolo BPN saranno noti $PB = 90° - L$, $BPN = l$, $PN = 90° - \lambda$, e si potranno calcolare PNB e BN. L' angolo PNB, essendo eguale a quello delle projezioni del primo meridiano TN e del cerchio BN che passa per l'occhio, servirà a determinare la posizione della retta indicante la prospettiva di quest' ultimo cerchio, e l' arco BN della cui metà si prenderà la tangente, servirà ad assegnare su quella retta la posizione del punto projettato, siccome è prescritto dalla terza proprietà della projezione stereografica.

Projezione stereografica sull' equatore.

§. 21. Se, rimanendo fermo l'occhio in O [*fig.* 3.], si supponga elevarsi il polo terrestre P sino a confondersi col polo N della projezione, l' equatore EQ combacerà col piano di prospettiva, i paralleli terrestri risulteranno paralleli a questo piano, ed i meridiani passeranno tutti per l' occhio. La projezione si farà allora sul piano dell' equatore, e la rete geografica sarà di facilissima costruzione. In fatti, il polo terrestre sarà projettato nel centro C della projezione che sarà anche il centro comune di tutti i paralleli, e le projezioni dei meridiani saranno altrettanti diametri dell' equatore, i quali, in virtù della seconda proprietà della projezione, s' inclineranno scambievolmente uno all' altro sotto gli stessi angoli che i meridiani della sfera fanno tra loro e col primo meridiano. Ogni punto della circonferenza di un parallelo essendo distante dal polo terrestre, ossia dal polo della projezione, per un arco eguale al complemento della latitudine, la sua projezione sarà distante dal centro del quadro per la tangente trigonometrica della metà di quell' arco, siccome prescrive la terza proprietà; onde il raggio del parallelo projettato sarà eguale alla tangente del semi-complemento della latitudine di quel cerchio.

Le formole generali (1), (2), (3) condurrebbero agli stessi risultamenti. Nel caso attuale essendo per i paralleli, $\Delta = 90° - L$, e $D = 0$, si avrà

$$\rho = \rho' = \frac{\cos L}{1 + \operatorname{sen} L} = \tan \tfrac{1}{2}(90° - L) \ldots (\mathrm{I}, §.5) \ldots\ldots \quad (12)$$

ed $\alpha = \dfrac{0}{1 + \operatorname{sen} L} = 0$. E rispetto ai meridiani sarà $\Delta = 90°$, e $D = 90°$, perchè ogni cerchio massimo è distante 90° dal proprio polo, e di più i poli dei meridiani stanno tutti sull' equatore. Quindi

$\rho = \dfrac{\operatorname{sen} 90°}{\cos.90 + \cos.90°} = \dfrac{1}{0} = \infty$, e similmente $\alpha = \infty$; cioè i meridiani saranno projettati in linee rette.

§. 22. Ciò premesso, ecco come si procederà alla costruzione del mappamondo. Sia *ENQO* l'equatore [*fig.* 10], e si divida la sua circonferenza in parti eguali ciascuna di 10 gradi nei punti *A,B,D,F*, etc. dei quali noi riterremo per semplicità soltanto quelli distanti 30 gradi fra loro. Si uniscano i punti *A,B* col punto *O*, e gl' incontri *a,b* delle rette *AO,BO* con la retta *EQ* determineranno i raggi dei paralleli projettati, i quali si descriveranno col centro *C* e con gl' intervalli *aC, bC*. I meridiani saranno poi projettati nelle rette *AF′,BD′* etc. che uniscono i punti opposti di divisione e passano per il centro. I cerchi tropico e polare si projetteranno unendo il punto *O* coi punti *K,L* distanti da *E,N* per 23°.28′.

Per assegnare la projezione di un punto qualunque di data longitudine e latitudine bisognerà, come la terza proprietà prescrive, projettare il cerchio che passa pel dato punto e per l' occhio, il quale sarà nel caso attuale il meridiano di quel punto e verrà rappresentato sul piano di prospettiva da una retta *CM* che faccia col primo meridiano *NO* un angolo *NCM* eguale alla longitudine data. Inoltre il punto proposto essendo distante dal polo della projezione per un arco eguale al complemento della sua latitudine, si prenderà l' arco *RQ* eguale a quest' ultima, ed unita la *RO*, col centro *C* e col raggio *Cr*, determinato dall' incontro delle rette *RO,EQ*, si descriverà l' arco di cerchio *rS*, e sarà *S* la projezione richiesta del punto. In fatti il punto *S* sta sulla projezione del cerchio che passa per l' occhio, ed è distante dal centro *C* per la retta *rC* tangente trigonometrica dell' angolo *COR* misurato dalla metà dell' arco *NR* complemento della latitudine.

§. 23. In questa projezione sull' equatore la determinazione dei raggi dei paralleli, malgrado la semplicità della costruzione, riesce poco esatta, per la difficoltà di dividere con esattezza la circonferenza del cerchio in parti eguali; e val meglio calcolare il valore numerico di quei raggi per mezzo della formola $\rho = \tan \frac{1}{2}(90^\circ - L)$, e tradurlo in lunghezza servendosi di una scala geometrica.

Projezione stereografica sul primo meridiano.

§. 24. Supponendo sempre fisso l' occhio in *O*, se il polo *P* si abbasserà in *T* [*fig.* 3.] l' equatore salirà in *N*, ed i poli terrestri trovandosi sul piano di projezione, sarà questo un meridiano. La costruzione della rete geografica sul piano del primo meridiano si esegue con le stesse regole date per la projezione sull' orizzonte, e solo riesce alquanto più semplice.

Rappresenti *PNP′O* [*fig.* 11.] il primo meridiano, e condotti i due diametri *PP″,NO* ad angolo retto, il primo indicherà la projezione del meridiano perpendicolare al piano di prospettiva, ed il secondo quella dell' equatore, i quali due cerchi passano per

l' occhio. Partendo dall' equatore NO si divida la circonferenza del cerchio in parti eguali da 10 in 10 gradi, o per maggiore semplicità della figura da 20 in 20 gradi, nei punti $A,A';B,B'$ etc. Si uniscano due punti B,B' egualmente distanti dal polo col punto O, e gl' incontri b,b' delle rette $BO,B'O$ con la PP' determineranno il diametro della projezione del parallelo che ha per latitudine BN; e si descriverà il parallelo projettato prendendo per centro il punto K medio della retta bb', e per raggio Kb. Ma nel caso attuale i punti B,B' sono gl' incontri della circonferenza del parallelo della sfera col piano di prospettiva, perchè il punto P essendo polo del parallelo, è distante da ogni punto della circonferenza di questo cerchio per un arco eguale al complemento della latitudine di esso, come avviene per i punti B,B' situati sul piano di prospettiva. Questi ultimi saranno dunque punti effettivi e projezioni ad un tempo, e poichè i punti B,B',b appartengono alla circonferenza del parallelo projettato, per trovare il centro di un tal cerchio si potrà dividere la corda Bb per metà ed innalzarle la perpendicolare HK che incontrerà il diametro bb' nel centro K. Così si eviterà il prolungamento della retta OB' che va ad incontrare la PP' molto fuori del foglio del disegno.

§. 25. Relativamente ai meridiani, la costruzione della figura 5 rimane modificata nel modo seguente. Col centro P' e col raggio CP' si descrive un quarto di cerchio CL sul quale si riporta la graduazione eseguita sulla circonferenza del primo meridiano; si uniscono i punti di divisione col punto P', e gl' incontri delle congiungenti prolungate col diametro NO determinano i centri dei meridiani projettati, perchè la retta NO divide per metà ed è perpendicolare alla retta che congiunge i punti P,P', projezioni dei poli e poli effettivi, per i quali debbono passare tutti i meridiani, dimodochè i raggi di questi cerchi projettati saranno fP',hP'... Si avverte che qui ogni centro f,h... appartiene al meridiano avente per longitudine l' arco medesimo che ha servito a trovare quel centro, laddove nella figura 5 la longitudine del meridiano di cui si determinava il centro era complemento dell' arco che serviva a trovarlo; e questa differenza nasce da che nella projezione sull' orizzonte il primo meridiano da cui si contano le longitudini era rappresentato dal diametro PP' e nell' attuale è indicato dal cerchio $PNP'O$.

* §. 26. La precedente costruzione è più comoda ed esatta di quella usata comunemente per costruire i meridiani, la quale per un dato meridiano consiste nell' unire il punto P' coi punti D,G distanti da N,O di un arco eguale alla longitudine, e dividere per metà nel punto f la retta dg risultante dagl' incontri delle DP',GP' col diametro NO. È facile mostrare la coincidenza delle due costruzioni. L' arco $CF=ND=GO$ rappresentando la longitudine l del meridiano, si ha l' angolo $DP'P=\frac{1}{2}(PN+ND)=$

$\frac{1}{2}(90^\circ+l)$, e quindi nel triangolo rettangolo dCP' sarà, $CdP'=90^\circ-\frac{1}{2}(90^\circ+l)=\frac{1}{2}(90^\circ-l)$; ma $DP'F=DP'P-FP'C=\frac{1}{2}(90^\circ+l)-l=\frac{1}{2}(90^\circ-l)$, dunque $CdP'=DP'F$, ed il triangolo fdP' essendo isoscele, si avrà $fd=fP'$. Inoltre, poichè l'angolo $DP'G$ nel semicerchio è retto, sarà $fP'g$ complemento di $fP'd$, ed fgP' complemento di fdP', onde i due angoli $fP'g$, fgP', complementi di angoli eguali, saranno eguali; e nel triangolo isoscele fgP', il lato fg uguaglierà l'altro fP', e per conseguenza le tre rette fg, fP', fd, saranno eguali. Risulta da tutto ciò che il punto f determinato col quadrante CL è in mezzo della retta dg, cioè che la seconda costruzione coincide con la prima.

Il centro f del meridiano potrebbe anche determinarsi dividendo la corda gP' per metà nel punto m, ed innalzandole la perpendicolare mf, come si è fatto per i paralleli.

La figura 12 rappresenta la projezione completa sul piano del meridiano.

§. 27. Qui pure ripeteremo che le costruzioni geometriche, quantunque semplicissime, sono sempre da posporsi al calcolo numerico delle quantità che debbono costruirsi, per cui riprendendo le formole generali (1), (2), (3), è chiaro che saranno adattate al nostro caso se faremo per i paralleli $\Delta=90^\circ-L$, $D=90^\circ$; le quali supposizioni danno

$$\beta=\tan\tfrac{1}{2}(90^\circ-90^\circ+L)=\tan\tfrac{1}{2}L \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

$$\rho=\frac{\text{sen}(90^\circ-L)}{\cos 90^\circ+\cos(90^\circ-L)}=\cot L \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

$$\alpha=\frac{\text{sen}\,90^\circ}{\cos 90^\circ+\cos(90^\circ-L)}=\frac{1}{\text{sen}\,L} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

E rispetto ai meridiani, dovrà farsi $\Delta=90^\circ$, perchè ogni cerchio massimo dista dal proprio polo per un quadrante; ed indicando al solito la longitudine di un meridiano qualunque con l, poichè gli assi sferici del primo meridiano e del meridiano di longitudine l fanno tra loro lo stesso angolo l dei cerchi cui sono perpendicolari, l'arco D compreso fra i poli dei cerchi medesimi sarà eguale ad l, e per conseguenza

$$\beta=\tan\tfrac{1}{2}(l-90^\circ)=-\tan\tfrac{1}{2}(90^\circ-l) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

$$\rho=\frac{\text{sen}\,90^\circ}{\cos 90^\circ+\cos l}=\frac{1}{\cos l}=\text{seg}\,l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

$$\alpha=\frac{\text{sen}\,l}{\cos 90^\circ+\cos l}=\tan l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19).$$

Con questi elementi si troverà la posizione del centro e la grandezza di ogni cerchio da projettarsi, e quando esso avesse un rag-

gio molto grande, si potrà descrivere per punti mediante la sua equazione; al quale oggetto faremo riflettere che i paralleli il cui centro trovasi sull' asse delle x hanno per equazione $y^2+(x-\alpha)^2=\rho^2$ dalla quale si desume,

$y=\pm\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}=\pm\sqrt{(\rho+x-\alpha)(\rho+\alpha-x)}$; e l' equazione dei meridiani, che hanno il centro sull' asse delle y, è

$x^2+(y-\alpha)^2=\rho^2$, che dà $y=\alpha\pm\sqrt{(\rho+x)(\rho-x)}$.

§. 28. Finalmente per projettare un punto qualunque di latitudine data L e di longitudine l, osserveremo che nella *fig.* 9, bisogna supporre il polo P abbassato in T, cioè $\lambda=o$, e quindi nel triangolo BPN, che ha servito a projettare il punto B quando si trattava della prospettiva sull'orizzonte (§. 20), si avrà $PN=90°$, e $PB=90°-L$. Rispetto all' angolo che il lato PB fa col meridiano PN, convien riflettere che nel caso attuale questo meridiano che passa per l' occhio rappresenta il meridiano ad angolo retto col primo, onde l' angolo BPN dovrà esprimersi con $l-90°$. Dopo di ciò, per risolvere il triangolo BPN con due lati e l' angolo compreso, nella formola $\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}$, ovvero $\cos c=\cos C\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b+\cos a\cos b$, si farà $PN=b=90°$, $PB=a=90°-L$, $BPN=C=l-90°$, e si avrà, $\cos c=\cos BN=\operatorname{sen} l\cos L$; e dall' altra formola $\cos C\cos b=\cot a\operatorname{sen} b-\cot A\operatorname{sen} C$ si otterrà con le medesime sostituzioni, $\cot A=\cot BNP=\frac{\tan L}{\operatorname{sen}(l-90°)}$, e $\tan BNP=\frac{-\operatorname{sen}(90°-l)}{\tan L}=-\cos l\cot L$.

Si projetterà dunque il punto proposto inclinando sulla retta CP [*fig.* 11] una retta CQ che faccia con essa un angolo PCQ eguale all' angolo BNP ora calcolato, e tagliando sulla CQ a partire dal centro una parte CS eguale alla tangente trigonometrica della metà dell' arco BN precedentemente determinato.

Della projezione ORTOGRAFICA *in generale.*

§. 29. Sia TR il piano di projezione [*fig.* 13], MM' un cerchio qualunque da projettarsi, P il suo polo, N il polo della projezione, e per i punti N,P si conduca il cerchio massimo NPA perpendicolare al piano di prospettiva. Si supponga che l'occhio partendo dalla posizione che occupa in O nella projezione stereografica vada continuamente allontanandosi dal piano TR sino all' infinito, senza uscire dalla retta NO perpendicolare a TR, ed allora le visuali dirette ad M,M' diverranno parallele fra loro e perpendicolari al piano TR; la projezione prenderà quindi il nome di *orto-*

grafica, e si confonderà con quella considerata nella Geometria descrittiva. La projezione del cerchio MM', come è noto, sarà una ellisse mm', di cui l'asse maggiore sarà eguale e parallelo al diametro orizzontale del cerchio MM', e l'asse minore sarà mm' projezione del diametro MM' situato nel piano verticale NPA.

Indicando, come sopra, con Δ la distanza PM del cerchio MM' dal proprio polo, e con D la distanza del polo P dal polo della projezione, sarà evidentemente,

$$\left.\begin{array}{l} mC=\beta=\text{sen}\,MN=\text{sen}\,(D-\Delta) \\ m'C=\beta'=\text{sen}\,M'N=\text{sen}\,(D+\Delta) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$iC=\alpha=\frac{\beta'+\beta}{2}=\tfrac{1}{2}\{\text{sen}\,(D+\Delta)+\text{sen}\,(D-\Delta)\}=\text{sen}D\cos\Delta\,(21)$$

$$im=\rho=\frac{\beta'-\beta}{2}=\tfrac{1}{2}\{\text{sen}\,(D+\Delta)-\text{sen}\,(D-\Delta)\}=\cos D\,\text{sen}\Delta(22)$$

Quest'ultima espressione del semiasse minore ρ dell'ellisse dinota il semidiametro cM del cerchio moltiplicato pel coseno dell'inclinazione del piano MM' con l'orizzonte TR. In fatti, il raggio CP essendo perpendicolare al piano del cerchio MM', sarà $cM=\text{sen}\,PM=\text{sen}\,\Delta$, e l'angolo che il piano MM' fa con l'orizzonte sarà complemento di quello che la retta CP fa con l'orizzonte medesimo, cioè complemento di PCA, e quindi eguale a $PCN=D$. Laonde il prodotto di $\text{sen}\,\Delta$ per $\cos D$ esprimerà appunto quello del raggio cM del cerchio per il coseno dell'angolo d'inclinazione di esso cerchio sull'orizzonte.

Se l'angolo che il piano MM' fa con l'orizzonte fosse retto, il suo coseno essendo nullo, ridurrebbe a zero anche il prodotto $\text{sen}\,\Delta\cos D$, ed annullandosi il semiasse minore dell'ellisse, questa si cambierebbe in una linea retta; così il quadrante NA ha per projezione la retta CA. Se poi l'angolo d'inclinazione del cerchio MM' con l'orizzonte fosse zero, il suo coseno sarebbe eguale all'unità, ed il prodotto $\text{sen}\,\Delta\cos D$ si cambierebbe in $\text{sen}\,\Delta$; vale a dire che il semiasse minore sarebbe eguale al maggiore, e la projezione del cerchio parallelo all'orizzonte sarebbe un cerchio di raggio eguale.

§. 30. Da quanto precede si raccoglie, 1.° che la projezione ortografica di un cerchio qualunque MM' della sfera è un'ellisse di cui l'asse minore mm' è uguale al raggio del cerchio moltiplicato pel coseno dell'angolo che esso fa con l'orizzonte, ed è posto sulla retta AC dinotante la projezione del cerchio APN, che passa per il polo P del cerchio proposto e per l'altro N della projezione; e l'asse maggiore è perpendicolare al minore ed eguale al diametro del cerchio da projettarsi. 2.° La projezione di un punto qualunque M cade sulla retta AC indicante la projezione del cerchio che passa per il punto proposto e per il polo della projezio-

ne, ed è distante dal centro C pel seno dell'arco MN compreso fra il punto ed il polo della projezione. Questi pochi principii bastano ad eseguire la projezione dei paralleli e dei meridiani della sfera sull'orizzonte, sull'equatore e sul primo meridiano.

Projezione ortografica sull' orizzonte

* §. 31. Rappresenti $TNRQ$ [*fig.* 14] l'orizzonte di un luogo considerato come piano di prospettiva e dinotino, PP' l'asse terrestre, EQ l'equatore, AA', BB' etc. i suoi paralleli, che qui si riportano solo per servir di guida nelle costruzioni; sarà PT la latitudine del luogo centrale, e TR la projezione del meridiano che passa per il polo della projezione. Dagli esposti principii risulta che i paralleli saranno projettati in altrettante ellissi, di cui gli assi minori caderanno tutti sulla retta TR; ed abbassando le perpendicolari $Aa, A'a'$; $Bb, B'b'$, saranno aa', bb' gli assi minori delle ellissi corrispondenti ai paralleli AA', BB'. Si dividano per metà le rette aa', bb' nei punti e, d che saranno i centri delle ellissi, e condotti per questi punti gli assi maggiori perpendicolari a TR ed eguali rispettivamente ad AA', BB', si costruiranno l'ellissi ars, mbn. Si avverte che la prima deve descriversi interamente, trovandosi il parallelo AA' tutto al di sopra dell'orizzonte, e la seconda deve limitarsi ai punti L, l nei quali il parallelo BB' della sfera incontra l'orizzonte, (che sono punti effettivi e projezioni ad un tempo) perchè dovendo projettarsi il solo emisfero superiore TNR, le porzioni dei paralleli che rimangono al di sotto dell' orizzonte non possono esser comprese nel disegno. Così si costruiranno tutti i paralleli.

* §. 32. Per projettare i meridiani riflettiamo che un meridiano qualunque PAP' [*fig.* 9.] essendo un cerchio massimo inclinato all'orizzonte TR, la sua projezione deve essere un'ellisse che abbia per centro il punto C, per asse maggiore la comune sezione ACL del meridiano con l' orizzonte, e per semiasse minore il raggio della sfera moltiplicato pel coseno dell' angolo PAT che il meridiano stesso fa con l'orizzonte. Or nel triangolo rettangolo PTA, l' arco $PT = \lambda$ rappresenta la latitudine del punto centrale, e l'angolo $TPA = l$ la longitudine del meridiano proposto, e quindi si avrà, $\operatorname{sen} l = \frac{\cos PAT}{\cos \lambda}$, onde $\cos PAT = \operatorname{sen} l \cos \lambda$. E poichè il raggio della sfera si assume per unità, il valore del semiasse minore dell' ellisse sarà lo stesso coseno di PAT ovvero $\operatorname{sen} l \cos \lambda$. Dunque per projettare il meridiano bisognerà assegnare la posizione della retta AL, innalzarle dal centro C una perpendicolare eguale a $\operatorname{sen} l \cos \lambda$, e con i due assi così determinati descrivere l'ellisse.

* §. 33. Ciò posto, ecco come si procederà alla costruzione dei

meridiani. Sia TNR [*fig.* 15] l'orizzonte sul quale si esegue la projezione, TR la projezione del primo meridiano, PT la latitudine del punto centrale; abbassando la perpendicolare Pp, sarà p la projezione del polo terrestre. Sul quadrante RN dal punto R si contino le longitudini orientali ed occidentali, e rappresenti aR la longitudine di un meridiano. Si costruisca l'incontro $r'AA'$ del meridiano con l'orizzonte, nel modo indicato di sopra [§. 15] parlandosi della projezione stereografica, e sarà AA' l'asse maggiore dell'ellisse da descriversi. Col centro C e col raggio $Cp = \cos\lambda$ si descriva il quadrante Mp' che incontrerà il raggio Ca in m, e la perpendicolare mm' condotta da questo punto sopra CR esprimerà la lunghezza del semiasse minore; perocchè nel triangolo rettangolo Cmm' l'ipotenusa $Cm = \cos\lambda$, e l'angolo $mCm' = aR = l$, e quindi $mm' = \cos\lambda \operatorname{sen} l$. Condotta $a'C$ perpendicolare ad AA', ed eguale ad mm', co' due semiassi $AC, a'C$ si descriverà la semiellisse $A'a'A$; e si avverte che l'altra metà dell'ellisse, che passerebbe pel polo inferiore p', non si costruisce, perchè non è compresa nell'emisfero superiore, che deve projettarsi.

* §. 34. Quando la longitudine contata dal punto R si avvicina al quadrante, come la bR, la costruzione eseguita nella *fig.* 5 per trovare la comune sezione del meridiano con l'orizzonte riesce incomoda, perchè l'incontro del raggio bC con la tangente RH si fa a molta distanza dal foglio del disegno. Per rimediare a questo inconveniente le costruzioni relative ai meridiani che hanno una longitudine maggiore di 45° potranno essere modificate, conducendo la tangente indefinita NH', tagliando l'arco $L'R = \lambda$, abbassando la perpendicolare $L'G' = \cos\lambda$, e facendo uso delle rette $NH', L'G'$ in vece delle rette RH, LG. Così per la longitudine bR si unirà il raggio bC che si prolungherà in n, si taglierà $G'n' = Nn = \tan(90° - l)$, e la retta $n'C$ prolungata in B, B' sarà la comune sezione cercata. In fatti i triangoli $CG'n', CNH'$ danno $CG' : G'n' :: CN : NH'$, ossia $\operatorname{sen}\lambda : \tan(90° - l) :: 1 : \tan(90° - BR)$,

e quindi $\cot BR = \dfrac{\cot l}{\operatorname{sen}\lambda}$, e $\tan BR = \operatorname{sen}\lambda \tan l$, che è l'espressione della tangente dell'angolo che la retta da costruirsi fa con la retta TR. Determinato l'asse maggiore BB', dal punto C s'innalzerà $Cb' = tt'$, e con i due semiassi CB', Cb' si costruirà la semiellisse $B'b'B$.

* §. 35. Alle precedenti costruzioni grafiche, comunque semplici, è sempre da preferirsi l'uso delle formole, quando si ricerca molta esattezza. Le formole generali (21), (22) applicate al nostro caso danno, rispetto ai paralleli, per i quali $\Delta = 90° - L, D = 90° - \lambda$,

$$\alpha = \cos\lambda \operatorname{sen} L, \ \rho = \operatorname{sen}\lambda \cos L. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Da queste espressioni si ottengono i valori dell'ascissa del cen-

tro, e del semiasse minore dell' ellisse da costruirsi; e poichè il semiasse maggiore è uguale a $\operatorname{sen}\Delta = \cos L$, si avranno tutti gli elementi necessarii per descrivere l' ellisse per punti mediante la sua equazione, la quale, ponendo il semiasse maggiore eguale ad r, e prendendo per assi delle coordinate CT, CN [*fig.* 14], sarà

$$y = \pm \frac{r}{\rho}\sqrt{(\rho + x - \varkappa)(\rho + \varkappa - x)}.$$

Relativamente ai meridiani, le loro projezioni, per ciò che di sopra si è detto, hanno tutte per centro il centro della sfera, per semiasse maggiore l' unità, e per semiasse minore il valore $\operatorname{sen} l \cos \lambda$. Il semiasse maggiore è poi inclinato alla retta TR [*fig.* 9], projezione del primo meridiano, sotto un augolo TCA, che indicheremo con ω, il quale ha per tangente $\operatorname{sen}\lambda \tan l$ [§. 15]. Le formole per costruire i meridiani saranno dunque

$$\tan\omega = \operatorname{sen}\lambda \tan l,\ r = 1,\ \rho = \operatorname{sen} l \cos\lambda \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (24).$$

La prima delle quali servirà a determinare la posizione dell'asse maggiore, e le altre due le lunghezze degli assi dell' ellisse, la quale potrà costruirsi per punti mediante la sua equazione al centro

$y = \pm \frac{\rho}{1}\sqrt{(1 + x)(1 - x)}$. I valori $r = 1, \rho = \operatorname{sen} l \cos\lambda$, potevano anche dedursi direttamente dalle formole generali (21), (22).

* §. 36. Da ultimo se dovesse projettarsi un punto qualunque B [*fig.* 9] di cui fosse data la longitudine e la latitudine, si risolverebbe il triangolo sferico BPN come per la projezione stereografica, e dopo aver trovati i due elementi BNP, BN, si farebbe uso del primo per determinare la posizione della retta dinotante la projezione del cerchio BN che passa pel dato punto B e per il polo N della projezione, e del secondo per assegnare in quella retta la projezione del punto proposto, la quale deve esser distante dal centro quanto è il seno dell' arco BN interposto fra il punto B ed il polo suddetto, secondo i principii stabiliti per la projezione ortografica.

Projezione ortografica sull' equatore e sul primo meridiano.

§. 37. Quando il polo terrestre P [*fig.* 13] si confonde col polo N della projezione, l' asse del mondo prende la posizione della retta ON, ed il cerchio massimo TR che gli è perpendicolare si cambia nell' equatore, onde allora la projezione si esegue su questo cerchio.

I paralleli MM' risultano paralleli al piano di projezione, e quindi sono projettati in cerchi della stessa grandezza aventi per centro comune il punto C, projezione del polo terrestre. I meridiani,

passando tutti per il polo *N*, sono perpendicolari al piano di projezione, per cui sono rappresentati su questo piano dalle loro comuni sezioni con esso, le quali fanno tra loro gli stessi angoli che i meridiani sulla sfera.

Ciò premesso sia *ENQO* [*fig.* 16] l'equatore la cui circonferenza si divida in parti eguali ognuna di 10 gradi ne' punti A,A',B,B' etc. dei quali per semplicità della figura noi riterremo soltanto quelli distanti fra loro 30 gradi. Si abbassino dai punti di divisione le perpendicolari Aa,Bb, e queste determineranno i raggi aC,bC dei paralleli projettati, perchè essendo aC,bC i coseni delle rispettive latitudini AE,BE sono eguali ai raggi dei paralleli della sfera, come vuole la projezione. Si uniscano inoltre i punti di divisione col centro, e le rette ACD',BCF'' rappresenteranno le projezioni dei meridiani.

§. 38. Per projettare un punto qualunque di data latitudine e longitudine, si projetterà prima il meridiano della sfera su cui è posto, ed a tal fine, considerando *NO* per primo meridiano, si farà l'arco *NM* eguale alla longitudine data, e si congiungerà la retta *CM*. Indi si prenderà l'arco *MR* eguale alla data latitudine, ed abbassata la perpendicolare *Rr* sarà *r* la projezione del punto proposto. In fatti, *rC* è il coseno della latitudine *MR*, ossia il raggio del parallelo sul quale si trova il punto proposto, e quindi la projezione *r* cade nell' incontro del meridiano e del parallelo projettati.

§. 39. Se il polo terrestre *P* si supponga abbassato in *T*, [*fig.* 13,] l'asse del mondo coinciderà col piano di projezione, che sarà perciò un meridiano. I paralleli MM' risulteranno perpendicolari al piano di prospettiva dal quale saranno anche divisi per metà, onde le loro projezioni saranno tante linee rette eguali rispettivamente ai loro diametri. I meridiani intersegandosi tutti nell' asse terrestre, che giace sul piano di projezione, le loro inclinazioni a questo piano, preso per primo meridiano, saranno eguali alle rispettive longitudini, laonde le projezioni dei meridiani saranno altrettante ellissi, ciascuna delle quali avrà per asse maggiore l'asse terrestre, e per semiasse minore il raggio della sfera moltiplicato pel coseno della longitudine del meridiano.

Dopo di ciò la costruzione della rete geografica sul piano del primo meridiano riuscirà pure facilissima. Rappresenti $PEP'Q$ [*fig.* 17] il primo meridiano, la cui circonferenza si divida in parti eguali da 10 in 10 gradi a partire dall' equatore *EQ*, ed uniti i punti di divisione egualmente distanti dall' equatore, le congiungenti AA',BB' etc. rappresenteranno le projezioni dei paralleli. Abbassando dagli stessi punti di divisione le perpendicolari Aa,Bb etc. le rette Ca,Cb così determinate esprimeranno i coseni degli archi corrispondenti AQ,BQ; onde se con l'asse maggiore comune PP' e coi semiassi minori Ca,Cb etc. si descriveranno altrettante ellis-

si, rappresenteranno esse le projezioni dei meridiani che hanno per longitudini AQ,BQ etc. contate da Q verso E. Una simile costruzione applicata ai punti A',B' darebbe le projezioni dei meridiani aventi le longitudini $A'E,B'E$ eguali alle precedenti ma contate da E verso Q, ossia si otterranno così le projezioni dei meridiani le cui longitudini sono supplementi delle AQ,BQ.

§. 40. Un punto qualunque di data longitudine e latitudine si projetterà facilmente conducendo, mediante la data latitudine LQ, il parallelo LL' sul quale deve trovarsi il punto, costruendo sulla retta LL' il semicerchio LML', tagliando l'arco LM eguale alla longitudine data, ed abbassando la perpendicolare Mm. Il punto m sarà la projezione cercata; perocchè facendo girare il semicerchio LML' intorno al suo diametro LL' sino a che giunga ad essere perpendicolare al piano $PEP'Q$, il punto M prenderà sulla sfera la vera posizione del punto proposto, giacchè si troverà sul parallelo e sul meridiano corrispondenti alla data sua posizione geografica, ed il punto m ne sarà evidentemente la projezione descrittiva, ovvero ortografica. In questa costruzione la longitudine LM si è valutata sul parallelo LML' in vece di valutarsi sull'equatore, ma si sa che gli archi di paralleli compresi fra due meridiani qualunque hanno tutti la stessa ampiezza dell'arco dell'equatore.

§. 41. In vece delle costruzioni grafiche, è sempre meglio far uso delle espressioni analitiche conosciute dei raggi de' cerchi, e dei semiassi delle ellissi, ed eseguire le projezioni sull'equatore, o sul meridiano mediante una scala geometrica.

Rispetto ad un punto qualunque M, di cui la longitudine McL sia espressa da l, e la latitudine LQ da L, i valori analitici delle coordinate $m'C,mm'$ della sua projezione si ottengono facilmente; poichè $mm' = \operatorname{sen} L$, $cL = cM = \cos L$, ed $m'C = mc = Mc \cos Mcm = \cos L \cos l$.

Della projezione di Lorgna.

§. 42 Tra le condizioni alle quali dovrebbe adempire una buona projezione v'ha quella di conservare sulla carta l'estensione superficiale delle diverse parti della superficie terrestre. Ciò si propose il Cav. *Lorgna* nell'immaginare la sua projezione, che per la semplicità e novità del principio sul quale è fondata ebbe per l'addietro gran voga, ma essendosi poi trovate erronee le distanze, e difettose le configurazioni, si rivenne all'antica projezione stereografica, la quale è finora la più appropriata alla costruzione dei mappamondi.

La projezione di Lorgna suole eseguirsi sull'equatore, per cui i meridiani, come nelle projezioni stereografica ed ortografica, sono diametri dell'equatore inclinati fra loro sotto gli stessi angoli

che fanno sulla sfera. Ma per dare alle parti del disegno l'estensione superficiale delle parti corrispondenti della superficie sferica, il raggio del cerchio rappresentante la projezione dell'emisfero non può essere eguale a quello dell'equatore; e siccome indicando con r il raggio della sfera, la superficie dell'emisfero è espressa da $2\pi r^2$, per trovare un cerchio di eguale superficie si chiamerà R il suo raggio, e sarà $2\pi r^2 = \pi R^2$, dalla quale eguaglianza si desume $R = r\sqrt{2}$. È questa l'espressione del raggio del mappamondo di Lorgna in parti del raggio terrestre, e volendo quest'ultimo raggio in parti del primo, sarà $r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = 0,7071R$; dimodochè, se per l'estensione da darsi al disegno il raggio del mappamondo dovesse, per esempio, essere eguale ad un decimo di passo ($0^m,1852$), il raggio della sfera, o di un cerchio massimo terrestre, risulterebbe $0^{pas},07071$.

§. 43. Per determinare i raggi dei paralleli, rappresenti peC [*fig.* 18] un quarto di meridiano terrestre, e suppongasi diviso il quadrante ep in parti eguali ne' punti a,b,d.. Le corde ep,ap,bp, etc. sono secondo Lorgna, i raggi de' paralleli projettati, il primo de' quali corrisponde al raggio dell'equatore, o del mappamondo, perchè, facendo $eC = r$, nel triangolo rettangolo isoscele epC l'ipotenusa $ep = r\sqrt{2}$. Ed allo stesso modo che l'equatore projettato equivale alla superficie dell'emisfero, ogni parallelo equivale ancora alla superficie del segmento sferico corrispondente. In fatti si sa dalla Geometria che, per esempio, il cerchio di raggio pa, ossia il parallelo projettato che sulla sfera ha per latitudine ae, equivale alla superficie del segmento sferico generato dalla rotazione del semi-segmento circolare pam intorno all'asse pm, e similmente il parallelo pb di latitudine be, equivale alla superficie del segmento sferico pbn etc. La costruzione del mappamondo si eseguirà dunque nel modo seguente.

§. 44. Stabilito il raggio PE del mappamondo secondo l'estensione che vuol darsi al disegno, sulla retta $pe = PE$ si formi un triangolo rettangolo isoscele epC, e sarà pC il raggio terrestre. Col centro C e col raggio pC si descriva il quadrante pde che si divida in nove parti eguali ne' punti a,b,d....; condotte le corde pe,pa,pb etc. saranno questi i raggi del mappamondo e de' paralleli projettati, i quali cerchi si descriveranno col centro P e coi raggi $PE = pe, PD = pd, PG = pg$ etc. Divisa poi la circonferenza del cerchio ELH' in 36 parti eguali, si uniscano i punti di divisione col centro, e le congiungenti rappresenteranno i meridiani, dimodochè sarà terminata la costruzione del mappamondo. Volendo projettare il tropico ed il cerchio polare, si prenderanno gli archi te,sp ciascuno eguale a $23°.28'$, e col centro P e coi raggi PT,PS rispettivamente eguali alle corde pt,ps si descriveranno i paralleli TT',SS'.

Un punto qualunque di data longitudine e latitudine si projetterà costruendo prima di tutto il meridiano al quale appartiene, con prendere dal punto L, origine delle longitudini, un arco LF eguale alla longitudine data, ed unire la retta FF'. Su questa retta poi, a partire dal centro si taglierà una parte PX eguale alla corda px del complemento della latitudine ex del punto proposto, e sarà X la projezione del punto medesimo.

§. 45. Nell'attuale projezione non solo tutti i paralleli hanno una superficie equivalente a quella dei corrispondenti segmenti sferici, ma ogni quadrilatero racchiuso da due meridiani e due paralleli è equivalente al quadrilatero che gli corrisponde sulla sfera: in fatti se la superficie del segmento sferico generata dalla rotazione dell'arco dp intorno all'asse pC è rappresentata esattamente nella projezione dal cerchio di raggio DP, e la superficie generata dall'arco gp è equivalente al cerchio GP, è chiaro che la zona sferica nascente dalla rotazione dell'arco dg sarà equivalente all'anello circolare DG, e siccome i meridiani projettati dividono in parti eguali questo anello nello stesso modo che i meridiani della sfera fanno della zona sferica, così le aliquote simili di quelle due grandezze equivalenti saranno equivalenti, cioè i quadrilateri componenti la rete geografica sulla sfera conserveranno la loro estensione superficiale nel disegno.

§. 46. Volendo nell'eseguire la projezione del mappamondo evitare, per maggiore esattezza, le costruzioni geometriche preparatorie, sarà facile calcolare i valori numerici dei raggi dei paralleli e determinarli graficamente per mezzo di una scala. Stabilita la lunghezza del raggio R del mappamondo, si calcolerà il raggio terrestre con la formola $r=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$; e siccome i raggi dei paralleli projettati corrispondono alle corde de' complementi delle loro latitudini, ed ogni corda eguaglia il doppio seno della metà dell'arco, così, chiamando L la latitudine di un parallelo qualunque, e ρ il raggio del parallelo projettato, il valore di questo raggio in parti del raggio r, o del raggio R, sarà evidentemente espresso dalla formola,

$$\rho=2r\,\text{sen}(45^\circ-\tfrac{1}{2}L)=R\sqrt{2}\,\text{sen}(45^\circ-\tfrac{1}{2}L).$$

E ponendo successivamente $L=0^\circ$, 10, 20°, 23°. 28′, 30°...... si calcoleranno i raggi di tutti i paralleli del mappamondo.

§. 47. La proprietà dell'equivalenza delle superficie di cui gode la projezione di Lorgna è più speciosa che utile, poichè nell'uso delle carte geografiche poco importa la certezza che le superficie siano sul disegno perfettamente conservate, e vuolsi piuttosto avere un mezzo facile e pronto di apprezzarne il valore in unità quadrate conosciute, come di miglia, di leghe etc. Or la projezione stereografica più di quella di Lorgna si presta alla valutazione approssimata delle superficie mediante la scala de' gradi di meridiano, e non sarà difficile dimostrarlo, accennando nello

stesso tempo perchè le distanze e le configurazioni sono in quella antichissima projezione conservate meglio che in qualunque altra finora usata nella costruzione dei mappamondi.

Un mappamondo, qualunque sia la sua costruzione, non può avere una scala generale appropriata a valutare le varie parti del disegno; perocchè nella projezione sull' equatore, per esempio, [*fig.* 19] dovendo il diametro, *AB* rappresentare la semicirconferenza di un cerchio massimo al pari dell' arco *AEB*, si vede benissimo che le parti interne del disegno debbono essere impicciolite e ristrette rispetto al contorno esterno *AEBQ*, il quale rimane della sua grandezza naturale. Pare dunque che tutta la perfezione che si possa dare ad un mappamondo sia quella di fare che ogni piccola parte del disegno, come un quadrilatero esteso 5 o 10 gradi in longitudine ed altrettanti in latitudine, abbia una scala propria approssimata, per apprezzare le distanze e le superficie; nè a ciò si potrà pervenire se non conservando possibilmente nella projezione le proporzioni esistenti sulla sfera fra i gradi di latitudine e di longitudine. Ed in fatti, se il raggio *EC* che rappresenta un quadrante di meridiano si dividesse in 9 parti eguali, come il quadrante *EA* dell' equatore, e con questa legge si descrivessero i paralleli, l' ultimo quadrilatero esterno *Emns*, avrebbe i lati *Em*,*Es* nel rapporto di 3 : 2, mentre questi lati dovrebbero essere eguali perchè dinotanti ambedue 10 gradi di cerchio massimo. In tal caso, come valutare le distanze de' luoghi compresi nel quadrilatero *Emns*? Si sceglierebbe la scala *Es* oppure la *Em*, che essendo in lunghezza differentissime rappresentano ciascuna 600 miglia italiane? Al contrario se il raggio *CQ* si dividerà in parti disuguali ma crescenti dal centro alla circonferenza, come nella projezione stereografica, l' ultimo quadrilatero *Qabd* avrà i lati *Qa*,*Qd* presso a poco eguali come sulla sfera, e le distanze e le superficie delle regioni in esso comprese potranno esser con sufficiente approssimazione valutate per mezzo de' gradi di meridiano ossia delle parti del lato *aQ*. Ognun vede che se per ciascun quadrilatero interno si conservasse fra i gradi di meridiano e quelli di parallelo il rapporto del raggio al coseno della latitudine esistente sulla sfera, le distanze e le superficie potrebbero sempre valutarsi mediante i gradi di meridiano appartenenti al quadrilatero stesso, come si valutano sulla superficie sferica. Ciò si verifica con sufficiente approssimazione nella projezione stereografica, e da quanto si è detto chiaramente appare che non può avverarsi per quelle projezioni nelle quali i cerchi massimi interni sono divisi in parti eguali, e molto meno per quelle in cui la divisione si fa in parti disuguali decrescenti dall' interno all' esterno, come la projezione di Lorgna e più di ogni altra la projezione ortografica. Per la medesima ragione tutte queste projezioni alterano grandemente le configurazioni, che si veggono mirabilmente conservate dalla sola projezione stereografica. Onde avvalorare mag-

giormente la nostra opinione in proposito, abbiamo calcolato, per la projezione stereografica, per la projezione di Lorgna e per la ortografica sull' equatore, il rapporto dell' arco di parallelo medio di ciascun quadrilatero della rete geografica descritta da 10 in 10 gradi all' arco corrispondente di meridiano, ed i risultamenti de' calcoli registrati nella seguente tavoletta, e posti a confronto de' rapporti esistenti sulla sfera, mostrano il pregio della projezione stereografica e l' imperfezione delle altre due.

Rapporto dell' arco di parallelo medio di ciascun quadrilatero della rete geografica descritta da 10 in 10 gradi all' arco corrispondente di meridiano.

Nella projezione stereografica.	Nella projezione di *Lorgna*.	Nella projezione ortografica.	Sulla sfera.
0,997	1,832	11,401	0,996
0,967	1,534	3,723	0,966
0,907	1,273	2,139	0,906
0,820	1,040	1,425	0,819
0,708	0,828	0,997	0,707
0,574	0,630	0,698	0,574
0,423	0,443	0,465	0,423
0,259	0,263	0,267	0,259
0,087	0,087	0,087	0,087

§. 48. Affinchè in tutta l' estensione di un quadrilatero si possa far uso della scala de' gradi di meridiano, questi si debbono supporre tutti eguali fra loro, e con ciò gli archi dei paralleli che di grado in grado potrebbero condursi nell' interno del quadrilatero risulterebbero equidistanti, nella projezione sull' equatore. Quindi è che nel calcolare la tavoletta precedente, si è preso per parallelo medio di ogni quadrilatero quello il cui raggio è medio aritmetico de' raggi de' paralleli estremi. L' espressione generale di un tal raggio, chiamando L, L' le latitudini de' paralleli estremi, e supponendo il raggio della sfera $=1$, è

per la projezione stereografica

sull' equatore. . . . . . . $\dfrac{\tan\frac{1}{2}(90^\circ - L) + \tan\frac{1}{2}(90^\circ - L')}{2}$

per la projezione di Lorgna

sull' equatore. . . . . . . $\dfrac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(90^\circ - L) + 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(90^\circ - L')}{2}$

per la projezione ortografica

sull' equatore . . . . $\dfrac{\cos L + \cos L'}{2}$;

e si otterrà la lunghezza dell' arco di 10° della corrispondente circonferenza moltiplicando ciascuno di questi raggi per $\frac{10\pi}{180}$, ossia per $\frac{\pi}{18}$. Inoltre, la lunghezza di dieci gradi di meridiano risulta in ciascuna delle projezioni dalla differenza de' raggi de' paralleli estremi di ogni quadrilatero, onde ha per espressione,

nella projezione stereografica... $\tan\frac{1}{2}(90^\circ-L)-\tan\frac{1}{2}(90^\circ-L')$
nella projezione di Lorgna... $2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(90^\circ-L)-2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(90^\circ-L')$
nella projezione ortografica.......... $\cos L-\cos L'$.

Dunque il rapporto dell' arco di parallelo medio all' arco di meridiano sarà espresso nella projezione stereografica da $\frac{\{\tan\frac{1}{2}(90^\circ-L)+\tan\frac{1}{2}(90^\circ-L')\}\pi}{2.18\{\tan\frac{1}{2}(90^\circ-L)-\tan\frac{1}{2}(90-L')\}}$; e poichè in generale $\frac{\tan a+\tan b}{\tan a-\tan b}=\frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}(a-b)}$ (I. §. 3), l'espressione dell' enunciato rapporto si cambierà subito in $\frac{\pi\cos\frac{1}{2}(L'+L)}{36\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(L'-L)}$. Analogamente, lo stesso rapporto nella projezione di Lorgna sarà espresso da $\frac{\pi\tan\{45^\circ-\frac{1}{4}(L'+L)\}}{36\tan\frac{1}{4}(L'-L)}$, e nella projezione ortografica da $\frac{\pi}{36}\cot\frac{1}{2}(L'+L)\cot\frac{1}{2}(L'-L)$. Sulla sfera il rapporto sarà $\cos\frac{1}{2}(L'+L)$: 1, ovvero $\cos\frac{1}{2}(L'+L)$. Queste formole hanno servito a calcolare la tavoletta precedente.

Dalla formola dinotante il rapporto nella projezione stereografica si vede che esso è uguale a quello sulla sfera moltiplicato per la frazione $\frac{\frac{1}{36}\pi}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(L'-L)}$. Or nella rete descritta da 10 in 10 gradi essendo $\frac{1}{2}(L'-L)$ costante ed eguale a 5 gradi, la frazione moltiplicatrice non è altra cosa che $\frac{\text{arco}\,5^\circ}{\text{seno}\,5^\circ}$; la quale frazione è vicinissima all' unità, e da ciò nasce che i rapporti fra gli archi di meridiano e di parallelo nella projezione in discorso pochissimo differiscono da quelli della sfera. È chiaro che se la rete geografica si costruisse da 5 in 5 gradi la frazione precedente diverrebbe $\frac{\text{arco}\,2^\circ.30'}{\text{seno}\,2^\circ.30'}$, che differirebbe anche meno dall' unità, o però più esatti risulterebbero i rapporti indicati nella projezione stereografica.

Della projezione di de la Hire *e di quella di* Arrowismith.

§. 49. Nella projezione stereografica e nella ortografica i cerchi massimi interni del mappamondo sono divisi in parti disuguali, con la differenza che nella prima queste parti crescono dall'interno all'esterno, e nella seconda decrescono rapidamente. Senza esaminare attentamente quali di questi due metodi dovesse considerarsi difettoso, si credette dai signori *de la Hire* ed *Arrowismith*, che in generale la divisione in parti disuguali fosse una delle maggiori imperfezioni di quelle projezioni, e ad evitare questo inconveniente fu immaginata dal primo una projezione sull'equatore, e dal secondo una projezione sul meridiano, nelle quali la graduazione de' cerchi massimi interni si fa in parti eguali.

§. 50. Il signor de la Hire, non volendo allontanarsi dai principii di prospettiva, osservò che, se in vece di supporre l'occhio situato in un polo terrestre, come nella projezione stereografica sull'equatore, si fosse immaginato sul prolungamento dell'asse terrestre ad una distanza dalla superficie sferica eguale al seno di 45 gradi, la divisione de' meridiani del mappamondo risultava quasi come se fosse eseguita in parti eguali. Di fatti, suppongasi l'occhio situato in O (*fig.* 20) di modo che la sua distanza $P'O$ dal polo sia eguale ad FG, essendo G il punto di mezzo del quadrante PQ; condotto il raggio visuale GO, sarà g la prospettiva sull'equatore del punto G, e facilmente si dimostra che, come G è il punto medio del quarto di meridiano PQ, così g è il punto di mezzo della retta CQ projezione di quel quadrante. Posto il raggio della sfera eguale all'unità, sarà $FG = CF = \text{sen}\, 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, e quindi $FO = FC + CP' + P'O = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 1 + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; ma pei triangoli simili OCg, OFG si ha $OF : FG :: OC : Cg$, ovvero $1 + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{2}} :: 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}} : Cg$, dunque

$$Cg = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})}{1 + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}}{2(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2})} = \tfrac{1}{2}.$$ Dal che si conchiude che il punto g è nel mezzo del raggio CQ. Or se il punto di mezzo del quadrante PQ è projettato nel mezzo del raggio CQ, è chiaro che i varii punti H della graduazione del meridiano saranno projettati in modo che il raggio stesso non risulterà diviso in parti molto disuguali. Per tal modo il signor de la Hire, modificando la posizione dell'occhio nella prospettiva dell'emisfero conseguì lo scopo che si era proposto.

§. 51. Non così il sig. Arrowismith, che pervenne al suo intento con una costruzione arbitraria alla quale diede per convenzione il voluto pregio che mancava alla projezione stereografica. Ecco in che consiste la costruzione. Si divide in nove parti eguali ciascun quadrante del cerchio $EPQP'$, dinotante il primo meridiano [*fig.* 21], e ciascuno de' raggi EC, CQ, CP, CP' indi-

canti un quadrante dell' equatore o del meridiano perpendicolare al primo. Ciò fatto, ogni parallelo projettato sarà un cerchio il quale passa per tre punti di divisione che si corrispondono, come a,b,a'; ed ogni meridiano sarà parimente un cerchio che passa pei poli e per un punto di divisione dell' equatore, come PmP'.

Fu molto lodata questa costruzione per la sua semplicità, ma essa, per poco che si rifletta, deve cedere anche in questa parte alla projezione stereografica. E per verità la costruzione dei paralleli in quest' ultima projezione si riduce pure a far passare un cerchio per tre punti a,b,a', ed il terzo punto b si assegna con eguale o maggior facilità che nella costruzione di Arrowismith, poichè si ottiene unendo il punto a col punto Q; e lo stesso deve dirsi rispetto ai meridiani, se non che i loro centri si possono trovare ancora in modo diverso dall' ordinario, e forse più semplicemente, come è stato da noi a suo luogo indicato. Ma trattandosi poi di descrivere per punti i cerchi di lunghissimo raggio, le formole nella costruzione di Arrowismith sarebbero assai più complicate, che nella projezione cui la paragoniamo, e per darne un cenno basterà trovare l' espressione analitica del raggio di un parallelo. Supposto f il centro di un tal cerchio, ed indicandone il raggio $fd=fg$ con r, il triangolo rettilineo fgC darà l'equazione (I. §. 11) $r^2=gC^2+(r+dC)^2-2\,gC\,(r+dC)\cos gCf$. Ora, prendendo per unità il raggio del mappamondo, sarà $gC=1$, e dC che, secondo la costruzione, rappresenta un dato numero n di none parti del raggio sarà espressa da $\frac{n}{9}$; e riflettendo inoltre che l'angolo gCf è il complemento della latitudine L del parallelo da projettarsi, si avrà $r^2=1+(r+\frac{n}{9})^2-2(r+\frac{n}{9})\operatorname{sen}L$, da cui $0=1+\frac{2n}{9}r+\frac{n^2}{81}-2r\operatorname{sen}L-\frac{2n}{9}\operatorname{sen}L$, onde

$$2(\operatorname{sen}L-\frac{n}{9})r=1-\frac{2n}{9}\operatorname{sen}L+\frac{n^2}{81}=\cos^2 L+\operatorname{sen}^2 L-\frac{2n}{9}\operatorname{sen}L$$
$$+\frac{n^2}{81}=(\operatorname{sen}L-\frac{n}{9})^2+\cos^2 L,$$ e finalmente

$$r=\frac{(\operatorname{sen}L-\frac{n}{9})^2+\cos^2 L}{2(\operatorname{sen}L-\frac{n}{9})}=\tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}L-\frac{n}{9})+\frac{\tfrac{1}{2}\cos^2 L}{\operatorname{sen}L-\frac{n}{9}}.$$

È questa l' espressione più semplice che possa darsi al raggio del parallelo projettato nella costruzione di Arrowismith, ed ognun vede quanto calcolo esige in paragone del valore $r=\cot L$ che ha quel raggio nella projezione stereografica sul meridiano.

§. 52. Dalla discussione fatta di sopra parlandosi della projezione di Lorgna risulta che la divisione dei cerchi massimi interni del mappamondo non solo non deve farsi in parti eguali, ma deve crescere dall' interno all' esterno con la legge della projezione stereografica. E quantunque eseguendo questa projezione sul primo meridiano, gli archi di meridiano di uno stesso quadrilatero della rete non siano eguali fra loro come nella projezione sull' equatore, pure un tal difetto, comune a tutte le projezioni sul meridiano, non toglie alla projezione stereografica il pregio di mantenere con molta approssimazione in ogni quadrilatero il rapporto del raggio al coseno della latitudine fra gli archi di meridiano e quelli di parallelo. I signori de la Hire ed Arrowismith fondarono dunque le loro projezioni sopra un cattivo calcolo intorno alle migliori condizioni del mappamondo, ed il signor Arrowismith non diede che una costruzione puramente convenzionale. Nondimeno questa costruzione è stata in gran voga per qualche tempo, e se ne fa uso ancora in Inghilterra.

CAPO SECONDO

Carte generali e carte corografiche.

Della projezione di Flamsteed.

§. 53. L'astronomo inglese *Flamsteed* immaginò nel suo atlante celeste una projezione, o piuttosto una costruzione semplicissima, il cui scopo principale è di mantenere sulla carta il rapporto sussistente sulla sfera fra i gradi di cerchio massimo ed i gradi di parallelo; ecco in che consiste.

Rappresenti $ABCD$ [*fig.* 22] il foglio del disegno, e nel mezzo di esso si conduca la retta MN perpendicolare ai due lati opposti AB,DC del rettangolo. Sulla MN si prendano le parti uguali ab,bc,cd, etc. che indicheranno i gradi di meridiano, ed alle quali si darà la grandezza conveniente alla estensione che deve avere la carta. Per i punti a,b,c,d etc. si conducano le rette EaF, GbH,KcL etc. parallele ai lati AB,CD del rettangolo, ed esse rappresenteranno i cerchi paralleli all' equatore. Stabilita così la graduazione $abcd$... in latitudine, a partire dal mezzo della carta, si taglieranno sopra ciascun parallelo le parti eguali am, mn,np...; $bm',m'n'$...; $cm'',m''n''$... a destra ed a sinistra del meridiano di mezzo MN, e la grandezza di tali parti si regolerà in modo che ciascuna serbi al grado ab di meridiano il rapporto del coseno della latitudine al raggio, come sulla sfera. Supponendo,

per esempio, che la retta EF rappresenti il parallelo di 30° di latitudine, per determinare am dovrà farsi la proporzione

$$1 : \cos 30^\circ :: ab : am = ab \cos 30^\circ.$$

Similmente sarà $bm' = ab \cos 31^\circ, cm'' = ab \cos 32^\circ$ etc. Dopo aver diviso a questo modo ciascun parallelo, si uniranno per mezzo di linee rette i punti di divisione aventi la stessa longitudine, e le linee risultanti $mm'm''\ldots$, $nn'n''\ldots$, $pp'p''\ldots$, rappresenteranno i meridiani della carta. Se l'unione dei punti $m, m', m''\ldots$ ovvero $n, n', n''\ldots$ etc., in vece di una curva continuata presentasse all'occhio un poligono, si eviterà questo inconveniente con ravvicinare i punti da unirsi fra loro per mezzo di linee rette, aumentando il numero dei paralleli, o pure quando non si richiegga molta esattezza, si uniranno fra loro i punti con una riga leggermente ricurva, e tale che su di essa possano sempre collocarsi almeno tre punti.

Il miglior modo di eseguire la projezione è quello di far uso di una scala geometrica e delle tavole logaritmiche. Dopo aver assegnata la lunghezza del grado ab di meridiano, che sarà per esempio, di $15^{mp}(27^{mm},78)$ (*) si moltiplicherà questo numero successivamente per $\cos 30^\circ, \cos 31^\circ, \cos 32^\circ$ etc., presi nelle tavole, e si otterranno così le lunghezze de' gradi di parallelo in parti del *passo*.

* §. 54. È utile ancora che la scala del disegno non sia arbitraria ma abbia un dato rapporto al terreno. Questo rapporto sarà determinato paragonando l'effettiva estensione del foglio del disegno in lunghezza ed in larghezza, con l'estensione in gradi di longitudine e latitudine che deve avere la carta. Per fissare le idee ne daremo un esempio sulla *fig.* 22. Il lato DC del rettangolo DB, che rappresenta il foglio del disegno, valutato con la scala del *passo* diviso in parti decimali, si trova essere lungo $40^{mp}(74^{mm},08)$, ed il lato BC $30^{mp}(55^{mm},56)$; d'altra parte supponiamo che la carta da projettarsi debba contenere 15 gradi di longitudine sul parallelo inferiore di 30°, e 7°. 30′ di latitudine, e però il lato DC dovrà rappresentare 15° di longitudine alla indicata latitudine di 30°, ed il lato BC gradi $7\frac{1}{2}$ di latitudine. Ora, ogni grado di latitudine essendo lungo 60 miglia, ed ogni miglio 1000 passi, $7^\circ\frac{1}{2}$ di latitudine equivarranno a passi $60 \times 1000 \times 7,5 = 450000$; e poichè questa lunghezza deve esser rappresentata in piccolo sulla carta da 30^{mp}, il rapporto della carta al terreno, relativamente all'altezza del rettangolo, sarà quello dei numeri 30:450000000 ovvero di 1:15000000. Relativamente alla lunghezza del rettangolo, 15 gradi di meridiano essendo eguali a $15 \times 60 \times 1000 = 900000$ passi, 15 gradi del parallelo di 30 gradi di lati-

(*) Indichiamo con mp, i millesimi di *passo* e con mm i *millimetri*.

tudine equivarranno a $900000 \times \cos 30° = 779423$ *passi*. Ma questa lunghezza deve esser rappresentata sulla carta da 40^{mp}, dunque il rapporto del disegno al terreno, rispetto alla lunghezza del foglio, è di 40 : 779423000 ovvero di 1 : 19485575. È chiaro che dei due rapporti così ottenuti bisognerà adottare il più piccolo, altrimenti la carta non potrebbe avere l' estensione designata in latitudine o in longitudine; così nel caso nostro se si adottasse il rapporto trovato per l' altezza del rettangolo, la lunghezza non potrebbe contenere 15 gradi di longitudine, ma adottando il rapporto minore relativo alla lunghezza, l' altezza conterrà i gradi $7\frac{1}{2}$ di latitudine stabiliti, ed anche più. Il rapporto della carta al terreno sarà dunque $\frac{1}{19485575}$, che per semplicità di calcolo si ridurrà ad $\frac{1}{19500000}$.

* §. 55. Trovato il rapporto del disegno al terreno, o come suol dirsi, *la scala della carta*, per eseguire la graduazione in latitudine, si valuterà la lunghezza di un grado di meridiano alla scala adottata; al quale oggetto, ricordandosi che un grado vale $60 \times 1000 = 60000$ *passi*, si dividerà questo numero pel denominatore della scala 19500000, e si avrà $0^{p},003077 = 3^{mp},077$ E per eseguire la graduazione in longitudine si moltiplicherà successivamente il valore del grado di latitudine $3^{mp},077$ per cos 30°, cos 31°, cos 32° etc., come si è detto di sopra. Il grado del parallelo di 30° di latitudine risulterà eguale a $2^{mp},665$, onde 15 di questi gradi, quanti ne deve contenere il quadro del disegno nella sua lunghezza, occuperanno uno spazio di $39^{mp},97$, cioè quasi l' intera lunghezza della carta; ma il lato verticale del rettangolo in vece di contenere 7°. 30′ di latitudine, come era strettamente richiesto, ne conterrà quasi 10°, poichè dieci gradi formano una lunghezza di $30^{mp},77$, e quel lato è di 30^{mp}. Per segnare con esattezza sul meridiano medio e su i paralleli, i punti pei quali devono passare i paralleli ed i meridiani della carta, si avverte che non bisogna prendere sulla scala geometrica il valore di un solo grado ed andarlo ripetendo o sul meridiano o su i paralleli, perchè un errore anche tenuissimo di cui potesse essere affetta quella piccola misura, ripetuto più volte diverrebbe sensibile; ma si dovrà al contrario prendere sulla scala una lunghezza equivalente a molti gradi, ed ottenere la lunghezza di un sol grado con la divisione di quella retta in parti eguali eseguita col compasso. Così nell' esempio proposto, per la graduazione in latitudine si prenderà sulla scala la lunghezza di $24^{mp},62$ equivalente ad 8 gradi, e si otterrà la lunghezza di un grado dividendo quella retta in otto parti eguali; e lo stesso si farà per la graduazione in longitudine, portando sopra ciascun parallelo, a destra ed a sinistra del meridiano medio, una lunghezza corrispondente ad 8 gradi e dividendola in parti eguali col compasso. Questa avvertenza è generalmente necessaria per tutte le costru-

zioni grafiche, nelle quali *bisogna sempre dalle misure grandi dedurre le piccole, e non mai dalle piccole le grandi.*

§. 56. Chi non avesse l'abitudine di maneggiare le tavole logaritmiche potrà, quantunque con minore esattezza, eseguire la costruzione di Flamsteed nel modo seguente. Dopo aver segnato il meridiano medio *MN*, si dividerà questa retta in tante parti eguali quanti gradi di latitudine deve contenere la carta, il quale numero di gradi sarà stabilito incaricandosi anche prudenzialmente della estensione che deve avere la carta in longitudine. Dopo di ciò con un raggio eguale a 6, o pure ad 8, di quelle parti eguali si descriverà un quadrante *POQ*, ed al centro di esso si costruiranno gli angoli *ROQ,SOQ,TOQ* etc., di 30°,31°,32° etc., corrispondenti alle latitudini dei paralleli della carta, cominciando dalla minima. Dai punti *R,S,T* etc., abbassando le perpendicolari *Rr,Ss,Tt* si avranno sulla retta *OQ* i punti *r,s,t* etc., che determineranno le lunghezze *Or,Os,Ot* indicanti rispettivamente 6 o pure 8 gradi di longitudine alle latitudini di 30°,31°,32°... In fatti nei triangoli rettangoli *ROQ,SOQ,TOQ*... i rapporti delle ipotenuse *OR,OS,OT*... ai cateti *Or,Os,Ot*... sono quelli del raggio delle tavole ai coseni degli angoli rispettivi *ROQ,SOQ, TOQ*...; e però se ciascuna delle ipotenuse rappresenta 8 gradi di meridiano, il cateto corrispondente, dovrà rappresentare 8 gradi di parallelo alla latitudine indicata dall'angolo obliquo. Le lunghezze *Or,Os,Ot*... riportate su i paralleli *EF,GH,KL* etc., a destra ed a sinistra del meridiano medio, si divideranno in 6, o pure in 8 parti eguali, ed indi si compirà la graduazione in longitudine e la rete geografica nel modo esposto di sopra.

§. 57. Per segnare sulla carta un punto di data latitudine e longitudine, si sceglierà prima di tutto il quadrilatero della rete in cui deve cadere, mediante i numeri apposti nel margine. Così supponendo che la latitudine del punto proposto sia 34°.45′, e la longitudine 10°.20′, il punto caderà nel quadrilatero *efgh*. Dopo di ciò si prenderanno su i lati opposti del quadrilatero le parti proporzionali alle date frazioni di latitudine e di longitudine, come 45′ e 20′, ed uniti per mezzo di due rette i punti determinati a questo modo ne' lati opposti del quadrilatero, l'incontro di esse indicherà la posizione del punto. Nell'esempio proposto, siccome 45′ e 20′ esprimono $\frac{3}{4}$ ed $\frac{1}{3}$ di grado, si prenderanno $ek=\frac{1}{3}ef, hk'=\frac{1}{3}hg, hl=\frac{3}{4}he, gl'=\frac{3}{4}fg$; ed unite le rette *ll′,kk′* il loro incontro *o* darà il punto cercato. Questo metodo grafico di determinare la posizione di un dato punto si può applicare a qualunque projezione, e quantunque non sia rigoroso, è quasi sempre abbastanza esatto, e tanto più quanto più piccoli sono i quadrilateri della rete geografica. Nella projezione attuale per determinare il punto *o* con tutta la precisione bisognerebbe riferirlo al meridiano rettilineo *MN*, prendendo su di esso una parte *xy*

eguale alla data frazione di grado, conducendo pel punto x un parallelo ox, e determinando la lunghezza dell'arco ox mediante la sua ampiezza conosciuta e la latitudine del punto x; così la longitudine del meridiano medio essendo 15°, l'ampiezza dell'arco ox sarà $15° - 10°.20' = 4°.40'$, e poichè un grado di parallelo a 34°.45' di latitudine vale, (sulla *fig.* 22), $3^{mr},077 \cos 34°.45'$, la lunghezza dell'arco ox sarà espressa da $4\frac{2}{3} \times 3^{mr},077 \cos 34°.45'$.
Quanto precede si applica facilmente ai diversi casi in cui la rete geografica in vece di costruirsi da grado in grado dovesse costruirsi da 2 in 2 gradi o da 5 in 5 gradi, o pure da 30 in 30 minuti, o da 20 in 20 minuti etc., secondo che la carta dovrà rappresentare una maggiore o una minor porzione della superficie terrestre.

§. 58. La projezione di Flamsteed ha evidentemente il difetto di alterare sensibilmente gli angoli dei quadrilateri verso l'estremità del disegno, poichè essi divengono obliqui, laddove sulla superficie sferica sono retti; quest'alterazione ne produce un'altra rispetto alla lunghezza dei gradi di meridiano, i quali trovandosi verso i lembi del quadro disposti obliquamente fra i paralleli, acquistano una estensione maggiore di quella assegnata ad essi sul meridiano rettilineo dipendentemente dalle misure terrestri. Le superficie sono sufficientemente conservate, perchè i trapezi della rete hanno l'altezza ed i lati paralleli eguali ai corrispondenti lati dei quadrilateri sferici, sviluppati in linee rette.

Dello sviluppo conico.

§. 59. Prima di esporre la teoria dello sviluppo conico applicato alle projezioni delle carte, sarà bene ricordare brevemente il principio sul quale si fonda lo sviluppo della superficie di un cono retto sopra un piano. Consideriamo il cono OMN [*fig.* 23] della cui superficie voglia svilupparsi la porzione OMH racchiusa fra i lati OM, OH e l'arco MH. Una tal porzione spiegata sul piano si cambierà in un settore circolare di raggio OM: e rappresentando quel settore con $O'M'H'$, esso sarà interamente determinato quante volte si conosca l'ampiezza dell'angolo $M'O'H'$, ossia il numero dei gradi che contiene, dipendentemente dalla condizione che l'arco $M'H'$ deve essere eguale in lunghezza all'arco MH, come è chiaro per lo sviluppo. Ora, indicando con l il lato $MO = M'O'$ del cono, e con r il raggio GM della base, le semicirconferenze dei cerchi descritti con questi raggi saranno $\pi l, \pi r$, e le lunghezze di un grado di tali circonferenze verranno espresse da $\frac{\pi l}{180}, \frac{\pi r}{180}$: per conseguenza, se chiameremo p, x le ampiezze degli angoli $MGH, M'O'H'$, o degli archi corrispondenti $MH, M'H'$, le lunghezze di questi ultimi saranno espresse da $p.\frac{\pi r}{180}$, $x.\frac{\pi l}{180}$, le

quali dovranno eguagliarsi per adempire alla condizione dello sviluppo, e si avrà,

$$p\cdot\frac{\pi r}{180}=x\cdot\frac{\pi l}{180}, \text{ ovvero } pr=xl, l:r::p:x;$$

cioè *le ampiezze degli angoli sono in ragione inversa dei raggi.* Dalla quale proporzione si ottiene l'angolo dello sviluppo

$$M'O'H'=\frac{r}{l}\cdot p=\frac{r}{l}MGH.$$

§. 60. Ciò premesso, sia EPQ la sfera terrestre [*fig.* 24], e debba rappresentarsi sopra un piano la porzione di zona sferica $abcd$ racchiusa fra i due paralleli ab,cd e i due meridiani Pc,Pd. Non potendo la superficie $abcd$ svilupparsi, si pone in suo luogo la $a'b'c'd'$ appartenente ad un cono retto che ha il suo asse OC nel prolungamento dell'asse terrestre, e tocca la sfera nel parallelo MN che passa pel punto di mezzo dell'arco ac, indicante l'estensione in latitudine della porzione di zona sferica da rappresentarsi. Le due superficie poco differendo una dell'altra, se si svilupperà la parte di superficie, conica $a'b'c'd$, rimarrà con sufficiente approssimazione rappresentata la porzione di superficie sferica $abcd$.

Chiamiamo λ la latitudine EM del parallelo medio MN della carta $abcd$, supponiamo il raggio della sfera eguale all'unità, ed indichiamo con p l'ampiezza dell'arco MH che rappresenta l'estensione della carta in longitudine, giacchè contiene lo stesso numero di gradi dell'arco EK dell'equatore e dell'angolo al polo EPK. Il cono al quale appartiene la superficie da svilupparsi può supporsi quello che ha OM per lato, ed il parallelo MN per base; ed applicando il principio di sopra esposto, si troverà l'angolo dello sviluppo della porzione MOH della superficie conica mediante la proporzione, $MO:MG::MGH:x$.

Ma $MO=\tan MP=\tan(90^\circ-\lambda)=\cot\lambda$, $MG=\cos\lambda$, $MGH=p$, dunque $\cot\lambda:\cos\lambda::p:x=\frac{p\cos\lambda}{\cot\lambda}=p\,\text{sen}\,\lambda$. Determinato a questo modo l'angolo dello sviluppo, si procederà alla costruzione della rete geógrafica.

§. 61. Sia $ABCD$ [*fig.* 25] il foglio del disegno e si divida questo rettangolo per metà con la retta TR che rappresenterà il meridiano di mezzo della carta. [Vedi *fig.* 24]. Su questo meridiano si taglino le parti eguali $Ta,ab,bc,cF\ldots$ dinotanti i gradi di latitudine, ai quali si darà una lunghezza conveniente alla estensione che deve avere la carta. Si prolunghi la retta TR indefinitamente verso O, e partendo dal punto F, situato presso a poco nel centro del rettangolo, si tagli la retta $FO=\cot\lambda$. La lunghezza di questa retta dovrà porsi in esatta relazione con quella dei gradi $Ta,ab\ldots$ già assegnata, secondo il rispettivo significato di tali

quantità. Perciò, chiamando g la lunghezza di un grado Ta, la semicirconferenza corrispondente sarà $180.g$; e poichè indicando con r il raggio del cerchio, la stessa semicirconferenza è espressa da πr, si avrà $\pi r=180.g$, ed $r=\frac{180.g}{\pi}$. Così si troverà il raggio del meridiano ossia il raggio terrestre; ma la retta FO dinota la cotangente della latitudine media λ, nell'ipotesi del raggio eguale all'unità, dunque pel raggio eguale ad r si avrà $FO=r\cot\lambda=\frac{180g\cot\lambda}{\pi}$. Dimodochè, se il grado Ta conterrà un certo numero di parti di una data scala, per esempio $0^{pas},0075\,(0^{m},01389)$, si avrà $FO=\frac{180\times0,0075\cot\lambda}{3,14159}$, e fatto il calcolo per $\lambda=40^{\circ}$, risulterà $FO=0^{pas},51212\,(0^{met},94845)$.

Col centro O e col raggio OF si descriva il parallelo medio MH, ed al punto O si costruiscano i due angoli eguali MOF,FOH ciascuno dei quali abbia per valore $\frac{1}{2}p\,\text{sen}\lambda$, affinchè tutto l'angolo MOH corrisponda all'angolo $p\,\text{sen}\lambda$ dello sviluppo, calcolato di sopra, e rimanga simmetricamente disposto rispetto alla linea di mezzo del rettangolo. Secondo il principio dello sviluppo conico l'arco MH eguaglierà in lunghezza il corrispondente arco MH del parallelo medio della sfera [*fig.* 24, 25], e diviso in un numero p di parti eguali, quanti sono i gradi che si contano in quest'ultimo, ciascuna di quelle parti uguaglierà pure in lunghezza un grado dello stesso parallelo medio terrestre. Col centro O e coi raggi $Oa,Ob,Oc...$ si descrivano tutti gli altri paralleli della carta, ed unito il punto O coi punti $m,n,p...$ di divisione dell'arco MH, e con gli altri $q,r...$ assegnati a distanze eguali alle $Fm,mn...$ sui prolungamenti dell'arco medesimo, rimarranno descritti anche i meridiani; e sarà compiuta la rete geografica se si estenderanno i meridiani ed i paralleli sino ad incontrare i lati del rettangolo.

§. 62. Per costruire gli angoli MOF,FOH con esattezza non si dovrà far uso del semicerchio da tavolino, ma si assegnerà la posizione dei punti M,H calcolando e valutando graficamente le corde degli archi eguali FM,FH. Per esempio, supponendo $p=8$ gradi, sarà $MOF=4^{\circ}\times\text{sen}\lambda$, ovvero nel caso di $\lambda=40^{\circ}$, $MOF=4^{\circ}.\text{sen}40^{\circ}=2^{\circ},57115=2^{\circ}.34'.16'',1$; e poichè la corda di un arco è uguale al doppio seno della metà dell'angolo corrispondente, nell'ipotesi fatta di sopra del raggio $FO=0^{pas},51212$ sarà la corda $MF=2\,\text{sen}\,1^{\circ}.17'.8''\times0,51212$, ed eseguito il calcolo si ottiene, *corda* $MF=0^{pas},022979$.

Quando i gradi, o le parti di grado Fm,mn etc., sono così piccole che non v'ha differenza sensibile fra la corda e l'arco, si può risparmiare la costruzione degli angoli MOF,FOH, poichè

allora la graduazione del parallelo medio si eseguirà mettendo in giusta relazione la lunghezza dei gradi di questo cerchio con quella dei gradi di meridiano già assegnata. Così nell'esempio proposto, la lunghezza di tutto l'arco *MH*, ossia di 8 gradi del parallelo medio, che rimane inalterato nella projezione, dovrà serbare alla lunghezza *TK* di 8 gradi del meridiano il rapporto di $\cos\lambda : 1$, come sulla sfera, cioè si avrà

$$\textit{arco MH rettificato} : 8 \times 0^{pas},0075 :: \cos 40^\circ : 1, \text{ e quindi}$$
$$\textit{arco } MH = 8^\circ \textit{ di paral. medio} = 8 \times 0,0075 \cos 40^\circ = 0^{pas},045963.$$

Assegnata questa lunghezza in linea retta, si dividerà in 8 parti eguali, ciascuna delle quali rappresenterà la lunghezza di un grado del parallelo medio, e si potrà, partendo dal punto *F*, riportare e ripetere a destra ed a sinistra sul parallelo *MH*, già descritto. Si vede che se gli archi *Fm*,*mn*... non sono così piccoli da potersi confondere con le loro corde, i punti *m*,*n*... risultano con questa costruzione troppo distanti fra loro, perchè in vece d'interporsi fra punto e punto la distanza della corda si è interposta la distanza dell'arco.

* §. 63. Si potrebbe anche rimediare a questo inconveniente moltiplicando il valore di *MH* pel rapporto della corda di una delle parti in cui deve esser diviso, all'arco corrispondente, il quale rapporto si trova nelle tavole trigonometriche prendendo quello del seno dell'arco metà all'arco stesso; ed il suo logaritmo per un grado è 4,6855694 in corrispondenza dell'arco di 30′. Ma questi logaritmi delle tavole suppongono l'arco espresso in secondi, onde per ridurre il rapporto a numero astratto, come occorre nel nostro caso, si dovrà aggiunger loro il logaritmo di R'', e per l'arco di un grado si avrà 9,9999945. Quindi nell'esempio precedente in vece della lunghezza dell'arco *MH* si troverebbe quella di otto volte la corda dell'arco di un grado del parallelo medio, aggiungendo al logaritmo di $8 \times 0,0075 \cos 40^\circ$ il precedente 9,9999945; la lunghezza così determinata sarebbe $0^{pas},045962$, cioè non differirebbe fisicamente da quella assegnata di sopra.

*§. 64. Queste costruzioni saranno con maggior facilità e con migliore ordine eseguite se si determinerà prima di tutto la scala della carta, specialmente quando, per la lunghezza dei raggi, i paralleli dovranno essere descritti per punti nel modo che sarà appresso indicato. Si è già veduto come si trova la scala della carta trattandosi della projezione di Flamsteed, ma ciò che ivi si è detto ha bisogno, per lo sviluppo conico, di qualche modificazione relativamente al dedurre la scala dalla lunghezza del rettangolo. Supponendo che il parallelo infimo *SL* della carta debba estendersi per 8 gradi, come sulla figura 25, si dovrà trovare la corda dell'arco *SKL* appartenente al cerchio che ha per raggio *KO*, e paragonarla alla lunghezza *DC* del rettangolo. A tal fine si rifletterà che $FO = r\cot\lambda$, ed essendo il raggio terrestre al naturale di 3438

miglia ed il grado di meridiano di **60** miglia, sarà $FO = 3438 \cot 40^\circ = 4097{,}2$ *miglia*; e quindi $OK = OF + FK = 4097{,}2 + 4Fe = 4097{,}2 + 4 \,.\, 60 = 4337$, 2 *miglia* $= 4337{,}2 \times 1000 = 4337200$ passi. Con questo raggio si valuterà la corda dell' arco SKL, la cui ampiezza essendo di 8 gradi sulla sfera, nello sviluppo si riduce ad $8^\circ \operatorname{sen} \lambda = 8^\circ \operatorname{sen} 40^\circ = 5^\circ.\, 8'.\, 32'',3$ come sopra; e si avrà la retta $SL = 2OK \operatorname{sen} \dfrac{5^\circ.\, 8'.\, 32''}{2} = 8674400 \times \operatorname{sen} 2^\circ.\, 34'.\, 16'' = 389127$ passi. Paragonando infine questo numero con l' effettiva lunghezza del lato DC del rettangolo in passi, che supporremo essere di $0^{pas},49$ si conchiuderà che la scala della carta deve essere $\dfrac{0{,}49}{389127} = \dfrac{1}{794000}$ circa. Questo rapporto, nella ricerca del quale non si richiede grande esattezza, avrebbe potuto dedursi più facilmente valutando in vece della corda SL la lunghezza dell' arco SKL quale è sulla sfera. E poichè 8 gradi di meridiano equivalgono a 480 miglia, gli otto gradi del parallelo SL, la cui latitudine è di 36°, se quella del parallelo medio si suppone di 40°, si calcoleranno moltiplicando 480 miglia ovvero 480000 passi pel coseno di 36°. Il prodotto è di passi 388328 e la scala della carta risulta $\dfrac{0{,}49}{388328} = \dfrac{1}{792000}$, cioè poco diversa dalla precedente, ed esatta quanto basta per regolarsi nella determinazione della scala definitiva. Il quale ultimo procedimento non dovrà però adoperarsi quando l' estensione della carta in longitudine abbraccerà una parte considerabile della superficie terrestre.

Trovata la scala della carta, tutte le lunghezze da calcolarsi si valuteranno prima al naturale, e si divideranno poi pel denominatore della scala. Così, indicando con D questo denominatore, il raggio terrestre che al naturale è 3438 miglia, ossiano 3438×1000 passi, alla scala sarà $\dfrac{3438 \times 1000}{D}$ passi, ed il raggio FO del parallelo medio sarà espresso da $\dfrac{3438 \,.\, 1000 \cot \lambda}{D}$. Similmente 8 gradi di meridiano sono al naturale $8 \times 60 = 480^{miglia} = 480 \times 1000^{pas}$, ed alla scala saranno $\dfrac{480 \times 1000}{D}$ passi.

§. 65. Lo sviluppo conico ha il pregio di conservare ai gradi di meridiano ed agli angoli dei quadrilateri della rete il loro vero valore in tutta l' estensione della carta; ma non avviene così dei gradi di parallelo, i quali hanno il giusto loro valore sul parallelo medio soltanto, e su tutti gli altri sono eccedenti, dimodochè

il rapporto del raggio al coseno fra i gradi di meridiano e quelli di parallelo, in che consiste il principal pregio di qualunque projezione, non si verifica se non sul parallelo medio. Questo difetto dello sviluppo conico di cui è facile persuadersi alla sola ispezione della *fig.* 24, è stato comprovato dal calcolo precedente dell'arco di parallelo *SL* che, considerato nella sua vera lunghezza qual è sulla sfera, è risultato minore della corda del corrispondente arco projettato. È chiaro poi che l'imperfezione di cui si parla sarà tanto più notabile, quanto maggiore è l'estensione della carta in latitudine, poichè allora la superficie del cono si allontana molto dalla sfera verso le estremità della zona da rappresentarsi. Per la qual cosa volendo applicare lo sviluppo conico alla costruzione della carta di un grande stato, si è da alcuni geografi sostituto al cono tangente un cono segante la sfera, e disposto in maniera che il suo lato *mr* [*fig.* 24] internandosi nella massa terrestre dividesse in tre parti eguali l'arco *AB* indicante l'estensione della carta in latitudine. In tal modo il cono avrebbe due paralleli di comune con la sfera, dalla quale poco allontanandosi in fuori o in dentro, gli errori sarebbero più piccoli, ma parte in eccesso e parte in difetto. Noi non ci tratterremo ad esporre i particolari di questa modificazione dello sviluppo conico, per dar luogo alla seguente assai più perfetta ed ora quasi esclusivamente adottata per le carte generali, corografiche, e topografiche.

Dello sviluppo conico modificato.

§. 66. Si è veduto che lo sviluppo conico manca della condizione più importante che deve avere una buona projezione, cioè non conserva in tutti i punti della carta il rapporto del raggio al coseno della latitudine esistente sulla sfera fra i gradi di meridiano e quelli di parallelo. Ma non è difficile aggiungere alla projezione in discorso anche questo pregio essenziale.

Dopo aver condotto il meridiano di mezzo *TR* della carta [*fig.* 25.], eseguita sopra di esso la graduazione in latitudine, assegnata la lunghezza del raggio *OF* del parallelo medio, e descritti tutti i paralleli della carta col centro *O* e coi raggi *Oa*, *Ob*, *Oc*..., si costruirà l'angolo dello sviluppo *MOH* che servirà a determinare l'estensione dell'arco *MH* del parallelo medio in modo che risulti eguale all'arco che gli corrisponde sulla sfera; ma dovendo ciò verificarsi per tutti gli altri paralleli projettati, affinchè il rapporto del raggio al coseno sia conservato in tutta l'estensione del disegno, si dovrà per ciascun arco di ogni altro parallelo costruire un angolo che ne limiti l'estensione nello stesso modo che pel parallelo medio si è praticato. La costruzione di tali angoli si regolerà col medesimo principio che ha servito di fondamento allo sviluppo conico. Volendo per esempio limitare con-

venientemente l'estensione di 8 gradi del parallelo di 38° di latitudine, si rifletterà che questo parallelo è descritto nella projezione col raggio $Og = OF + Fg$ e sulla sfera col raggio $r \cos 38°$, supposto essere r il raggio della sfera; ed affinchè gli archi di parallelo siano di eguale lunghezza nella projezione e sulla sfera, quantunque descritti con diversi raggi, le ampiezze degli angoli corrispondenti dovranno stare in ragione inversa dei raggi, e quindi si farà, $xOy : 8° :: r \cos 38° : Og$, da cui

$$xOy = \frac{8° . r \cos 38°}{Og} = \frac{8° . r \cos . 38°}{OF + Fg}.$$

Ma $OF = r \cot 40° = 3438^{miglia} \times \cot . 40°$, ed Fg rappresenta la lunghezza di due gradi del meridiano cioè 120 miglia, dunque

$$xOy = 8° . \frac{3438 \cos 38°}{3438 \cot 40° + 120} = 5°,13924 = 5° . 8' . 21'',3.$$

In una maniera analoga si determineranno tutti gli angoli relativi ai diversi paralleli, dovendosi nella formola precedente cambiare soltanto la latitudine del parallelo nel numeratore, e la parte di meridiano aggiunta nel denominatore, la quale per i paralleli superiori al medio sarà evidentemente negativa. Costrutti poi tutti gli angoli così calcolati, si divideranno gli archi di parallelo che ne risultano in 8 parti eguali, ed estesa la graduazione per tutta l'ampiezza del disegno, si descriveranno i meridiani unendo fra loro i punti dei diversi paralleli aventi la medesima longitudine, come si è fatto per la projezione di Flamsteed.

§. 67. Per lo più i lati dei quadrilateri della rete geografica si fanno tanto piccoli che gli archetti di parallelo possono considerarsi sensibilmente eguali alle loro corde. Allora per la graduazione dei paralleli non è necessaria la costruzione degli angoli qui sopra accennata, ma dopo aver eseguita la graduazione in latitudine sul meridiano di mezzo e descritti tutti i paralleli, si assegnano sopra ciascuno i gradi o le parti di grado corrispondenti, desumendone la giusta lunghezza dai gradi di meridiano mediante il rapporto del raggio al coseno della latitudine, come si è fatto per la costruzione di Flamsteed. Se l'ampiezza degli archetti di parallelo fosse tale da risultarne una notabile differenza fra la corda e l'arco, si potrà usare l'espediente accennato nel §. 63.

La *fig.* 26 presenta l'esempio di una rete geografica costrutta col metodo ora esposto, che ha preso il nome di *sviluppo conico modificato* o di *projezione di Flamsteed modificata* per la felice idea che si ebbe d'innestare lo sviluppo conico alla projezione di Flamsteed. La carta abbraccia sulla sfera terrestre l'estensione dell'antico impero romano, ha per latitudine media 40°, e la sua scala è $\frac{1}{650000000}$; per cui 5° di meridiano valgono $4^{mp},616$, ed in conseguenza 5° del parallelo medio eguagliano $4^{mp},616 \cos 40° = 3^{mp},536$.

*

§. 68. Lo sviluppo conico modificato è la migliore di quante projezioni si siano finora immaginate, poichè riunisce se non con esattezza, almeno con molta approssimazione tutte le condizioni richieste per una perfetta projezione. 1.° I gradi di uno stesso parallelo sono eguali fra loro come sulla sfera, ed i gradi di meridiano sono tutti della medesima lunghezza, se non voglia tenersi conto del picoolo aumento che acquistano verso le estremità della carta. 2.° I gradi di meridiano serbano a quelli dei paralleli il rapporto che hanno sulla sfera, del raggio al coseno della latitudine. 3.° Gli angoli dei quadrilateri, sebbene alterati dalla modificazione fatta allo sviluppo conico, sono vicinissimi al retto nel mezzo dello sviluppo, e poco ne differiscono verso le estremità. 4.° Come nella projezione di Flamsteed, i quadrilateri projettati, poco si allontanano in superficie dai corrispondenti sulla sfera, poichè hanno la stessa altezza di quelli e gli stessi lati paralleli.

§. 69. Problema. *Data la latitudine e la longitudine di un punto trovare le coordinate rettangolari della sua projezione, secondo i principii dello sviluppo conico modificato.*

Nell'applicare i principii dello sviluppo conico modificato alla effettiva costruzione delle carte non avviene quasi mai che si possano descrivere i paralleli con moto continuo, trovandosi il loro centro comune fuori e molto lontano dal foglio del disegno; converrà perciò indicare un metodo col quale possano descriversi i meridiani, ed i paralleli per punti. A ciò sarà soddisfatto quando si assegnino le coordinate rettangolari di un punto di data latitudine e longitudine, poichè si projetteranno tutti i paralleli per punti, ed i meridiani risulteranno dall'unione de' punti di eguale longitudine.

Sia AC il meridiano principale rettilineo della carta, AD il parallelo medio projettato la cui latitudine si chiami λ, e sia M un punto qualunque da projettarsi che abbia per latitudine L, e per longitudine p contata dal meridiano principale AC verso l'est, [*fig.* 27].

Si prendano per assi delle coordinate il meridiano AC, e la retta AY ad esso perpendicolare e tangente al parallelo medio projettato. L'origine A delle coordinate dicesi *centro dello sviluppo*.

Rappresenti BM la projezione del parallelo su cui deve trovarsi il punto M; questo parallelo, come tutti gli altri, deve essere un cerchio descritto col centro C. Si abbassi MP perpendicolare su di AC e si pongano, il raggio della terra $=r$; il raggio AC del parallelo medio $=t$; il raggio $BC=CM$ del parallelo BM eguale ad R; la differenza AB fra i due raggi precedenti eguale ad s; l'angolo $BCM=\theta$; $AP=x$; $PM=y$.

Per la teoria dello sviluppo conico, il raggio AC del parallelo medio non è che la cotangente della corrispondente latitudine, quando il raggio della sfera si suppone eguale all'unità; quindi per la sfera di raggio r sarà

$$t=r\cot\lambda. \quad (1).$$

Inoltre la differenza s fra i due raggi t ed R del parallelo medio, e del parallelo del punto M, è uguale all' arco del meridiano terrestre, compreso fra le due latitudini λ ed L, e sviluppato in linea retta. La lunghezza di un tale arco può ottenersi riflettendo che quella di una semicirconferenza di cerchio massimo terrestre è rappresentata da πr, e quindi la lunghezza di un grado dello stesso cerchio massimo è espressa da $\frac{\pi r}{180^\circ}$, onde la lunghezza di un numero di gradi indicato dalla differenza delle latitudini L e λ, sarà

$$s=(L-\lambda)\frac{\pi r}{180^\circ}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Conosciuto s, sarà noto anche R e si avrà

$$R=t-s\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Per trovare il valore dell' angolo θ si rifletterà che nello sviluppo conico modificato tutti i paralleli projettati conservano la stessa lunghezza che hanno sulla sfera, e perciò l' arco BM del parallelo descritto col raggio R deve essere eguale in lunghezza effettiva all' arco corrispondente del parallelo terrestre che ha per raggio $r\cos L$, e per ampiezza la longitudine data p. Quindi le ampiezze degli angoli p e θ dovendo essere inversamente proporzionali ai raggi, si avrà $R:r\cos L::p:\theta$, onde

$$\theta=p\left(\frac{r}{R}\right)\cos L\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

In fine il triangolo rettangolo CPM darà, $CP=R\cos\theta, PM=R\,\text{sen}\,\theta$, e quindi

$$x=CA-CP=t-R\cos\theta\,,\; y=R\,\text{sen}\,\theta.$$

Ponendo nel valore di x, invece di t l' espressione equivalente $R+s$, sarà

$$x=R+s-R\cos\theta=s+R(1-\cos\theta)=s+R\,\text{sen}\,\theta\left(\frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)$$

$$=s+R\,\text{sen}\,\theta\tan\tfrac{1}{2}\theta\,,\; x=s+y\tan\tfrac{1}{2}\theta.$$

Dunque le formole che danno il valore delle coordinate rettangolari di un punto qualunque del quale si conosce la posizione geografica, sono

$$t=r\cot\lambda\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$s=(L-\lambda)\frac{\pi r}{180^\circ}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$R=t-s\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\theta=p\left(\frac{r}{R}\right)\cos L\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=R\,\text{sen}\,\theta\ldots\ldots \\ x=s+y\tan\tfrac{1}{2}\theta\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Per ottenere le coordinate rettangolari nello sviluppo conico semplice potranno adoperarsi le stesse formole precedenti, con la sola differenza che nello sviluppo semplice l'angolo θ essendo costante per tutti i paralleli perchè i meridiani sono rettilinei, si calcola sul parallelo medio per mezzo dell' equazione $\theta = p \operatorname{sen} \lambda$, che dovrà porsi in luogo della formola (4).

* §. 70. Le formole dimostrate nel §. precedente serviranno a projettare per punti un parallelo qualunque con lo sviluppo conico semplice o con lo sviluppo conico modificato, ritenendo per L sempre un medesimo valore, ed assegnando a p valori successivamente maggiori ed equidifferenti; ma per costruire una carta con l' uno o con l' altro metodo di projezione non sarà necessaria la costruzione di tutti i paralleli della rete geografica, e basterà quella di due soli paralleli estremi. Per lo sviluppo semplice ciò è evidente, perchè i meridiani essendo linee rette concorrenti al centro comune dei paralleli, se con le formole (1), (2), (3), $\theta = p \operatorname{sen} \lambda$, (5), si calcoleranno le posizioni dei punti $a, b, c, T, d, e\ldots$, $a', b', c', R, d', e'\ldots$ posti sopra i due paralleli estremi della carta [*fig.* 28], unite le rette $aa', bb', cc'\ldots$, e divise in tante parti eguali quanti paralleli si vogliono costruire tra mezzo ai due estremi $ah, a'h'$, i punti di divisione daranno la costruzione richiesta. Trattandosi dello sviluppo conico modificato, si potranno adoperare le stesse formole, e lo stesso procedimento ora accennato per costruire tutti i paralleli della rete, perchè si sa che questi cerchi si ottengono similmente nelle due projezioni, conica, e conico-modificata; però dopo aver disegnati i paralleli, si eseguirà sopra ciascuno di essi la competente graduazione nel modo usato per la projezione di Flamsteed, cioè deducendo le parti della graduazione di ogni parallelo da quelle della graduazione eseguita sul meridiano, col solito rapporto del raggio al coseno della latitudine.

CAPO TERZO

Carte marine.

Del principio che regola la costruzione delle carte marine, e della LOSSODROMIA.

§. 71. Per gli usi della navigazione si richiede che i meridiani rappresentati sulle carte siano linee rette parallele fra loro, e così pure i paralleli. In tal modo il cammino di una nave che parte dal lido potrà facilmente segnarsi sulla carta mediante gli angoli che esso fa coi successivi meridiani e le distanze percorse fra i

medesimi; gli angoli sono dati dalla bussola e le distanze si misurano determinando la velocità della nave mediante un istromento detto *Loch*. Per esempio, parte un legno dal luogo A nella direzione AB [*fig.* 29.], che fa col meridiano un angolo BAM il quale dicesi *rombo di vento;* giunta la nave in B cambia direzione secondo BC, e giunta in C la cambia di nuovo secondo CD. La bussola fa conoscere gli angoli che la direzione del legno fa col meridiano, e quindi saranno noti gli angoli BAM, CBN, DCP, ed il Loch serve a determinare le distanze AB, CB, DC. Con questi dati si vede ch'è facilissimo assegnare sulla carta il cammino della nave.

Al contrario, se i meridiani non fossero rettilinei e paralleli queste costruzioni diverrebbero molto complicate. In fatti considerando il cammino di una nave che percorre sempre lo stesso rombo di vento, esso è rappresentato sulla sfera da una curva singolare, che si avvicina continuamente al polo terrestre senza mai raggiungerlo. Rappresenti MN [*fig.* 30] il *corso obliquo* di una nave che percorre sempre lo stesso rombo, e quindi fa coi meridiani successivi un angolo costante; sia EQ l'equatore, $OG=L$ la latitudine del punto di partenza, ed i l'angolo costante PON. Preso il punto G per origine delle coordinate sferiche, siano $GD=\varphi, HD=\omega$ le coordinate di un punto qualunque della curva MN di cui si vuol trovare l'equazione; è chiaro che, conducendo l'archetto HC parallelo all'equatore, al differenziale $d\varphi=DF$ dell'ascissa corrisponderà il differenziale $d\omega=BC$ dell'ordinata. Or siccome gli archi DF, HC sono simili, il loro rapporto uguaglierà quello delle circonferenze, e quindi dei raggi cui appartengono, cioè sarà $DF:HC::1:\cos\omega$, essendo 1 il raggio dell'equatore EQ, e $\cos\omega$ il raggio del parallelo cui appartiene l'archetto HC. E ponendo in luogo di DF il suo valore si avrà $d\varphi:HC::1:\cos\omega$, da cui $HC=d\varphi\cos\omega$. Ma dal triangolo differenziale HBC rettangolo in C, che ha l'angolo BHC costante ed eguale a

$90^\circ-PHN=90^\circ-i$, si ottiene, $\tan BHC=\dfrac{BC}{HC}$, ovvero

$$\cot PHN=\frac{BC}{HC};\ \text{dunque}\ \cot i=\frac{d\omega}{d\varphi\cos\omega},\ \text{e quindi}$$

$$d\varphi\cot i=\frac{d\omega}{\cos\omega}.$$

È questa l'equazione differenziale della curva. Passando agl'integrali si avrà

$$\varphi\cot i=\int\frac{d\omega}{\cos\omega}=\int\frac{d\omega\cos\omega}{\cos^2\omega}=\int\frac{d\omega\cos\omega}{1-\mathrm{sen}^2\omega}.$$

La frazione $\dfrac{1}{1-\mathrm{sen}^2\omega}$ è della forma $\dfrac{1}{1-x^2}$, ovvero

$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$, e può spezzarsi in due che saranno

$\frac{\frac{1}{2}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}$; quindi si avrà

$$\varphi \cot i = \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varpi \cos \varpi}{1+\operatorname{sen}\varpi} - \tfrac{1}{2}\int \frac{-d\varpi \cos \varpi}{1-\operatorname{sen}\varpi}$$

nei quali integrali il numeratore è differenziale esatto del denominatore, e perciò, $\varphi \cot i = \frac{1}{2}\log(1+\operatorname{sen}\varpi)-\frac{1}{2}\log(1-\operatorname{sen}\varpi)$,

ovvero $\varphi \cot i = \frac{1}{2}\log\frac{1+\operatorname{sen}\varpi}{1-\operatorname{sen}\varpi}=\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\varpi}{1-\operatorname{sen}\varpi}}+C.$

Ma dalla Trigonometria si sa che $\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\varpi}{1-\operatorname{sen}\varpi}}=\tan(45^\circ+\frac{1}{2}\varpi)$,

dunque, $\varphi \cot i = \log\tan(45^\circ+\frac{1}{2}\varpi)+C$.

Per determinare la costante si rifletterà che quando $\varphi=0, \varpi=L$, per cui l'integrale completo sarà

$\varphi \cot i = \log\tan(45^\circ+\frac{1}{2}\varpi)-\log\tan(45^\circ+\frac{1}{2}L)$, e

$\varphi \cot i = \log\frac{\tan(45^\circ+\frac{1}{2}\varpi)}{\tan(45^\circ+\frac{1}{2}L)}$, e passando dai logaritmi ai numeri.

$$e^{\varphi \cot i}=\frac{\tan(45^\circ+\frac{1}{2}\varpi)}{\tan(45^\circ+\frac{1}{2}L)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (a).$$

§. 72. Da questa equazione apparisce che crescendo φ deve crescere anche ϖ, per cui la curva si avvicina sempre al polo terrestre. Essa non potrà però mai raggiungerlo poichè nell'equazione stessa, ponendo $\varpi=90^\circ$, si avrebbe $e^{\varphi \cot i}=\infty$, e quindi $\varphi=\infty$, ciò che dimostra che la curva si aggira continuamente intorno al polo senza potervi mai arrivare. Questa proprietà si manifesta anche *a priori* riflettendo alla natura stessa della curva, la quale dovendo fare un angolo costante coi meridiani terrestri che incontra successivamente, se passasse per il polo in cui tutti i meridiani s'intersegano, dovrebbe fare contemporaneamente lo stesso angolo con ciascuno di essi, il che è assurdo.

Si faccia nell'equazione (a) l'angolo $i=90^\circ$, e si avrà

$1=\frac{\tan(45^\circ+\frac{1}{2}\varpi)}{\tan(45^\circ+\frac{1}{2}L)}$, da cui $\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}\varpi)=\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}L)$,

ed $\varpi=L$;

cioè per qualunque valore di φ si avrà sempre $\varpi=L$, ciò che significa che quando il cammino della nave è perpendicolare al meridiano, essa percorre un parallelo terrestre.

Ciò posto, la curva a doppia curvatura ora esaminata dicesi *Lossodromia* (che significa *corso obliquo*), ed è chiaro che projettata sopra una carta marina, secondo qualunque metodo di projezione, semprechè i meridiani saranno convergenti, riuscirà una curva di difficile determinazione, poichè riterrà la sua natura di spirale ed avrà per asintoto il polo. Nella projezione stereografica sull' equatore la projezione della lossodromia è una spirale logaritmica. In fatti, i meridiani sono projettati in linee rette concorrenti al polo, e l' angolo costante che la lossodromia fa con essi rimane, come è noto [§. 8], inalterato nella projezione; per la qual cosa ogni elemento della projezione della curva farà un angolo costante col meridiano contiguo, che qui si cambia in raggio vettore, ed è questa la proprietà caratteristica della spirale logaritmica.

Ma se i meridiani fossero rappresentati nella carta marina da linee rette parallele, la projezione della lossodromia sarebbe evidentemente una linea retta, la quale farebbe co' meridiani rettilinei un angolo costante, come la lossodromia co' meridiani della sfera.

Delle carte piane.

§. 73. D. Enrico infante di Portogallo fu il primo ad ideare una projezione della superficie sferica per gli usi della navigazione, nella quale tanto i meridiani che i paralleli riuscivano linee rette parallele fra loro. Immaginò egli un cilindro circoscritto alla sfera, il quale avesse la sua base parallela all' equatore; supponendo il piano di ciascun meridiano e di ciascun parallelo prolungato sino ad incontrare la superficie del cilindro, ed indi sviluppando questa superficie sopra un piano, si ottiene un rettangolo sul quale sono rappresentati i meridiani per mezzo di linee rette parallele fra loro, ed i paralleli anche con linee rette parallele fra loro, e perpendicolari alle prime. Questa projezione applicata alla costruzione delle carte *piane*, che servono alla navigazione lungo le coste, detta di *cabottaggio*, è stata modificata come segue.

Determinata la scala della carta, si condurrà nel mezzo del rettangolo $ABCD$ [*fig.* 31] il meridiano MN, sul quale si assegneranno a distanze eguali i punti $a,b,c...$, per cui devono passare i paralleli $EF,GH,KL...$ Tutti gli altri meridiani dovranno al pari dei paralleli essere anche linee rette equidistanti e parallele ai lati del rettangolo, e non rimarrà a stabilirsi se non la loro equidistanza. Al quale effetto si cercherà una lunghezza dn che serbi alla parte dc di meridiano già assegnata il rapporto che il coseno della latitudine del parallelo medio TO della carta serba al raggio delle tavole; e ripetuta la distanza dn su tutto il parallelo TO, pei punti $n,p,r,s...$ si condurranno i meridiani

$M'N', M''N''$... e sarà compita la rete geografica. È chiaro che con questa costruzione le parti $n'e, n''f$... dei paralleli inferiori al parallelo medio risultano minori delle loro corrispondenti sulla sfera, e maggiori riescono quelle $n'''c, n^{iv}b$... che appartengono ai paralleli superiori al medio; per la qual cosa le carte piane debbono essere distribuite in piccoli fogli aventi una estensione in latitudine molto limitata. Supponendo, per fissare le idee, che l'arco aN di meridiano debba essere di 1.°, che la latitudine del parallelo medio TO sia 30°, e che la carta debba costruirsi alla scala di $\frac{1}{100000}$, la parte ab di meridiano rappresenterà 10', e la sua lunghezza si otterrà riflettendo che al naturale 10' valgono 10 miglia ossiano 10000 passi, onde alla scala si avrà $ab = \frac{10000}{100000} = 0{,}1$ di passo. La parte nd di parallelo dinotante anche 10', si otterrà moltiplicando $0^p{,}1$ per cos. 30°, e si avrà $nd = 0^p{,}0866$.

Delle carte ridotte.

§. 74. Nello sviluppo cilindrico, quale fu da principio immaginato, un grado di meridiano non serba ad un grado di parallelo il solito rapporto del raggio al coseno della latitudine. Per dare alla projezione questo altro pregio essenziale i signori *Wright* e *Mercatore* pensarono di alterare l'eguaglianza dei gradi dei meridiani, e farli crescere dall'equatore verso il polo. Le carte marine così costrutte diconsi carte *ridotte*, e servono alla navigazione in alto mare: esse sono regolate su i seguenti principii.

Siano CD, AB [*fig.* 32] un meridiano ed un parallelo terrestre, e $D'C', A'B'$ i cerchi corrispondenti rappresentati in linea retta sulla projezione. Dinotino Ca, Cb due archetti di meridiano, e di parallelo della stessa ampiezza, per esempio di un grado, o di un minuto, o di un secondo, e $C'a', C'b'$ gli archetti analoghi projettati. Affinchè sulla projezione gli archi simili di meridiano, e di parallelo abbiano fra loro lo stesso rapporto che hanno sulla Terra, dovrà verificarsi la proporzione $Ca : Cb :: C'a' : C'b'$. Ora, sulla carta l'arco di parallelo $C'b'$ è di lunghezza costante, ed uguale all'arco simile $D'L'$ dell'equatore; e da un'altra parte il rapporto di $Cb : Ca$ sulla Terra ha il conseguente costante, e va diminuendo verso il polo; quindi, affinchè accada lo stesso del rapporto $C'b' : C'a'$ sulla carta, il quale ha l'antecedente costante, bisognerà che il conseguente $C'a'$, cioè l'arco di meridiano projettato, vada crescendo dall'equatore verso il polo. Tutta la difficoltà per la costruzione delle carte ridotte consiste dunque nel determinare le lunghezze crescenti degli archi di meridiano projettato, alle varie latitudini terrestri.

Per risolvere il problema riprendiamo la proporzione $Ca : Cb :: C'a' : C'b'$; chiamiamo L la latitudine CD, ed S l'arco corrispondente $C'D'$ di meridiano projettato, e sarà $Ca = dL$, e $C'a' = dS$.

Or poichè il parallelo cui appartiene l'archetto Cb ha per raggio il coseno della latitudine CD, e l'archetto $C'b'$ è uguale all'archetto $D'L'$ dell'equatore, gli elementi simili $Cb, C'b'$ avranno fra loro la stessa ragione delle circonferenze dei cerchi cui appartengono ossia dei raggi dei cerchi medesimi, e si avrà $Cb : C'b' :: \cos L : 1$. Sostituendo questo secondo rapporto al primo nella proporzione fondamentale, si avrà $Ca : \cos L :: C'a' : 1$, ovvero $dL : \cos L :: dS : 1$, e quindi $dS = \frac{dL}{\cos L}$, ed integrando,

$$S = \int \frac{dL}{\cos L} + C.$$

L'integrazione della formola $\frac{dL}{\cos L}$ si eseguirà come nel §. 71 e si avrà,

$$S = \log\tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}L) + C.$$

La costante è nulla perchè S è zero quando $L = 0$, onde

$$S = \log\tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}L).$$

Se in questa eguaglianza si faccia $L = 90^\circ$, sarà $S = \infty$, il che prova che i meridiani projettati sono linee lossodromiche, le quali non possono mai giungere sino al polo. Il logaritmo del secondo membro della stessa equazione è iperbolico, e quindi per ottenerne il valore mediante le tavole ordinarie bisognerà dividerlo pel modulo K. In tal modo l'arco *ridotto* S sarà dato in parti del raggio *uno* dell'equatore, ma volendolo espresso in minuti della circonferenza dell'equatore medesimo, bisognerà moltiplicarlo per il raggio ridotto in minuti, cioè per R', trovato nella Trigonometria. Si avrà dunque

$$S = \frac{R'}{K} \log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}L).$$

Un altro arco compreso fra l'equatore e la latitudine L' sarebbe similmente espresso da

$$S' = \frac{R'}{K} \log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}L');$$

e per conseguenza l'archetto di meridiano projettato racchiuso fra le latitudini L, L' sarà dato dalla formola

$$S' - S = \frac{R'}{K}\left\{\log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}L') - \log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}L)\right\},$$

$$S' - S = \frac{R'}{K} \log\frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}L')}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}L)}.$$

Con questa formola si calcoleranno le varie parti del meridiano ridotto espresse in minuti dell'equatore, e si troverà, per esempio, che l'arco di meridiano projettato compreso fra le latitudini $L = 34^\circ, L' = 35^\circ$ contiene 73 minuti della circonferenza dell'equatore terrestre.

§. 75. Per costruire su questi principii una carta ridotta, si eseguirà prima di tutto la graduazione in longitudine sul lato inferiore DC [*fig.* 33] del rettangolo, e per i punti a,b,c... si condurranno i meridiani; indi si calcolerà la parte di meridiano ridotto compresa fra le latitudini sferiche dei paralleli estremi EH, FG, la quale valutata secondo la scala del disegno, servirà a limitare l'estensione della carta in latitudine; in fine tra i punti E,F si assegneranno di grado in grado gli altri K,L,M,N pei quali debbono passare i paralleli, con calcolare gli archi di meridiano ridotto EK,KL,.. compresi fra le latitudini sferiche di quei punti. Operando a questo modo si avrà dal calcolo dell'ultimo arco NF una verificazione sulla posizione dell'ultimo punto F già precedentemente determinato.

Sia per esempio la latitudine del parallelo EH di 33°, e la scala della carta $\frac{1}{1\,000\,000}$; un grado ab dell'equatore avrà per lunghezza naturale $60\times1000=60000$ passi, ed alla scala, $\frac{60000}{1000000}=$ 0^m,06. E poichè i 5 gradi di meridiano ridotto compresi fra le latitudini 33° e 38° valgono 369 minuti dell'equatore, ossiano 369 miglia, la lunghezza della retta FE alla scala sarà $\frac{369\times1000}{1000000}=$ 0^m,369. Similmente si determinerebbero le lunghezze delle rette EK,KL etc.

§. 76. È notabile che l'arco $S'-S$ di meridiano ridotto, quale si ottiene dalla integrazione, cioè $\log\frac{\tan(45°+\frac{1}{2}L')}{\tan(45°+\frac{1}{2}L)}$, non è altra cosa se non che il secondo membro dell'equazione della lossodromia trovata di sopra, in cui si estenda l'integrale sino ad un valore di ω eguale ad L'. Ciò dimostra che le lossodromie descritte sulla sfera vengono sulla carta ridotta rappresentate con esattezza per mezzo di linee rette. Infatti, se per un punto O', [*fig.* 32] si conduca una retta obbliqua $O'N'$ che faccia col meridiano un angolo i conosciuto, la sua equazione sarà $y=a+bx$, ovvero sulla figura, $H'D'=O'G'+H'd'=O'G'+G'D'\cot i$. E poichè nella carta ridotta le longitudini sono gli archi stessi dell'equatore sviluppati in linea retta, sarà la $G'D'$ eguale al φ della *fig.* 30, e l'equazione della retta, sulla carta ridotta, si cambierà in $S'=S+\varphi\cot i$, ovvero $S'-S=\varphi\cot i$; e sostituendo in luogo di $S'-S$ il suo valore determinato qui sopra (§. 74) si avrà,

$$\varphi\cot i=\log\frac{\tan(45°+\frac{1}{2}L')}{\tan(45°+\frac{1}{2}L)},$$ che è l'equazione della lossodromia sulla sfera. Laonde questa curva rimane *sviluppata* in linea retta sulla carta ridotta.

Geod.
Tab. I
A
O
a
b
c
C
D
B'
N
D
b
c
D
B
a
O
B
E
c
D
A

17.
Fig.a 18.
Fig.a 23.

Fig.a 28.
H
M
r
r'
L
l
S
E
O
K
N
Fig.a 33.
N
S
S''
Est
Ovest
s
s''
N'
Fig.a 34.
m
h
n
Z
Z'
L
A
B
p
C
D
P
E
R
Q

Fig. 3.

H F
G
P
V
linea
E
IV
L III II
R'
M'

Fig. 7.

Fig. 6.

Z
S'
L
S
a L'
R
A
b B

Z
a
A
P
L
a'
R
C
K

Fig. 8.

A f B F

Fig.ª 7.

Figa 11.
Figa 13.
Figa 15.

19.
E
a
b
C
m
b
a
Q
A
b
d
a
Q
B
f
P
d
b
C
P'
Fig.a 22.
n
V
T
S
R
o
utsr
Q

Fig.a 25.
O
A
T
a
b
c
F
e
g
K
R
D
S
M
r
x
p
n
m
40
30
50
45
40
35
30
25
20
Fig.a 27.
C
θ
P
M
B
D
A
Y
Fig.a 31.
M'
M
M''
a
b
c
d
e
f
p
n
r
s
N'
N
N''
g.a 33.
B
G
H
C